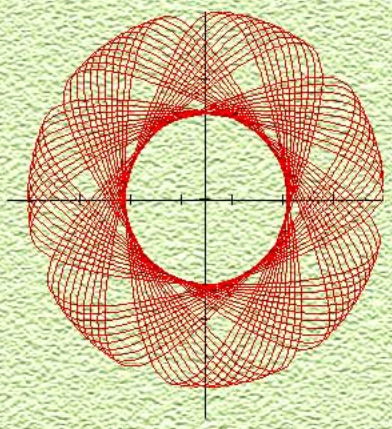
微積分學

culus Calculus Calculus Calculus Calculus Calcu

電子書 2.2 版

編著者：顏國勇



國立成功大學數學系

2014 年 10 月 15 日

序

本版微積分學之前身爲：

陳珍漢、黃德華、顏國勇合著之微積分學, 修訂三版。

早在**1970**年代初, 我們三人即著手編寫一本適合我國大學生之微積分教本, 期間歷經多次修訂與二十餘年之實際講授, 儘管吾等皆認爲該書對於當今大學生之數學學習有一定程度之幫助, 然而不可否認的, 近年來, 全球科技進步一日千里, 尤以電腦之軟硬體最爲顯著, 以往以鉛字排版之書籍, 改版時, 限制過多, 以致只能小幅度修正。以往以五號鉛字印刷之書本對於絕大多數有近視問題之大學生, 實在不太恰當。因之, 數年前我們決定該書不再改版。

然而, 經過近三十年之教與學, 其間曾有數次使用英文微積分書籍以爲教本, 益覺吾等之原著對學生仍有頗多優點; 成大理、工及管理學院數千學生用過該書, 正反兩面之反應皆在吾等省思之中; 四年前, 本人於是嘗試以電腦打字打出講義大綱試用, 繼之則逐步增加份量, 好使學生上課時, 得以人手一本影印講義而不必邊抄邊聽, 消化不良。

以電腦打出中文並無任何困難, 能夠編寫美麗高雅之數學式子則是拜電腦軟體 TEX 之強大功能, 然而最大之挑戰則爲數學圖形之繪製, 儘管市面上有不少軟體可以解決此項難題, 但已知之軟體與TEX多半並不相容, 其間之困難只有耐心使用各種軟體配合而繪出所需之圖。

本書有八成以上取材自吾等三人之原著, 較大之差異爲範例及圖形。由於教學與研究之需, 近年來, 本人曾蒐集各大學研究所入學考及轉學生入學考之試題, 並予解答, 從其中看出當今各大學之系所對於微積分之需求已迥異於往昔, 因之在向量函數與多變數函數之微分與積分方面皆做較大幅度之增修。

最後, 本人在此特別感謝陳、黃二位學長, 慷慨允許本人無條件使用原著之任何部分, 本人不敢大言本書之問世能光大吾等三人之原著, 僅盼能延續該書之生命。書中如有誤謬或未盡明白之處, 歡迎來函賜正。

顏　國　勇

1998年九月於成大數學系

電子書版序

本人於 2004 年退休, 其後三年繼續以兼任身份講授微積分, 原本希望將最後修訂之第三版予以付梓, 但出版商以舊書仍有庫存而拒絕。2011 年希望將此書編爲電子書, 置於網路, 或可幫助有緣學子多一項參考資料, 然而原先以軟體 CTEX 編輯而成之檔案, 先天上受限於只能在 DOS 環境工作, 而發行 CTEX 之倚天公司無意將它升級爲 Window 版, 換言之, CTEX 已無法再使用。七月間決定將已列印之第三版以掃瞄方式編爲電子書, 雖然歷時月餘, 終於完成。然而, 掃瞄之電子書有以下三項缺點, 其一, 檔案太大, 閱讀時下載較慢, 其二, 無法利用「蒐尋」功能, 其三, 修改不易。

不才另有一書《機率論》, 篇幅只有《微積分學》的一半, 決定將原有以 CTEX 排成之檔案, 使用目前眾多學者使用之數學編輯軟體 cwTEX 予以改版, 最初, 困難不少, 所謂熟能生巧, 逐漸找到竅門, 排除困難, 完成較優質之 pdf 格式的電子書, 並置放於成大數學系圖書館之電子書網站。

有了此一經驗, 乃著手利用 cwTEX 將本書予以改編, 並置於上述網站。改版工作有如拆屋重建, 曠日費時, 所幸退休後空閒時間較多, 歷經數月終於完工, 儘管誠惶誠恐, 惟恐出錯, 誤謬實所難免, 但望各界高手不吝賜正。

顏 國 勇

2012年元月於台南市

t14014@math.ncku.edu.tw

版本說明

電子書 1 版： 原書三版予以掃瞄, 並於 2011.8.1. 置放於網路。

電子書 2 版： 以 cwTEX 予以改版, 並於 2012.1.1. 置放於網路。

電子書 2.2 版： 全部圖形及部分文字改為彩色. 並於 2014.10.15. 置放於網路。

目　　錄

序 2

電子書版序 3

預篇　　集合與函數

第一節　何謂微積分 8

第二節　集合與函數 9

第三節　實數系 13

第四節　實數系內各數系 15

第五節　擴張的實數系 16

第六節　微積分中函數之分類 17

第七節　常用簡單函數與單調函數 17

第八節　函數之運算 19

習　題 23

第一章　極限與連續

第一節　何謂極限 25

第二節　準備工作 27

第三節　極限之定義 29

第四節　常用之極限定理 33

第五節　連續性 43

第六節　其他八類極限 53

習　題 59

第二章　導函數

第一節　導數與切線 62

第二節　常用之導數定理 66

第三節　關聯比率 73

第四節　導數與極值 76

第五節　微分均值定理 78

第六節　微分 86

習　題 91

第三章　特殊函數

第一節　反函數 94
第二節　三角函數 97
第三節　反三角函數 101
第四節　指數函數 108
第五節　自然對數函數 113
第六節　一般指數函數 116
第七節　一般對數函數 119
第八節　指數與對數之應用 121
第九節　對數微分法 126
第十節　雙曲函數 127
第十一節　反雙曲函數 130
第十二節　隱微分法 133
第十三節　參數方程微分法 136
習　題 144

第四章　Taylor定理與導數之應用
第一節　優良近似函數與 Taylor 定理 148
第二節　極值 156
第三節　函數凹凸性 160
第四節　作圖 165
第五節　近似函數值 170
第六節　牛頓迭代法 172
第七節　不定型之極限 176
習　題 184

第五章　不定積分
第一節　反導函數與不定積分 187
第二節　基本公式 191
第三節　代換積分法 193
第四節　三角代換法 196
第五節　雙曲代換法 198
第六節　分部積分法 199
第七節　部分分式積分法 204
第八節　半角代換法 205
第九節　不定積分之應用 206
習　題 209

第六章　定積分

第一節　Riemann 積分 — Darboux 講法 214
第二節　Riemann 積分 — Riemann 講法 217
第三節　Riemann 積分之重要性質 218
第四節　基本定理 230
第五節　變數代換 235
第六節　第一型瑕積分 238
第七節　第二型瑕積分 242
習　題 250

第七章　積分的應用

第一節　面積 253
第二節　體積 259
第三節　弧長 265
第四節　迴轉體表面積 268
第五節　形心 271
第六節　函數之平均值 281
第七節　近似積分法 283
習　題 288

第八章　序列與級數

第一節　序列 291
第二節　實數級數 296
第三節　正項級數 300
第四節　交錯級數之審斂法 306
第五節　絕對收斂與條件收斂 310
第六節　冪級數與收斂區間 314
第七節　Taylor 級數與解析函數 319
第八節　冪級數之運算 321
第九節　積分之冪級數近似法 329
習　題 331

第九章　**n** 維空間與向量函數

第一節　**n** 維空間 334
第二節　向量之運算 338
第三節　向量函數 345
習　題 357

第十章　多變數函數及偏導數
第一節　多變數函數之極限與連續 360
第二節　方向導數與偏導數 367
第三節　可微、切面、法線與梯度 374
第四節　Taylor定理之推廣 381
第五節　極值問題 386
第六節　隱微分法 397
習　題 400

第十一章　重積分與線積分
第一節　二重積分 403
第二節　累次積分 407
第三節　二重積分之極坐標變換 412
第四節　二重積分之一般變換 421
第五節　利用多重積分求體積與面積 428
第六節　線積分 430
習　題 441

參考資料 445
答案與提示 446
附　　錄 458
漢英名詞索引 497
英漢名詞索引 504

請利用 Adobe Acrobat 之「書籤」(顯示在螢幕左側)，點擊各章節時，可跳至該章節之頁面.

預篇 集合與函數

數十年前, 在大學裡, 數學只被部分理工科學生 (如物理、電機、機械、航太、土木、測量、統計 · · · 等) 所重視, 而在電腦進入每個家庭的今日, 數學已成爲每一個人所應具備的工具, 儘管每個人對於數學內涵和程度的需求不盡相同, 但人人都需要數學則是一致的看法. 而微積分又是高深數學中最爲有用且最爲基本之一門, 數學家 Steen 在他的 Mathematics tomorrow 一書中指出"微積分是人類智慧之一大勝利" (Calculus is one of the great triumphs of the human intellect). 我們當然也認爲其他方面的學問亦有極大的進步, 這些學問中如果沒有數學的支援, 相信它們的進步和成就不會如此傲人.

在開始微積分正文之前, 我們特別加入『預篇』, 主要內容是將集合與函數概念加以重新回顧, 目的有二 : 一者是介紹本書中所使用之符號 (每本數學書的符號都不盡相同), 二者這些概念是所有數學的共同基礎, 當然也是微積分之基礎.

§ 0.1 何謂微積分

微積分 (calculus) 乃微分學 (differential calculus) 與積分學 (integral calculus) 之總稱, 其中

(1) **微分學**乃研究函數差商之極限及其相關學問, 我們知道導數之定義爲 :

$$f'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

(2) **積分學**乃研究函數和積之極限及其相關學問, 積分之定義較爲複雜, 我們在本課程第六章中將詳細討論, 簡單的說 :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(t_j)\Delta x_j.$$

由此可見微積分乃是研究函數之四則運算與極限之一門學問.

這兩門數學對於人類之重要性而言, 積分學顯然大過微分學, 二者原本單獨發展, 直到十七世紀有人開始注意到二者之關聯, 終於在 Newton 和 Leibniz 的努力之下, 這門學問於是問世.

經過兩百多年來衆多數學家在觀念、符號和技巧上的改進, 一方面拓展了它的應用領域 (如體積、形心、功、機率、期望值等), 另一方面則扎根於它的系統化、公式化及簡單化, 也使得一般大學生也有能力去解決, 從前要像 Archimedes 或 Newton 這類天才方能應付的數學問題. 微積分也是進入今日高深數學之最重要基礎, 它對當今及未來世界文明貢獻實難估計.

§ 0.2 集合與函數

我們都知道幾乎所有的近代數學理論, 都建築在集合論 (set thoery) 之上. 對於微積分學而言, 當然也不例外. 但若要以嚴格的公設法來討論它, 則需要很多時間. 爲方便起見我們仍以 Cantor 的直觀集合論爲基礎.

(1) 集合 (set) 與元素 (element): Cantor 說:『集合』乃是將一些在直觀或想像中可資辨識且確定之事物視爲一體的蒐集. 如果有人深入追究何謂『事物』? 何謂『蒐集』? 我們將永無寧日, 因此, 對於集合與元素二名詞, 我們只有在共識下接受它, 以爲今後討論之基礎.『元素 x 屬於集合 A』記爲 $x \in A$, 否則記爲 $x \notin A$. 若集合 A 乃滿足性質 $P(x)$ 之元素所組成, 則記爲 $A = \{x \mid P(x)\}$, (有些學者寫爲 $A = \{x : P(x)\}$).

(2) 子集 (subset): 設 A, B 爲集合, 則

$$A \subset B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

(3) 相等 (equal): 設 A, B 爲集合, 則

$$A = B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A).$$

(4) 眞子集 (proper subset)*: 設 A, B 爲集合, 則

$$A \subsetneqq B \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (A \subset B \wedge A \neq B).$$

(5) 空集合 (empty set): $\varnothing = \{x \mid x \neq x\}$.

(6) 聯集 (union): 設 A, $B, A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 皆爲集合, 則

- $A \cup B \underset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$.
- $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \underset{\text{def}}{=} \{x \mid \exists j \in \{1, \ldots, n\},$ 使得 $x \in A_j\}$.

* 有些學者分別以 $A \subseteq B$ 及 $A \subset B$ 表示 A 爲 B 之子集及眞子集.

- $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \underset{\text{def}}{=} \{x \mid \exists j \in \mathbb{N}, \text{使得 } x \in A_j\}$.

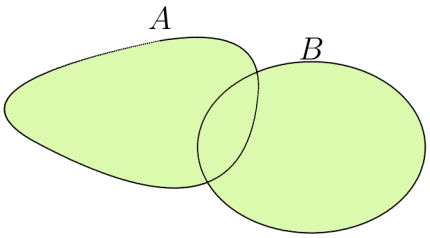


圖 0–1： $A \cup B$

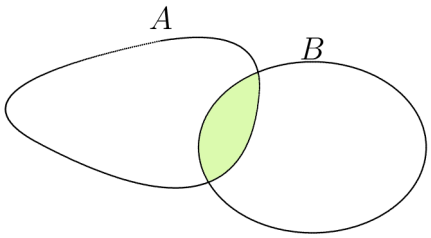


圖 0–2： $A \cap B$

(7) 交集 (intersection):

- $A \cap B \underset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$.
- $\bigcap_{j=1}^{n} A_j \underset{\text{def}}{=} \{x \mid \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \ x \in A_j\}$.
- $\bigcap_{j=1}^{+\infty} A_j \underset{\text{def}}{=} \{x \mid \forall j \in \mathbb{N}, \ x \in A_j\}$.

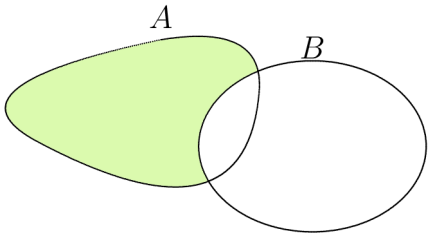


圖 0–3： $A \setminus B$

(8) 差集 (difference)： 設 A, B 爲集合, 則

$$A \setminus B \underset{\text{def}}{=} \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \notin B\}.$$

(9) 冪集 (power set)： $\mathcal{P}(A) \underset{\text{def}}{=} \{B \mid B \subset A\}$.

(10) 序對 (ordered pair)： 設 x, y 爲二元素, 令

$$(x, y) \underset{\text{def}}{=} \{\{x\}, \ \{x, y\}\}.$$

由上述定義可以證得： $(\ (x, y) = (a, b) \ \Leftrightarrow \ x = a, y = b\ )$.

(11) 積集合 (Cartesian product)： 設 A, B 爲集合, 則

$$A \times B \underset{\text{def}}{=} \{(x, y) \mid x \in A \ \wedge \ y \in B\}.$$

- 例如 $A = \{1, 4\}, \ B = \{2, 3\}$, 則 $A \times B = \{(1, 2), (1, 3), (4, 2), (4, 3)\}$.
- 例如 $A = [1, 4], \ B = [2, 3]$, 則

$$A \times B = \{(x, y) \mid 1 \le x \le 4, \ 2 \le y \le 3\},$$

其乃由平面上 $(1, 2)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(1, 3)$ 四點所圍之區域, 如下圖所示：

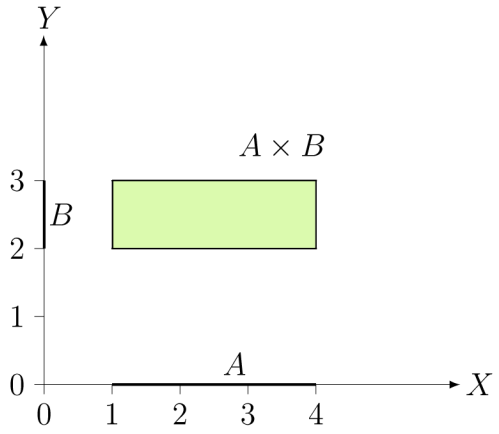


圖 0–4

(12) 函數 (function)： 設 A, B 爲二非空集合,

$$f \text{ 爲自 } A \text{ 至 } B \text{ 之一}\textbf{函數} \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 1.\ f \subset A \times B, \\ 2.\ \forall x \in A,\ \exists! y \in B \text{ 使得 } (x,y) \in f. \end{cases}$$

若 $(x,y) \in f$, 我們常以 $y = f(x)$ 表之.

(註： 關於函數之定義亦可界定爲：『A 中每一元素 x, 必存在 B 中唯一元素 y 與之對應.』但對應二字並非邏輯符號或已界定之名詞, 爲了數學之完美, 故以上述方式界定).

函數之記法

(i) $f\colon A \to B : f(x) = \cdots$;

(ii) $f\colon A \to B : x \mapsto \cdots$.

本書中, 通常以上述方式表示函數, 但至目前爲止, 仍有許多人偏愛以傳統較簡單方式表示, 如

- $y = x^2$;
- $y = \dfrac{\sin x}{x}$, $\forall x \neq 0$;
- $z = x^2 - y^2$.

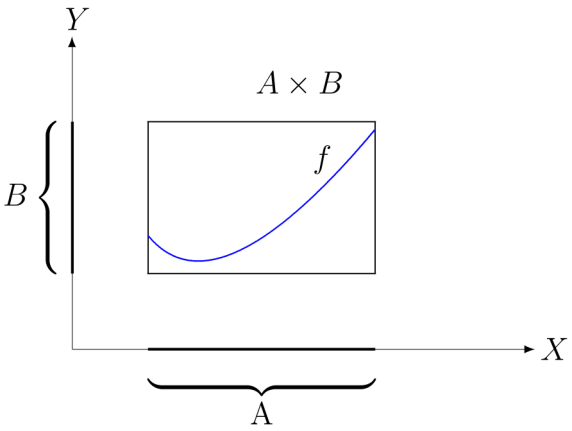


圖 0–5： 函數

(13) 定義域 (domain) 及值域 (range) ： 上述定義中, 集合 A 稱爲 f 之**定義域**, 常寫爲 D_f; 而 A 之元素 x 稱爲**自變數或變數** (variable), 此時, $f(x)$ 稱爲 x 之**函數值** (value), 而所有函數值所成之集合稱爲 f 之**值域**, 常寫爲 R_f, (某些學者將集合 B 稱爲**對應域** (co-domain)).

(14) 映像 (image) 及像原 (inverse image) ： 設 $f\colon A \to B$ 爲一函數, $S \subset A$, 則

$$f(S) \underset{\text{def}}{=} \{f(x) \mid x \in S\}$$

稱爲 S 之 f **映像**. (因此, f 之值域 R_f 乃其定義域之f 映像, 即 $R_f = f(D_f)$).

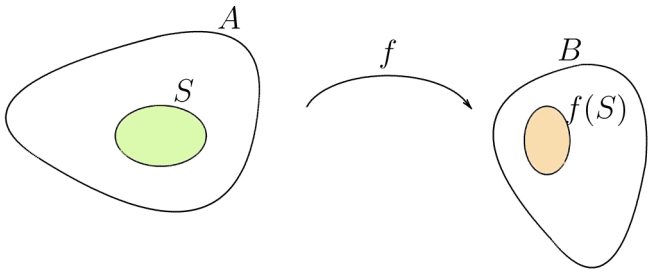


圖 0–6: 映像

若 $T \subset B$, 則

$$f^{-1}(T) \underset{\text{def}}{=} \{x \in A \mid f(x) \in T\}$$

稱爲 T 之 f **像原**. 顯然 B 及 R_f 之像原皆爲定義域 A.

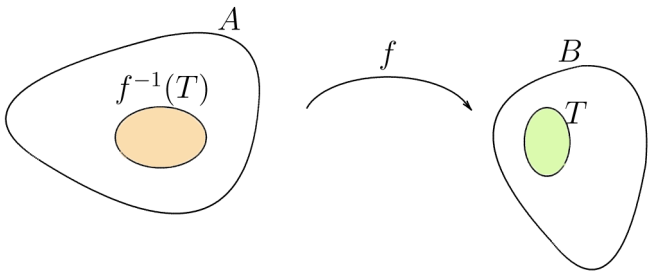


圖 0–7: 像原

(15) 嵌射 (injective or 1-1): 其本意爲不相同之變數其值亦不同, 更精確的說 :

$$f\colon A \to B \text{ 爲}\textbf{嵌射} \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)).$$

(16) 蓋射 (surjective or onto): 對應域 B 中之每一元素皆存在 A 中之元素與之對應, 更精確的說 :

$$f\colon A \to B \text{ 爲}\textbf{蓋射} \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\, \forall\, y \in B,\ \exists x \in A \text{ 使得 } y = f(x) \,\Big]$$
$$\Leftrightarrow\ (R_f = B).$$

(17) 對射 (bijective or 1-1 onto) : 嵌射且蓋射之意.

(18) 函數相等 (equality of two functions) : 我們稱二函數 f 與 g 相等 (記爲 $f = g$), 若其滿足以下二條件 :

$$\text{(i) } D_f = D_g, \qquad \text{(ii) } \forall x \in D_f,\ f(x) = g(x).$$

所謂二函數不相等係指上述定義之反面; 更明白地說 :

$$f \neq g \;\Leftrightarrow\; \Big[D_f \neq D_g \text{ 或 } \exists x \in D_f \text{ 使得 } f(x) \neq g(x)\Big].$$

(19) 反函數 (inverse function) ： 設 f 爲一函數, 令 $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$, 若 f^{-1} 爲一函數則稱 f 爲 **可逆**(invertible), 並稱 f^{-1} 爲 f 之**反函數**.

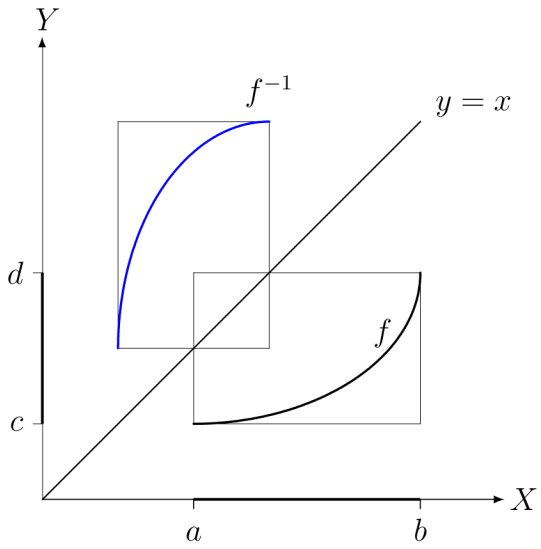


圖 0–8： 反函數

由反函數之定義可知, f^{-1} 與 f 之圖形對稱於直線 $y = x$.

§ 0.3 實數系

早在西元前五百年, 希臘人即已知曉無理數 $\sqrt{2}$ 的存在, 但找到所有無理數並建立實數系則是經過漫長的歲月, 直到十九世紀, 方由一些大數學家, 如 Dedekind, Cantor, Weierstrass 等以嚴格數學方法予以界定. 數系的建立是件十分繁瑣的大工程, 先由 Peano 的公設界定自然數系, 再擴展到整數系、有理數系, 每一階段皆需界定所謂『加法』、『乘法』與『序』的觀念, 最後再擴展到實數系, 爲填補有理數系所有的『縫隙』, 數學家們設計了種種方法, 再證明它具完全性 (completeness), 此一大工程對於材料龐雜的微積分課程而言, 顯得十分奢侈, 本節中我們將以公設法界定實數系, 讀者不必細讀, 僅需了解實數系 $\mathbb{R}$ 具完全性即可.

所謂**實數系** (real number system) 係指一具完全性之序體 (complete ordered field).

(1) **體** (field) 乃一集合 F 上賦與加法及乘法且滿足

(i) $(F, +)$ 爲一交換群 ： 即 $\forall\, x, y, z \in F$,

- $x + (y + z) = (x + y) + z$;
- $\exists\, 0 \in F$ 使得 $0 + x = x + 0 = x$;
- $\forall\, x \in F$, $\exists\, y \in F$ 使得 $x + y = 0$; 此時稱 y 爲 x 之加法反元素, 且記爲 $y = -x$;
- $x + y = y + x$.

(ii) $(F^*,\ \cdot\ )$ 爲一交換群, (其中 $F^* = F \setminus \{0\}$), 即 $\forall\, x, y, z \in F^*$,

- $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
- $\exists\ 1 \in F^*$ 使得 $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;
- $\forall\, x \in F^*,\ \exists\ y \in F^*$ 使得 $x \cdot y = 1$; 此時稱 y 爲 x 之乘法反元素, 且記爲 $y = x^{-1}$;
- $x \cdot y = y \cdot x$.

(iii) 分配律 : $\forall\, x, y, z \in F, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

(2) **序體** (ordered field) 乃上述"體" F 上再賦與『次序』概念如下 :

(i) 反身律 : $\forall\, x \in F,\ x \le x$.

(ii) 反對稱律 : $x \le y\ \wedge\ y \le x\ \Rightarrow\ x = y$.

(iii) 遞移律 : $x \le y\ \wedge\ y \le z\ \Rightarrow\ x \le z$.

(iv) 三一律 : $\forall\, x, y \in F,\ x \le y\ \vee\ y \le x$.

且滿足以下二條件:

(i) $(\forall\, x, y, z \in F)(x \le y\ \Rightarrow\ x + z \le y + z)$;

(ii) $(\forall\, x, y, z \in F)(0 \le z,\ x \le y\ \Rightarrow\ x \cdot z \le y \cdot z)$.

(3) 具**完全性**之序體 (complete ordered field) : 上述"序體" F 若滿足 :

$$\begin{cases} (1)\ F \text{ 之有上界非空子集必有最小上界;} \\ (2)\ F \text{ 之有下界非空子集必有最大下界.} \end{cases}$$

則稱序體 $(F, +, \cdot)$ 具完全性.

關於"上界"、"下界"、"最小上界"及"最大下界"等名詞, 我們詳細介紹如下 :

設 E 爲一集合且賦與一個"**偏序** (partial order)" (即滿足反身律、反對稱律及遞移律之關係), 則稱 E 爲一**偏序集** (partially ordered set), 對於 $\varnothing \ne S \subset E$, 我們規定 :

- 我們稱 M 爲 S 之**最大元素** (maximum element) (並記爲 $M = \max S$), 如果

$$\begin{cases} \text{(i)}\ \ M \in S, \\ \text{(ii)}\ \ \forall\, x \in S\ \Rightarrow\ x \le M. \end{cases}$$

- 我們稱 m 爲 S 之**最小元素** (minimum element) (並記爲 $m = \min S$), 如果

$$\begin{cases} \text{(i)}\ \ m \in S, \\ \text{(ii)}\ \ \forall\, x \in S\ \Rightarrow\ m \le x. \end{cases}$$

- 我們稱 u 爲 S 之一**上界** (upper bound), 如果

$$\begin{cases} \text{(i)}\ \ u \in E, \\ \text{(ii)}\ \ \forall\, x \in S\ \Rightarrow\ x \le u. \end{cases}$$

- 我們稱 l 爲 S 之一**下界** (lower bound), 如果

$$\begin{cases} \text{(i)} \ \ l \in E, \\ \text{(ii)} \ \ \forall x \in S \ \Rightarrow \ l \le x. \end{cases}$$

- $\sup S \underset{\text{def}}{=}$ "S 上界中之最小元素". 並稱其爲 S 之**最小上界** (supremum).
- $\inf S \underset{\text{def}}{=}$ "S 下界中之最大元素". 並稱其爲 S 之**最大下界** (infimum).

一集合若同時有上界及下界, 則稱其爲一**有界集合** (bounded set).

我們以 $\mathbb{R}$ 表實數系, 這是個世界通用之數學符號. 本課程中亦常用以下符號 :

- $\mathbb{R}^* \underset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 非零實數集合.
- $\mathbb{R}_+ \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge 0\}$, 非負實數集合.
- $\mathbb{R}_+^* \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, 正實數集合.

例 1. 試問下列各集合在 $\mathbb{R}$ 上之最大元素、最小元素、sup 及 inf 是否存在, 若其存在則求之.
(a) $A = \mathbb{N}$; (b) $B = (0, 3]$; (c) $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \le 3\}$.

【解】

(a) $\max A$ 不存在, $\min A = 1$, $\sup A$ 不存在, $\inf A = 1$;

(b) $\max B = 3$, $\min B$ 不存在, $\sup B = 3$, $\inf B = 0$;

(c) 因 $C = [-\sqrt{3}, \ \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}$, 是以 $\max C$ 及 $\min C$ 皆不存在, 但 $\sup C = \sqrt{3}$, $\inf C = -\sqrt{3}$. □

§ 0.4 實數系內各數系

(1) **自然數系**. 設 $A \subset \mathbb{R}$,
A 稱爲一**歸納集** (inductive set), 如果 $1 \in A \ \wedge (x \in A \ \Rightarrow \ x + 1 \in A)$. 我們規定自然數系爲最小之歸納集, 亦即

$$\mathbb{N} \underset{\text{def}}{=} \bigcap \{A \mid A \text{ 爲一歸納集}\} = \{1, \ 2, \ 3, \ldots\}.$$

(2) **整數系**.

$$\mathbb{Z} \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{N} \ \vee \ -x \in \mathbb{N} \ \vee \ x = 0\} = \{0, \ 1, \ -1, \ 2, \ -2, \ldots\}.$$

(3) 有理數系.

$$\mathbb{Q} \underset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m,\ n \in \mathbb{Z} \ \wedge\ n \neq 0 \right\}.$$

註: 有些學者主張自然數系 $\mathbb{N}$ 內含有 0, 與本書不同, 我們以 $\mathbb{Z}_+$ 表非負之整數集合. 下表是各數系之創始數學家及其由來:

數系	符號	創始數學家	原文
自然數系	$\mathbb{N}$	Peano	義大利文 Naturale (= natural)
整數系	$\mathbb{Z}$	Dedekind	德文 Zahl (= number)
有理數系	$\mathbb{Q}$	Peano	義大利文 Quoziente (= quotient)
實數系	$\mathbb{R}$	Cantor	德文 Reelle (= real)

不過有人認爲有理數系符號 $\mathbb{Q}$ 可能是二十世紀初 Bourbaki (一群法國數學家) 所創.

§ 0.5 擴張的實數系

所謂**擴張的實數系** (extended real number system) 係指集合 $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, 其中 $-\infty,\ +\infty \notin \mathbb{R}$ 且二者不相等, 並賦與以下二運算及次序.

(1) 加法 :

$$x + y = \begin{cases} \text{照舊}, & \text{若 } x, y \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & \text{若 } (x \in \mathbb{R},\ y = +\infty) \vee (y \in \mathbb{R},\ x = +\infty) \vee (x = y = +\infty), \\ -\infty, & \text{若 } (x \in \mathbb{R},\ y = -\infty) \vee (y \in \mathbb{R},\ x = -\infty) \vee (x = y = -\infty), \end{cases}$$

$(-\infty) + (+\infty)$ 無意義.

(2) 乘法 :

$$xy = \begin{cases} \text{照舊}, & \text{若 } x, y \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & \text{若 } (x > 0,\ y = +\infty) \vee (y > 0,\ x = +\infty) \vee (x < 0,\ y = -\infty) \vee \\ & \quad (y < 0,\ x = -\infty) \vee (x = y \in \{-\infty,\ +\infty\}), \\ -\infty, & \text{若 } (x < 0,\ y = +\infty) \vee (y < 0,\ x = +\infty) \vee (x > 0,\ y = -\infty) \vee \\ & \quad (y > 0,\ x = -\infty) \vee (x,\ y \in \{-\infty,\ +\infty\} \ \wedge\ x \neq y), \end{cases}$$

$0 \cdot +\infty,\ 0 \cdot -\infty$ 皆無意義.

(3) 次序 :

(i) $x, y \in \mathbb{R}$ 時, 照原來次序;

(ii) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\infty < x < +\infty$.

$\overline{\mathbb{R}}$ 內之二元素 $+\infty,\ -\infty$ 分別稱爲**正無限大** (positive infinity) 及**負無限大** (negative infinity).

§ 0.6 微積分中函數之分類

設 $f\colon A \to B, n, m \in \mathbb{N}$.

(1) 若 $A, B \subset \mathbb{R}$, 則稱 f 爲**實值實變函數** (real-valued function of a real variable);

(2) 若 $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$, 則稱 f 爲**實值多變函數** (real-valued function of several (real) variables);

(3) 若 $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}^n$, 則稱 $\mathbf{f}$ 爲**向量函數** (vector function), (即參數方程式).

(4) 若 $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$, 則稱 $\mathbf{f}$ 爲**多變向量函數** (vector function of several (real) variables);

本課程中大部分篇幅討論實值實變函數之各種性質, 第九章至第十一章我們將討論向量函數及多變函數之性質, 限於授課時數, 本書不討論有關複數之函數.

§ 0.7 常用簡單函數與單調函數

(1) 常數函數 (constant function)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = c.$$

(2) 多項式函數 (polynomial function)

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

(3) 絕對值函數 (absolute value function)

$$|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|,$$

圖形大致如圖 0–9 所示.

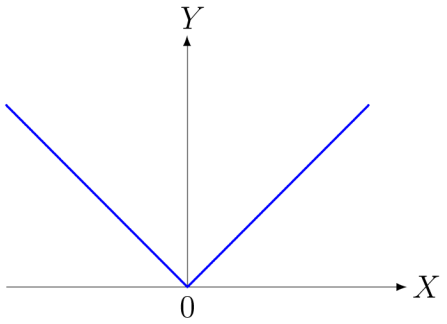


圖 0–9 : 絕對值函數

(4) 最大整數函數 (greatest integer function)

$$[\cdot]\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto [x] = \text{小於或等於 } x \text{ 之最大整數}.$$

圖形大致如圖 0–10 所示. $[\cdot]$ 又稱爲**高斯符號、括號函數**或**地板函數** (floor function), 提醒同學注意 : 有些學者將 $[x]$ 寫爲 $[\![x]\!]$ 或 $\lfloor x \rfloor$.

另有一種和最大整數函數相對偶之函數, 稱爲**天花板函數** (ceiling function), 其定義如下 :

$$\lceil\cdot\rceil\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lceil x \rceil = \text{大於或等於 } x \text{ 之最小整數}.$$

圖形大致如圖 0–11 所示. 顯然,

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & \text{若 } x \in \mathbb{Z}, \\ \lfloor x \rfloor + 1, & \text{否則.} \end{cases}$$

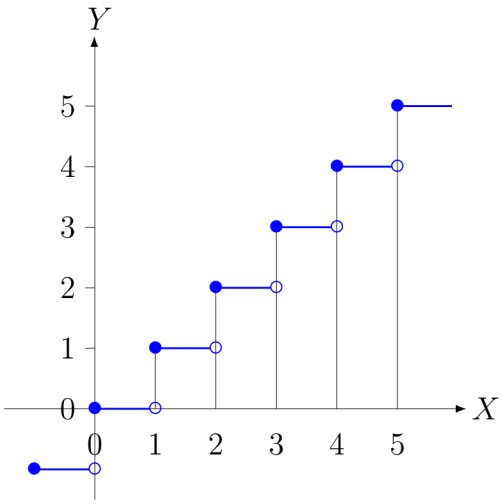


圖 0–10: 最大整數函數

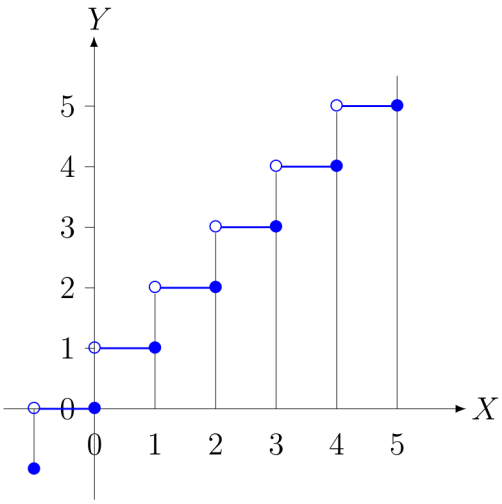


圖 0–11: 天花板函數

(5) 根號函數 (square-root function) $\sqrt{\cdot} : [0, +\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sqrt{x}$.

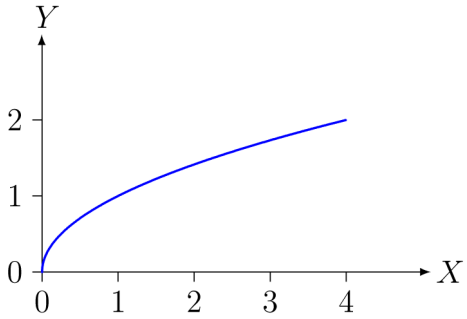


圖 0–12: 根號函數

(6) 若 $f\colon A(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

f 爲**遞增** (increasing) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2))$

f 爲**遞減** (decreasing) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2))$

f 爲**不減少** (non-decreasing) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \le f(x_2))$

f 爲**不增加** (non-increasing) $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x_1, x_2 \in A)(x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \ge f(x_2))$

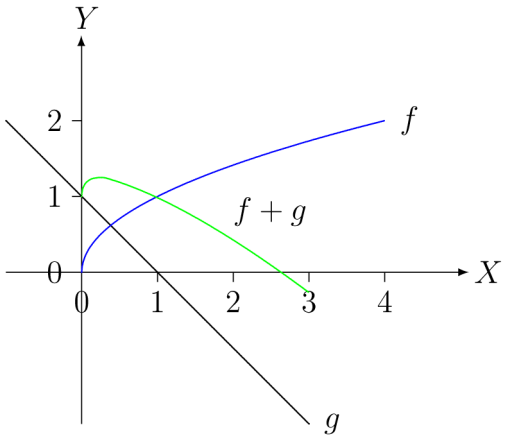
以上四類函數統稱爲**單調函數** (monotonic functions). 提醒讀者注意 : 有些學者將上述不減少及遞增分別稱爲遞增及嚴格遞增. 而將上述不增加及遞減分別稱爲遞減及嚴格遞減.

註： 最大整數函數 (高斯符號) 與天花板函數爲皆不減少函數, 而根號函數則爲遞增函數, 當然所有遞增函數皆爲不減少函數, 所有遞減函數皆爲不增加函數.

§ 0.8 函數之運算

函數之運算包括"加、減、乘、除以及合成"五者, 在微積分學中, 前四者必須爲實值函數[†], 但函數合成之前提則另有規定.

(1) 二函數之**和** (sum): $f+g\colon D_f\cap D_g\to\mathbb{R}:(f+g)(x)\underset{\text{def}}{=}f(x)+g(x)$.



以 $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=1-x$ 爲例.

圖 0–13： 函數之和

(2) 二函數之**差** (difference): $f-g\colon D_f\cap D_g\to\mathbb{R}:(f-g)(x)\underset{\text{def}}{=}f(x)-g(x)$.

(3) 二函數之**積** (product): $f\cdot g\colon D_f\cap D_g\to\mathbb{R}:(f\cdot g)(x)\underset{\text{def}}{=}f(x)\cdot g(x)$.

(4) 二函數之**商** (quotient): $f/g\colon D_f\cap D_g\setminus Z_g\to\mathbb{R}:(f/g)(x)\underset{\text{def}}{=}f(x)/g(x)$.
其中 $Z_g\underset{\text{def}}{=}\{x\in D_g\mid g(x)=0\}$, 我們稱其爲 g 之**零集** (zero set of g).

(5) 二函數之**合成** (composition)：若 $f\colon A\to B$, $g\colon B\to C$, 則函數

$$h\colon A\to C:h(x)=g(f(x))$$

稱爲 f 與 g 之**合成** (composite function of f and g), 並記爲 $g\circ f$.
參見圖 0–14.

† 在第九章時二向量函數亦可相加減.

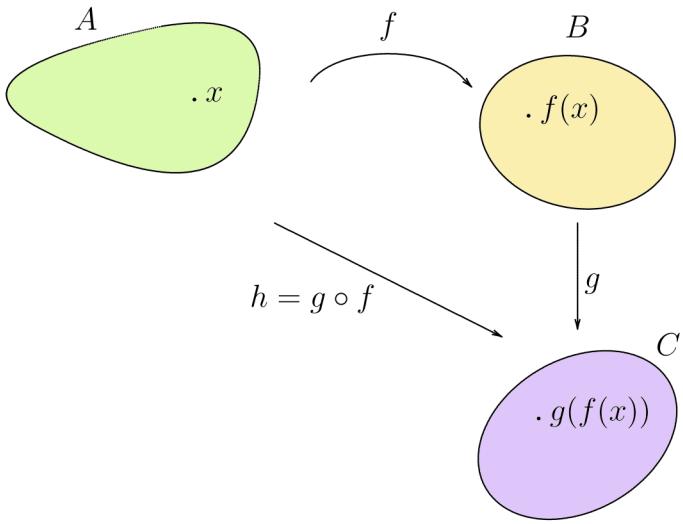


圖 0–14: 函數之合成

註: 上述合成函數之定義中, 先設定 f 之值域包含於 g 之定義域內, 即 $R_f \subset D_g$. 但若 f 之值域並不包含於 g 之定義域內, 而且二者之交集者非空, 則 f 與 g 之合成應界定爲

$$h\colon f^{-1}(R_f \cap D_g) \to C : h(x) = g(f(x)).$$

參見圖 0–15.

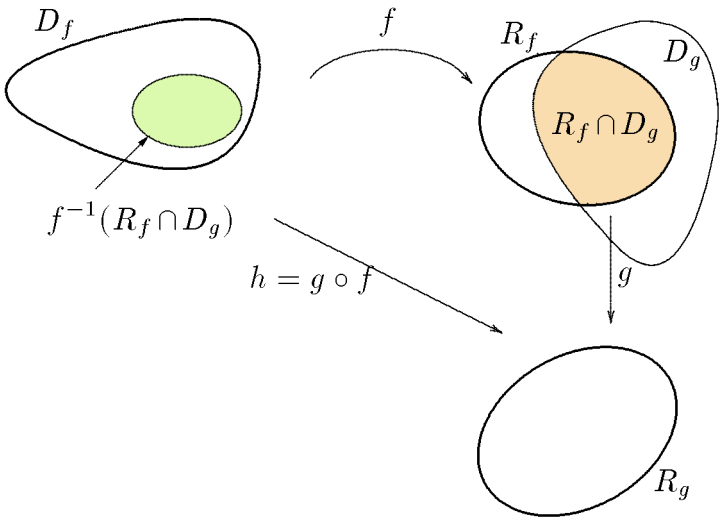


圖 0–15

例 1. 設 $f(x) = 1 - x^2,\ g(x) = \sqrt{x}$.

(a) 試求 $g \circ f$;

(b) 試求 $f \circ g$.

【解】(a) 由於 f 之值域 $(-\infty,1]$ 並不包含於 g 之定義域 $[0,+\infty)$ 之內, 故合成函數之定義域應爲

$$\begin{aligned} f^{-1}(R_f \cap D_g) &= f^{-1}((-\infty,1]\cap[0,+\infty)) = f^{-1}[0,1] \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid 1-x^2\in[0,1]\ \} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid 0\le 1-x^2\le 1\ \} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid -1\le -x^2\le 0\ \} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid 0\le x^2\le 1\ \} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid -1\le x\le 1\ \}. \end{aligned}$$

故合成函數爲

$$g\circ f\colon [-1,1]\to\mathbb{R} : (g\circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

(b) 有人以爲可以先求出

$$(f\circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = 1-(\sqrt{x})^2 = 1-x,$$

再判斷其定義域, 則得 $D_{f\circ g}=\mathbb{R}$; 但當 $x<0$ 時, $g(x)=\sqrt{x}\notin\mathbb{R}$, 是以 $(f\circ g)(x)=f(\sqrt{x})$ 並無意義, 此乃說明此種解法並不可靠. 正確之解法是: 由於

$\forall x\in D_g=[0,+\infty)$, $g(x)\in D_f=\mathbb{R}$, 是以

$$f\circ g\colon D_g(=[0,+\infty))\to\mathbb{R} : (f\circ g)(x) = f(\sqrt{x}) = 1-x. \qquad \square$$

(6) 二函數之**次序**: 設 f 與 g 爲二實值函數, 我們稱 $f<g$, 若其滿足以下二條件:

$$\text{(i) } D_f = D_g, \quad \text{(ii) } \forall x\in D_f, f(x)<g(x).$$

同理可界定 $f\le g$.

例 2. 設 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(x)=|x-1|$, $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R} : g(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{2}$, 試證: 函數 $f\le g$.

【解】利用算幾不等式: 如果 $a,\ b\ge 0$, 則 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$,

今以 $(x-1)^2$ 代 a, 以 1 代 b, 應有

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x^2-2x+2}{2} = \frac{x^2-2x+1+1}{2} \\ &= \frac{(x-1)^2+1}{2} \\ &\ge \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \\ &= f(x), \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

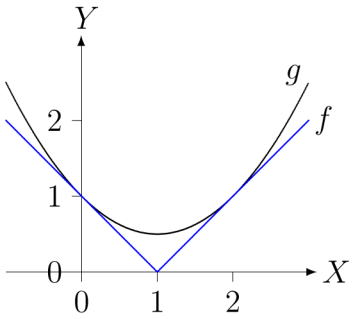


圖 0–16

如圖 0–16 所示. $\square$

本預篇使用之邏輯符號

- $\Rightarrow$: 蘊含 (imply)
- $\wedge$: 且 (and)
- $\vee$: 或 (or)
- $\forall$: 對於任一 (for each)
- $\exists$: 存在 (there exists)
- $\exists!$: 唯一存在 (there exists uniquely)
- $\Leftrightarrow$: 若且唯若 (if and only if)
- $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$: 界定爲 (to be defined as)
- $\underset{\text{def}}{=}$: 令之爲, 令之等於 (let $\cdots = \cdots$)

預　篇　習　題

0-1 寫出下列各專用名詞之定義:

(a) 函數; (b) 嵌射; (c) 蓋射;

(d) 有界集合; (e) 二函數之商; (f) 不減少函數.

0-2 試求下列各集合在 $\mathbb{R}$ 上之 sup 及 inf.

(a) $A = \left\{1 - \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

(b) $B = (0,1) \setminus \mathbb{Q}$;

(c) $C = D_f$, 內 $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{3+x}}$;

(d) $D = R_g$, 內 $g\colon (0,3) \to \mathbb{R} : g(x) = |(x-1)(x-2)|$.

0-3 試證上題中之集合 A 並無最大元素.

0-4 設 $B = \{x \in \mathbb{R} \mid ax^2 + bx + c < 0\}$. 試問 : a, b, c 應滿足什麼條件方使 $\sup B$ 及 $\inf B$ 均存在. 此時 $\sup B$, $\inf B$ 各爲何?

0-5 設 A, B 爲 $\mathbb{R}$ 之有上界子集, $C = \{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}$, 試證 : $\sup C = \sup A + \sup B$.

0-6 設 E 爲 $\mathbb{R}$ 之非空子集, 試證 :

$$a = \sup E \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \text{(i) } a \text{ 爲 } E \text{ 之一上界, 且} \\ \text{(ii) } \forall\, \epsilon > 0,\ \exists x \in E,\ \text{使得 } a - \epsilon < x. \end{cases}$$

0-7 設 A 與 B 爲 $\mathbb{R}$之二非空子集, 試證 : 若 $\forall a \in A$, $\forall b \in B, a \le b$, 則 $\sup A \le \inf B$.

0-8 設 $a < 0 < b$, 試證 : 若 $|x| < \min\{|a|, b\}$, 則 $a < x < b$.

0-9 設 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$, 則稱 f 爲 **偶函數** (even function); 若 $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$, 則稱 f 爲**奇函數** (odd function); 試證 : 任一由 $\mathbb{R}$映至 $\mathbb{R}$之函數皆可表爲一偶函數與一奇函數之和.

[提示] 考慮 $f(x) + f(-x)$ 與 $f(x) - f(-x)$.

0-10 一粒子在一直線上移動, 最初五秒它自固定點 (即原點) 以每秒二公尺之速度移動, 其後三秒它靜止不動, 之後它繼續依照最初移動方向以每秒三公尺前進, 第二十秒時停止. 試將該粒子之位置表爲時間 t 之函數. (即表爲 $f\colon A \to B : f(t) = \cdots$, 其中 A、B 及 $\cdots$ 皆需清楚表示).

0-11 設 $f(x) = x^2$, 試求函數 g 滿足以下二條件：(i) $g(x) = ax + b$, 其中 a, b 皆爲常數, (ii) $g(f(x)) = f(g(x)),\ \forall x \in \mathbb{R}$.

0-12 設 $A = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x(x-1)| < \frac{1}{4}\right\}$, 試將 A 表爲區間或區間之聯集, 並求 $\sup A$ 及 $\inf A$ (若其存在).

Chapter 1

極限與連續

預篇中我們曾提及微積分乃是研究函數之四則運算與極限之一門學問. 極限是微積分的基礎, 基礎不穩則所學之數學將成爲危樓, 隨時會因爲一個小小問題而使推理或計算產生矛盾與困擾.

在本章中, 我們的目標乃是以嚴格推理方式建構極限概念, 進而了解如何使用並駕馭極限. 主要方法則是先界定極限之定義, 並以之導得基本性定理, 再以定理或定義解決極限問題. 初學者或許感到些許困難, 一旦領悟其中之奧秘, 微積分之學習自會輕鬆愉快.

§ 1.1 何謂極限

十七世紀, 微積分剛發明時, 人類對於『極限』的觀念是模糊的, 人們可以求出許多函數在某點之極限, 如

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{2x-5}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-6}}=?$$

但沒有人能提出一個能令數學家接受, 有關『極限』的嚴格定義. 到了十九世紀, 法國數學家 Cauchy (1789-1857) 才給了極限一個較佳的說法, 今天極限的定義則是德國數學家 Weierstrass (1815-1897) 經過整理後的結果. 首先我們來看一例子, 設

$$f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}: f(x)=\frac{\sin x}{x},$$

我們考慮, 當 x 趨近於 0 時, $f(x)$ 之極限爲何 ? 顯然我們不可以將 0 代入 x 以求極限值, 因爲這樣會使分母爲 0. 首先, 我們利用電子計算機求出 x 與 $f(x)$ 之值如下:

x	f(x)
± 2	0.454649
± 1	0.841471
± 0.5	0.958851
± 0.1	0.998334
± 0.01	0.999983
± 0.001	0.999999

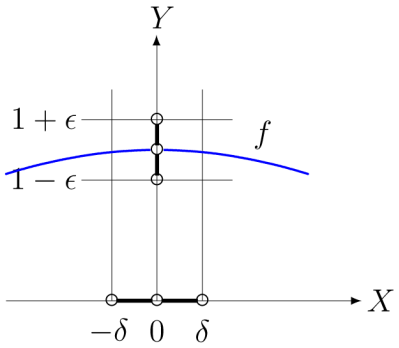


圖 1–1

(1) 何謂極限 ?

【解】當 x 趨近於 p 時, $f(x)$ 十分接近 l.

(2) 能否更清楚一點說明 $f(x)$ 十分接近 l ?

【解】如果我們將 $(l-\epsilon,\ l+\epsilon)$ 視爲一靶, $f(x)$ 趨近於 l 之意爲 : 不論靶之半徑多麼小, $f(x)$ 都會進入靶內, 換言之, $\forall\,\epsilon>0$, $f(x)\in(l-\epsilon, l+\epsilon)$, 即 $\forall\,\epsilon>0$, $|f(x)-l|<\epsilon$.

(3) 裡面的 x 有何限制 ? $\forall\, x\in D_f$? 還是 $\exists x\in D_f$?

【解】都不是, 若是 $\forall\, x\in D_f$, 則 $f(x)$ 必爲一常數函數. 若是 $\exists x\in D_f$, 則太不合理, 這樣會使函數 $f(x)=x$ 在 0 之極限可爲任意數.

(4) 到底是哪些 x ?

【解】凡是很靠近 p 的每一個 x; 換言之, x 應滿足 $0<|x-p|<\delta$, 即 $\forall\, x\in N_\delta^*(p)$. (去心鄰近觀念稍後說明).

(5) δ 是什麼 ? 任意正數 ?

【解】不! 任意正數又回到 $\forall\, x\in D_f$. 只要有一個 $\delta>0$ 就可以了. 意即 :

$$\exists\ \delta>0,\ (\forall\, x)(x\in N_\delta^*(p)\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\epsilon).$$

(6) 最後的結論以邏輯符號來描述應爲:

$$\forall\,\epsilon>0,\exists\,\delta>0,\ (\forall\, x)(x\in N_\delta^*(p)\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\epsilon).$$

§ 1.2 準備工作

當我們討論極限 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = l$ 之前, 我們第一步工作是討論 D_f 是否爲一區間 ? p 是否爲 D_f 內之一點 ? 由上一節之範例中,

$$f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : f(x) = \frac{\sin x}{x},$$

$D_f = \mathbb{R}^*$ 並非一區間, 而 x 所趨近之點 0 並不屬於 f 之定義域. 這是否意味點 p 與 D_f 完全無關呢 ? 當然這也不行, 如果有人問

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{1-x^2} = ?$$

我們發現函數之定義域爲 $[-1, 1]$, 其內之 x 不可能趨近於 2, 此一極限毫無意義, 因此 p 必須是定義域中 的 x『能夠趨近』之點, 這是討論極限的先決條件, 以下是一些準備工作, 初學者或許會感到有點繁瑣, 但是省了它, 許多觀念便不易討論.

定義 1.1

設 $p \in \mathbb{R}, \epsilon > 0$, 則集合

$$N_\epsilon(p) \underset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, |x-p| < \epsilon\} = (p-\epsilon,\, p+\epsilon)$$

稱爲 p 之 ϵ **鄰近** (ϵ-neighborhood). 而集合 $N_\epsilon^*(p) \underset{\text{def}}{=} N_\epsilon(p) \setminus \{p\}$ 稱爲 p 之 ϵ **去心鄰近** (deleted ϵ-neighborhood) . (參見圖 1–2).

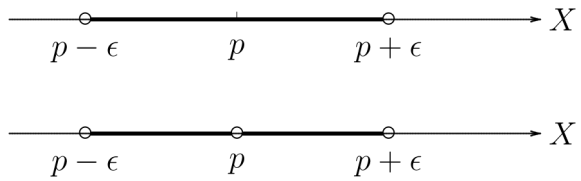


圖 1–2

註： 提醒讀者：

- $x \in N_\epsilon(p) \;\Leftrightarrow\; |x-p| < \epsilon$;
- $x \in N_\epsilon^*(p) \;\Leftrightarrow\; 0 < |x-p| < \epsilon$.

定義 1.2

設 $A \subset \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, 我們稱 p 爲 A 之**一聚點** (accumulation point), 如果

$$\forall\, \epsilon > 0,\ N_\epsilon^*(p) \cap A \neq \varnothing.$$

我們以 A' 表 A 之所有聚點集合, 稱爲 A 之**導來集** (derived set). 又集合 A 中不爲聚點之點, 均稱爲 A 之**孤立點** (isolated point)

簡單說：p 爲集合 A 之聚點, 如果 A 中有 (無數) 點十分靠近 p, 以致 p 與 $A \setminus \{p\}$ 內各點之距離之最小值(應該是 inf) 爲 0.

例 1. 設 $A = (0,1)$, 試求其導來集 A'.

【解】 1° 若 $p \in A$, 顯然 p 爲 A 之一聚點;

2° 若 $p = 0$, 則

$$\begin{aligned} \forall\, \epsilon > 0 \ &\Rightarrow\ N_\epsilon^*(p) = (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon) \\ &\Rightarrow\ N_\epsilon^*(p) \cap A = (0,\epsilon) \cap (0,1) = \big(0, \min\{\epsilon, 1\}\big) \neq \varnothing \\ &\Rightarrow\ p \in A'. \end{aligned}$$

同理, $1 \in A'$.

3° 若 $p > 1$, 取 $\epsilon = p - 1 > 0$, 顯然

$$N_\epsilon^*(p) \cap A = \big[(1,p) \cup (p, 2p-1)\big] \cap (0,1) = \varnothing$$

是以 p 不爲 A 之一聚點. 若 $p < 0$, 同理知 p 不爲 A 之一聚點.

綜合以上三點知 A 之導來集爲 $A' = [0,1]$. □

例 2. 設 $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}$, 試證 $A' = \{0\}$ 且 A 中之元素皆爲 A 之孤立點.

【解】 1° 設 $p = \dfrac{1}{n}$, $n > 1$, 由於 $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, 若取 $\epsilon = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, 則

$$N_\epsilon^*(p) \cap A = \left[\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \bigcup \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] \cap A = \varnothing.$$

故 p 不爲 A 之聚點.

2° 若 $p = 1$, 只需取 $\epsilon = \dfrac{1}{2}$, 亦可證明 p 不爲 A 之聚點.

3° 若 $p = 0$, 對於 $\epsilon > 0$, 令自然數 $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$, 則

$$\frac{1}{n_0} \in (-\epsilon, \epsilon) \cap A,$$

知 p 爲 A 之聚點.

4° 其餘之點顯然非 A 之聚點. □

例 3. 設 $A=\mathbb{Q}$, 則 $A'=\mathbb{R}$, (讀者自證之).

定義 1.3

設 $A\subset\mathbb{R}$, $p\in\mathbb{R}$, 我們稱 p 爲 A 之一**內點** (interior point), 如果

$$\text{存在 } \delta>0 \text{ 使得 } N_\delta(p)\subset A.$$

我們以 $\overset{\circ}{A}$ 表A 之所有內點所成之集合, 稱爲 A 之**內部** (interior).

例 4. 設 $A=[0,1]$, 則 $\overset{\circ}{A}=(0,1)$.

例 5. 設 $A=[0,1]\setminus\mathbb{Q}$, 則 $\overset{\circ}{A}=\varnothing$.

§ 1.3 極限之定義

有了有關『聚點』之概念, 以下我們介紹 Cauchy-Weierstrass 極限之定義.

定義 1.4

設函數 $f\colon D_f\to\mathbb{R}$, $p\in(D_f)'$, 我們稱 f 在點 p 之**極限** (limit) 爲 l, 並表爲 $\lim\limits_{x\to p}f(x)=l$ *, 如果

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ (\forall\,x)\big(x\in N_\delta^*(p)\cap D_f\ \Rightarrow\ f(x)\in N_\epsilon(l)\big),$$

亦即

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ (\forall\,x\in D_f)\big(0<|x-p|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-l|<\epsilon\big).$$

如何由給定之正數 ϵ, 找到合用之 δ 是利用定義以推導極限之不二法門. 由圖 1–3 讀者可能誤以爲區間 $(l-\epsilon,l+\epsilon)$ 之 f 像原就是區間 $(p-\delta,p+\delta)$. 不錯, 這是解題思考的方向, 但未必如此, 以下我們將舉一些範例以說明如何找到 δ.

---

* 定理 1.5 我們將證明極限之唯一性, 故吾人可用"等號"來表示極限值. 今後我們稱 f 在點 p 之極限存在, 如果存在 $l\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x\to p}f(x)=l$.

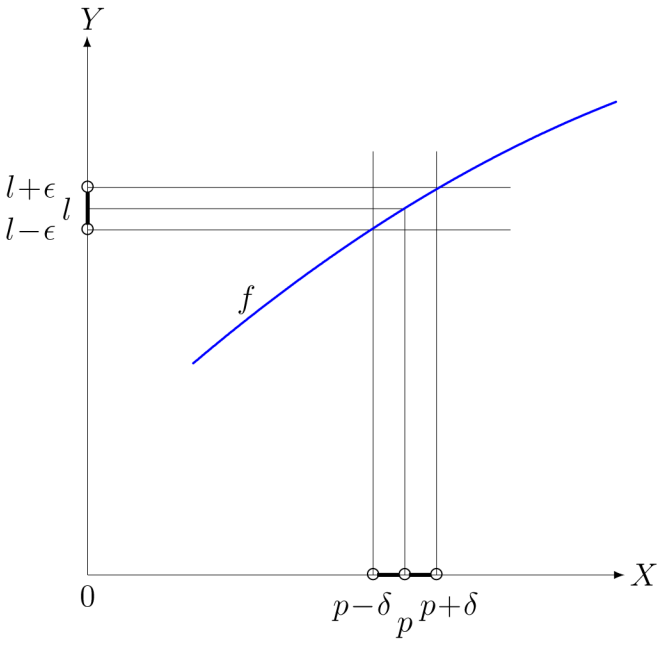


圖 1–3

例 1. 設常數函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=c$, 試利用 ϵ-δ 方法證明 $\lim\limits_{x\to p} f(x)=c$, 其中 p 爲任一實數.

【證】往證 :

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\delta>0,(\forall\,x\in\mathbb{R})\big(0<|x-p|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-c|<\epsilon\big).$$

由於 $|f(x)-c|<\epsilon$ 爲一恆眞陳述, 故任何正數 δ 皆使上述表式爲眞. □

註 : 或許有人覺得本例十分簡單, 可以加以省略, 但稍後許多定理及範例皆需用到, 故特別予以介紹. 此外, 讀者亦應注意 : 本例之 δ 可爲任意正數, 而在以後各例及習題中皆非如此, δ 常與 ϵ 有關.

例 2. 試利用 ϵ-δ 方法以求 $\lim\limits_{x\to 2} x=?$

【解】令 $f(x)=x$, 由觀察猜測極限可能爲 2 (參閱圖 1–4), 故往證 :

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\delta>0,(\forall\,x\in D_f)\big(0<|x-2|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-2|<\epsilon\big).$$

對於 $\epsilon>0$, 由

$$\begin{aligned}|f(x)-2|<\epsilon\ &\Leftrightarrow\ |x-2|<\epsilon\\ &\Leftarrow\ 0<|x-2|<\delta,\quad (\text{令 }\delta=\epsilon)\end{aligned}$$

知 $\lim\limits_{x\to 2} x=2$.

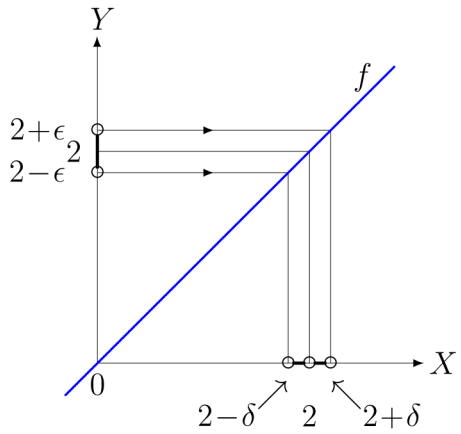


圖 1–4

由給定之正數 ϵ, 以逆推方法以求 δ, 通常有平行法及分解法二種, 我們將在下例中予以介紹.

例 3. 試利用 ϵ-δ 方法以求 $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = ?$

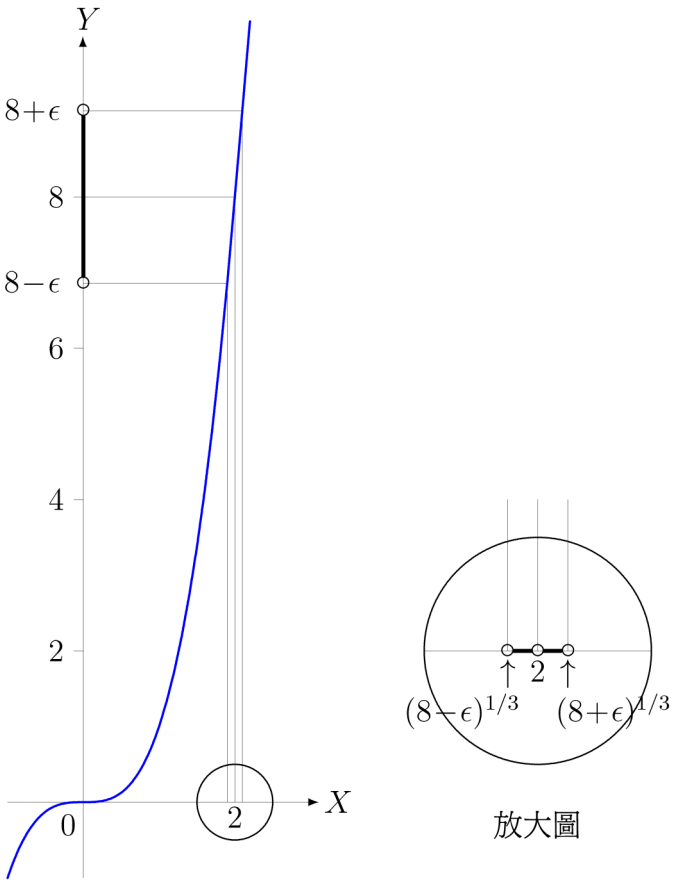


圖 1–5

【解】令 $f(x) = x^3$, 往證:

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, (\forall\, x \in D_f)\big(0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - 8| < \epsilon\big).$$

法一：平行法 (或像原法, 參見圖 1–5).

$$\begin{aligned}
|x^3-8|<\epsilon &\Leftrightarrow -\epsilon < x^3-8 < \epsilon \\
&\Leftrightarrow 8-\epsilon < x^3 < 8+\epsilon \\
&\Leftrightarrow (8-\epsilon)^{1/3} < x < (8+\epsilon)^{1/3} \\
&\Leftrightarrow (8-\epsilon)^{1/3}-2 < x-2 < (8+\epsilon)^{1/3}-2 \\
&\Leftarrow |x-2| < \min\{|(8-\epsilon)^{1/3}-2|, (8+\epsilon)^{1/3}-2\}, \text{ (習題 0-8)} \\
&\Leftarrow 0<|x-2|<\delta, \\
&\qquad \text{(令 } \delta = \min\{|(8-\epsilon)^{1/3}-2|,\ (8+\epsilon)^{1/3}-2\}. \text{)}
\end{aligned}$$

法二：分解法.

$$\begin{aligned}
|x^3-8|<\epsilon &\Leftrightarrow |(x-2)(x^2+2x+4)|<\epsilon \\
&\Leftarrow |x-2|<\epsilon/19 \ \wedge\ |x^2+2x+4|<19 \\
&\Leftarrow |x-2|<\epsilon/19 \ \wedge\ |x-2|<1, \quad [\star] \\
&\Leftarrow |x-2|<\min\{\epsilon/19, 1\} \\
&\Leftarrow 0<|x-2|<\delta, \text{ (令 } \delta=\min\{\epsilon/19,1\} \text{)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\star] \qquad |x-2|<1 &\Leftrightarrow 1<x<3 \\
&\Rightarrow (1<x^2<9\,,\quad 2<2x<6) \\
&\Rightarrow 7<x^2+2x+4<19. \qquad \square
\end{aligned}$$

例 4. 設 $f(x)=x^{1/n}$, 試利用 ϵ-δ 方法證明：$\lim\limits_{x\to p} f(x)=p^{1/n}$, 其中 $p\in D_f,\ n\in\mathbb{N}$.

【解】若 n 爲奇數, 則 $D_f=\mathbb{R}$; 若 n 爲偶數, 則 $D_f=[0,+\infty)$, 又當 n 爲偶數時, $p=0$ 及 $p>0$ 二情況之證明略有不同, 因此本題之證明應分以下三種情況：

(i) n 爲偶數且 $p>0$;

(ii) n 爲偶數且 $p=0$;

(iii) n 爲奇數 (不必分 $p=0$ 及 $p\neq 0$).

我們只證 (i), 其餘二者讀者可仿之自證.

1° 若 $0<\epsilon<p^{1/n}$,

$$\begin{aligned}
|x^{1/n}-p^{1/n}|<\epsilon &\Leftarrow p^{1/n}-\epsilon < x^{1/n} < p^{1/n}+\epsilon \\
&\Leftarrow (p^{1/n}-\epsilon)^n < x < (p^{1/n}+\epsilon)^n, \text{ (參閱圖 1–6)} \\
&\Leftarrow (p^{1/n}-\epsilon)^n - p < x-p < (p^{1/n}+\epsilon)^n - p \\
&\Leftarrow |x-p| < \min\{|(p^{1/n}-\epsilon)^n-p|, (p^{1/n}+\epsilon)^n-p\} \\
&\Leftarrow 0<|x-p|<\delta, \\
&\qquad \text{(令 } \delta=\min\{|(p^{1/n}-\epsilon)^n-p|, (p^{1/n}+\epsilon)^n-p\} \text{).}
\end{aligned}$$

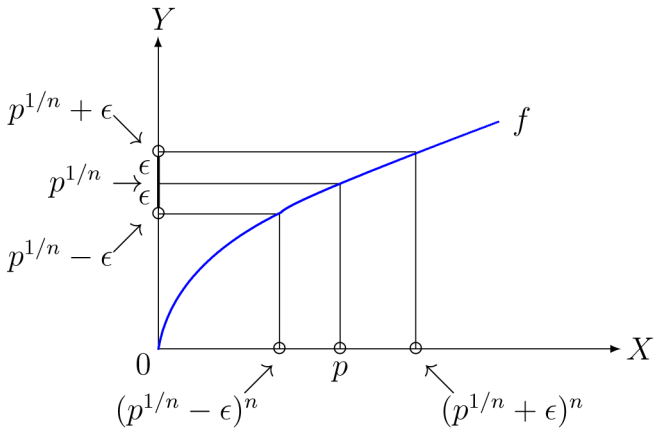


圖 1–6

2° 若 $\epsilon \geq p^{1/n}$, 只需取 $\epsilon_0 = \dfrac{p^{1/n}}{2}$ 所對應之 δ_0 即可. 因爲由 1° 知,

$$0 < |x-p| < \delta_0 \;\Rightarrow\; |x^{1/n} - p^{1/n}| < \epsilon_0 = \frac{p^{1/n}}{2} < \epsilon. \qquad \square$$

註：1. 上述證明中, 若不分爲 1° 及 2°, 當 $\epsilon > p^{1/n}$ 時, 1° 之第四個逆推 " $\Leftarrow$ " 不眞, 反例：設 $n=2,\ p=1,\ \epsilon=4$, 則 $(p^{1/n}-\epsilon)^n - p = (1-4)^2 - 1 = 8$ 不爲負.

2. 有些人質疑 $\sqrt{x}$ 在點 0 只有右極限, 而無左極限, 因此極限不存在, 其實, 在定義極限之時, 我們已明白規定, 變數 x 所趨近之點 p 不必爲定義域之內點, 只需爲定義域之『聚點』即可, 因此, $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$ 完全符合定義.

§ 1.4 常用之極限定理

上節中我們舉了一些範例, 發現利用極限定義 ϵ-δ 方法, 以求極限是件十分辛苦的事, 解決之道是先證明一些定理, 然後再以之解決極限之問題. 以下各定理, 如無特別聲明, p 必須爲『結論中』之函數的定義域之一聚點.

定理 1.5 (極限之唯一性)

> 若一函數在某一點之極限存在, 則其必爲唯一.

【證】假設 f 於點 p 有二相異極限 l_1 及 l_2, 設 $l_1 < l_2$. 次令 $\epsilon = \frac{1}{2}(l_2 - l_1)$, 因 l_1 爲 f 在點 p 之極限, 故存在 $\delta_1 > 0$, 使得

$$\forall\, x \in N^*_{\delta_1}(p) \;\Rightarrow\; |f(x) - l_1| < \epsilon \;\Rightarrow\; f(x) < l_1 + \epsilon. \qquad ①$$

又因 l_2 爲 f 在點 p 之極限, 故存在 $\delta_2 > 0$, 使得

$$\forall\, x \in N^*_{\delta_2}(p) \;\Rightarrow\; |f(x) - l_2| < \epsilon \;\Rightarrow\; l_2 - \epsilon < f(x). \qquad ②$$

由 ① 及 ②,

$$x \in N^*_{\delta_1}(p) \cap N^*_{\delta_2}(p) \;\Rightarrow\; \Big(l_2 - \epsilon < f(x) \text{ 且 } f(x) < l_1 + \epsilon\Big)$$
$$\Rightarrow\; l_2 - l_1 < 2\epsilon = l_2 - l_1.$$

顯然矛盾. □

例 1. 試求 $\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}) = ?$

【解】答案是『不存在 !』, 許多人利用高中時所學, 認爲

$$\lim_{x\to 1}(\sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}) = \lim_{x\to 1}\sqrt{1-x} + \lim_{x\to 1}\sqrt{x-1} = 0,$$

其實本題極限不存在的理由十分簡單, 令 $f(x) = \sqrt{1-x}+\sqrt{x-1}$, 顯然 $D_f = \{1\}$, D_f 中並無聚點, 不可能有點『趨近於』點 1. □

我們舉出這個特例的目的是希望同學了解 : "二函數之和 (在某點) 之極限爲各極限之和"是在某些條件下才成立. 以下各定理之敍述看來似乎太囉嗦, 其實少了它, 定理往往變成『不眞』, 這對於一向以嚴格自居的數學是一大傷害.

定理 1.6 (函數和之極限定理)

> 設 f 與 g 爲二函數, 點 p 爲 $D_f \cap D_g$ 之一聚點, $\lim\limits_{x\to p} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to p} g(x) = b$, 則 $\lim\limits_{x\to p}(f+g)(x) = a+b$.

【證】$\forall\, \epsilon > 0$, $\forall\, x \in D_f \cap D_g$, 由於

$$|f(x)+g(x)-(a+b)| < \epsilon \;\Leftarrow\; |f(x)-a| + |g(x)-b| < \epsilon$$
$$\Leftarrow\; |f(x)-a| < \epsilon/2 \;\wedge\; |g(x)-b| < \epsilon/2$$
$$\Leftarrow\; 0 < |x-p| < \delta_1 \;\wedge\; 0 < |x-p| < \delta_2,$$
$$[\because \lim_{x\to p} f(x) = a,\ \lim_{x\to p} g(x) = b,\ (\text{註})]$$
$$\Leftarrow\; 0 < |x-p| < \delta,\ (\text{令 } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\})$$

(註) $\epsilon > 0$, 對於正數 $\epsilon/2$, 由於 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = a$, 故存在 $\delta_1 > 0$ 使得

$$\forall x \in D_f, 0 < |x-p| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |f(x)-a| < \epsilon/2.$$ □

我們的目的是希望能證明 (在適當條件下) 二函數之和、差、積、商之極限, 爲各函數極限之和、差、積、商, 上面我們已經證明了『和』的情形,『差』的證明大致相同, 但也可利用『和』與『積』來解決, 至於『積』與『商』之定理證明, 遠比『和』的情況爲麻煩, 如果我們稍爲繞個彎 (採取迂迴戰術), 證明起來會容易一些.

定義 1.7

設 f 爲一函數，我們稱 f 爲**有界** (bounded)，如果 f 之值域爲有界．其次，設點 $p \in D_f \cup (D_f)'$. 我們稱 f 在點 p 爲**局部有界** (locally bounded), 如果存在點 p 之一鄰近 $N(p)$ 使得 $f(D_f \cap N(p))$ 爲有界.

局部有界觀念一如字面上之意義, 函數 f 在點 p 之『局部』(即於點 p 之某一鄰近) 爲一有界函數. 顯然一有界函數於任意點 $p \in D_f \cup (D_f)'$ 必爲局部有界, 但其逆不眞, 反例如下：

例 2. 函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x$ 之值域爲 $\mathbb{R}$, 故不爲一有界函數. 但 f 在任意點 p 顯然皆爲局部有界.

例 3. 函數 $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在任意點 $p \neq 0$ 皆爲局部有界, 但在點 0 則不爲局部有界. 此外 f 之值域爲 $\mathbb{R}^*$, 故知 f 亦不爲一有界函數.

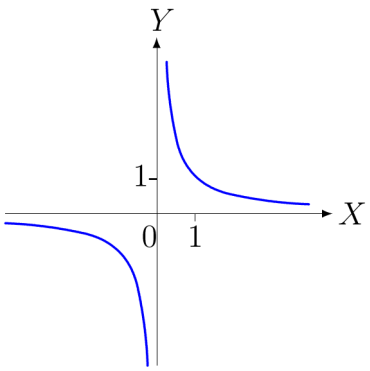


圖 1–7

定理 1.8 (**趨零定理**)

設 f 與 g 爲二函數, 點 p 爲 $D_f \cap D_g$ 之一聚點. f 在點 p 爲局部有界且 $\lim\limits_{x\to p} g(x) = 0$, 則 $\lim\limits_{x\to p}(fg)(x) = 0$.

【證】 1° 因 f 在點 p 爲局部有界, 故存在 $\delta_1 > 0,\ M > 0$ 使得

$$\forall\, x \in D_f \cap N^*_{\delta_1}(p) \ \Rightarrow\ |f(x)| < M.$$

2° 因 $\lim\limits_{x\to p} g(x) = 0$, 故對於 $\epsilon/M > 0$, 必存在 $\delta_2 > 0$ 使得

$$\forall\, x \in D_g \cap N^*_{\delta_2}(p) \ \Rightarrow\ |g(x)| < \epsilon/M.$$

3° 取 $N^*_\delta(p) = N^*_{\delta_1}(p) \cap N^*_{\delta_2}(p)$, 則有

$$\begin{aligned}
\forall\, x \in D_f \cap D_g \cap N^*_\delta(p) \ &\Rightarrow\ \begin{cases} x \in D_f \cap N^*_{\delta_1}(p) \text{ 且} \\ x \in D_g \cap N^*_{\delta_2}(p) \end{cases} \\
&\Rightarrow\ \begin{cases} |f(x)| < M \text{ 且} \\ |g(x)| < \dfrac{\epsilon}{M} \end{cases} \\
&\Rightarrow\ |f(x)g(x)| < \epsilon.
\end{aligned}$$

此即證得 $\lim\limits_{x\to p}(fg)(x)=0$. □

定理 1.9 （函數積之極限定理）

設 f 與 g 爲二函數, 點 p 爲 $D_f\cap D_g$ 之一聚點. $\lim\limits_{x\to p}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to p}g(x)=b$, 則 $\lim\limits_{x\to p}(fg)(x)=ab$.

【證】1° 先證：f 與 g 在點 p 皆爲局部有界. 設 $\epsilon=1$, 因 $\lim\limits_{x\to p}f(x)=a$, 是以存在 $\delta>0$ 使得

$$\begin{aligned}\forall\, x\in D_f\cap N_\delta^*(p) \;&\Rightarrow\; |f(x)-a|<\epsilon=1\\ &\Rightarrow\; a-1<f(x)<a+1,\end{aligned}$$

故知 $f(D_f\cap N_\delta(p))$ 爲有界. g 在點 p 之局部有界性同理.

2° 利用函數和之極限定理：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p}f(x)g(x)&=\lim_{x\to p}\Big[(f(x)-a)(g(x)-b)+a(g(x)-b)+b(f(x)-a)+ab\Big]\\ &=\lim_{x\to p}(f(x)-a)(g(x)-b)+\lim_{x\to p}a(g(x)-b)\\ &\qquad\qquad+\lim_{x\to p}b(f(x)-a)+ab\\ &=0+0+0+ab=ab,\quad{}^{[\star]}\end{aligned}$$

[⋆] 因 $\lim\limits_{x\to p}(f(x)-a)=0$, 而由 1° 知函數 $g-b$ 在點 p 爲局部有界, 故

$$\lim_{x\to p}(f(x)-a)(g(x)-b)=0;$$

第二、三項同理. □

定理 1.10 （線性性質）

設 f 與 g 爲二函數, 點 p 爲 $D_f\cap D_g$ 之一聚點, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. 若 $\lim\limits_{x\to p}f(x)$, $\lim\limits_{x\to p}g(x)$ 皆存在, 則

$$\lim_{x\to p}(\alpha f(x)+\beta g(x))=\alpha\lim_{x\to p}f(x)+\beta\lim_{x\to p}g(x).$$

【證】利用定理 1.6 及 1.9 立即可得. □

定理 1.11 [**保號定理 (sign-preserving theorem)**]

設 $\lim_{x\to p} f(x) = l \neq 0$,

(1) 若 $l > 0$, 則存在點 p 之一去心鄰近 $N^*(p)$ 使得

$$\forall\, x \in N^*(p) \cap D_f \;\Rightarrow\; f(x) > \frac{l}{2}.$$

(2) 若 $l < 0$, 則存在點 p 之一去心鄰近 $N^*(p)$ 使得

$$\forall\, x \in N^*(p) \cap D_f \;\Rightarrow\; f(x) < \frac{l}{2}.$$

【證】(1) (參閱圖 1–8), 設 $\epsilon = \dfrac{l}{2}$, 因 $\lim_{x\to p} f(x) = l$, 是以存在 $\delta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \forall\, x \in D_f \cap N_\delta^*(p) \;&\Rightarrow\; |f(x) - l| < \epsilon \\ &\Rightarrow\; l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon \\ &\Rightarrow\; \frac{l}{2} < f(x). \end{aligned}$$

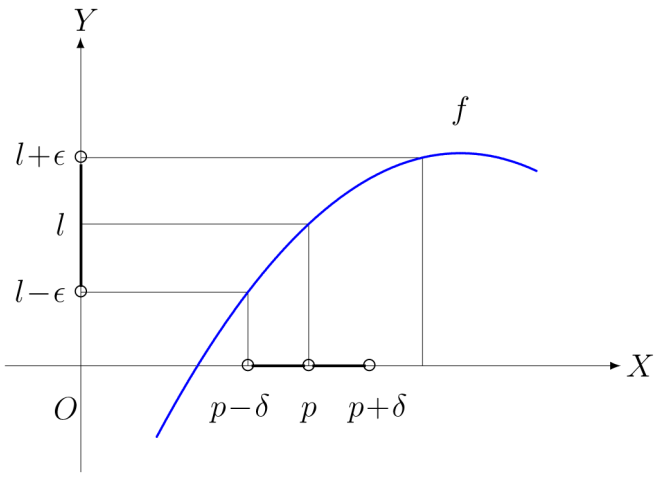


圖 1–8

(2) 仿 (1), 令 $\epsilon = \dfrac{|l|}{2} = -\dfrac{l}{2}$ 即可證得. □

本定理之所以稱爲『保號』定理乃是由於其結論可知：若極限值 l 爲正時, 則靠近 p 之點 x 之函數值 $f(x)$ 皆爲正, 二者同號, 如圖 1–8 所示. l 爲負時亦同理.

定理 1.12 (函數商之極限定理)

設 f 與 g 爲二函數, 點 p 爲 $D_f \cap D_g \setminus Z_g$ 之一聚點. 若 $\lim_{x\to p} f(x) = a$, $\lim_{x\to p} g(x) = b \neq 0$, 則 $\lim_{x\to p} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

【證】只需證明：$\lim\limits_{x\to p}\dfrac{1}{g(x)}=\dfrac{1}{b}$, 再利用定理 1.9, 本定理即可得證. 今往證：

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\,x\in N_\delta^*(p)\cap D_g\setminus Z_g\ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{b}\right|<\epsilon.$$

1° 因 $\lim\limits_{x\to p}g(x)=b\neq 0$, 由保號定理知存在 $\delta'>0$ 使得

$$\begin{aligned}\forall\,x\in N_{\delta'}^*(p)\cap D_g\ &\Rightarrow\ |g(x)|>\frac{|b|}{2}\\ &\Rightarrow\ \left|\frac{1}{g(x)}\right|<\frac{2}{|b|}.\end{aligned}$$

2° 任予一正數 ϵ, 由於 $\forall\,x\in D_g\setminus Z_g$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{b}\right|<\epsilon\ &\Leftarrow\ \left|\frac{b-g(x)}{bg(x)}\right|<\epsilon\\ &\Leftarrow\ \left|\frac{1}{g(x)}\right|<\frac{2}{|b|}\ \wedge\ |g(x)-b|<\frac{1}{2}b^2\epsilon\\ &\Leftarrow\ 0<|x-p|<\delta'\ \wedge\ 0<|x-p|<\delta'',\ (\text{由 }1^\circ\text{ 及原設})\\ &\Leftarrow\ 0<|x-p|<\min\{\delta',\delta''\}.\end{aligned}$$

若取 $\delta=\min\{\delta',\delta''\}$ 即可. □

定理 1.13 [**保序定理 (order-preserving theorem)**]

設

(1) $\lim\limits_{x\to p}f(x)$, $\lim\limits_{x\to p}g(x)$ 皆存在;

(2) 存在 $\delta>0$ 使得 $\forall\,x\in N_\delta^*(p)\cap D,\ f(x)\le g(x)$, (內 $D=D_f\cap D_g$).

則 $\lim\limits_{x\to p}f(x)\le\lim\limits_{x\to p}g(x)$.

【證】利用間接證法：假定 $\lim\limits_{x\to p}f(x)>\lim\limits_{x\to p}g(x)$, 則由保號定理知, $\exists\,\delta'>0$ 使得

$$\forall\,x\in N_{\delta'}^*(p)\cap D\ \Rightarrow\ f(x)-g(x)>0,\qquad [*]$$

令 $\delta_0=\min\{\delta,\delta'\}$, 則

$$\begin{aligned}\forall\,x\in N_{\delta_0}^*(p)\cap D\ &\Rightarrow\ \begin{cases}x\in N_\delta^*(p)\cap D\ \text{且}\\ x\in N_{\delta'}^*(p)\cap D\end{cases}\\ &\Rightarrow\ \begin{cases}f(x)\le g(x)\ \text{且}\\ f(x)>g(x),\quad (\because\ [*]).\end{cases}\end{aligned}$$

顯然矛盾. □

註： 如果事前已知極限 $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to p} g(x)$ 皆存在時, 本定理之結論方爲有效. 例如 :

$$f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : f(x) = \sin\frac{1}{x}\ ,$$

則以下之推論是錯誤的 :

$$(\forall\, x \in D_f,\ f(x) \le 1)\ \Rightarrow\ (\ \lim_{x\to 0} f(x) \le \lim_{x\to 0} 1 = 1\ ).$$

稍後我們將證明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 並不存在, (參見例 6 及圖 1–12.)

定理 1.14 [**三明治原理或夾擠定理 (sandwich principle)**]

設

(1) $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{x\to p} h(x) = l$,

(2) 點 p 爲 D_g 之一聚點,

(3) 存在 p 之一去心鄰近 $N_\delta^*(p)$ 使得 $\forall\, x \in N_\delta^*(p) \cap D_g, f(x) \le g(x) \le h(x)$,

則 $\lim\limits_{x\to p} g(x) = l$.

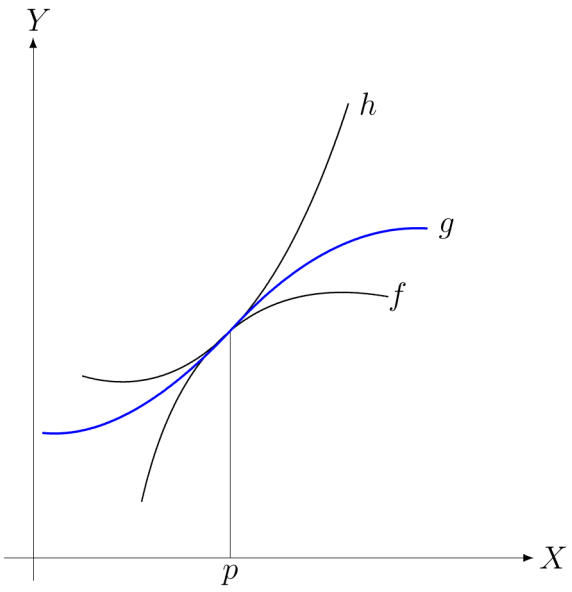


圖 1–9

【證】對於 $\epsilon > 0$,

1° 因 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = l$, 知存在 $\delta' > 0$ 使得

$$\forall\, x \in D_f \cap N_{\delta'}^*(p)\ \Rightarrow\ l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon. \qquad ①$$

2° 因 $\lim\limits_{x\to p} h(x)=l$, 知存在 $\delta''>0$ 使得

$$\forall\, x\in D_h\cap N^*_{\delta''}(p)\ \Rightarrow\ l-\epsilon<h(x)<l+\epsilon. \qquad ②$$

3° 令 $\delta_0=\min\{\delta,\delta',\delta''\}$, 則由 ①, ② 兩式及原設,

$$\forall\, x\in D_g\cap N^*_{\delta_0}(p)\ \Rightarrow\ \begin{cases} x\in D_f\cap N^*_{\delta'}(p)\ \Rightarrow\ l-\epsilon<f(x)<l+\epsilon,\\ x\in D_h\cap N^*_{\delta''}(p)\ \Rightarrow\ l-\epsilon<h(x)<l+\epsilon,\\ x\in D_g\cap N^*_{\delta}(p)\ \Rightarrow\ f(x)<g(x)<h(x),\end{cases}$$
$$\Rightarrow\ l-\epsilon<g(x)<l+\epsilon.$$

是以證得 $\lim\limits_{x\to p} g(x)=l$. □

例 4. 試求極限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\right]x^2=?$ 其中 $[\,\cdot\,]$ 爲最大整數函數.

【解】由於

$$\forall\, t\in\mathbb{R},\ t-1<[t]\le t\ \Rightarrow\ \forall\, x\in\mathbb{R}^*,\ \frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x},\quad (\text{令 } t=1/x\,)$$
$$\Rightarrow\ \forall\, x\in\mathbb{R}^*,\ \left(\frac{1}{x}-1\right)x^2<\left[\frac{1}{x}\right]x^2\le\frac{1}{x}\cdot x^2$$

而 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-1\right)x^2=0=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot x^2$, 是以 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\right]x^2=0$. □

系 1.15 (極限之局部性)

> 設
> (1) $\lim\limits_{x\to p} f(x)=l$,
> (2) 點 p 爲 D_g 之一聚點,
> (3) 存在 p 之一去心鄰近 $N^*_\delta(p)$ 使得 $\forall\, x\in N^*_\delta(p)\cap D_g,\ f(x)=g(x)$,
> 則 $\lim\limits_{x\to p} g(x)=l$.

【證】三明治原理中令 $f=h$ 即得本定理. □

例 5. 試求極限 $\lim\limits_{x\to 3/2}[x]=?$ 其中 $[\,\cdot\,]$ 乃最大整數函數.

【解】令

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon f(x)=1,$$
$$g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon g(x)=[x];$$

則當 $x\in(1,2)=N_{1/2}(\frac{3}{2})$, $[x]=1=f(x)$, 已知 $\lim\limits_{x\to 3/2} f(x)=1$, 是以 $\lim\limits_{x\to 3/2}[x]=1$. □

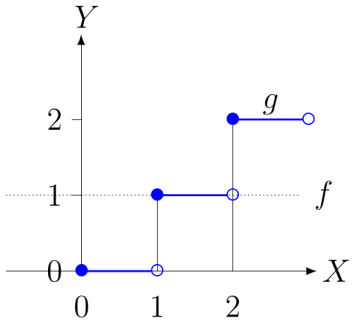


圖 1–10

定理 1.16 （制限之極限）

設 $\lim\limits_{x\to p} f(x)=l$, 若 p 爲 A 之一聚點且 $A\subset D_f$, 則 $\lim\limits_{x\to p} f|_A(x)=l$.

註： 設函數 $f\colon D_f\to B$, A 爲 D_f 之非空子集, 則函數 $g\colon A\to B : g(x)=f(x)$, 稱爲 f 在 A 上之**制限** (restriction), 並寫爲 $f|_A$. (參見圖 1–11).

【證】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p} f(x)=l &\Rightarrow \forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in N_\delta^*(p)\cap D_f \Rightarrow |f(x)-l|<\epsilon\\ &\Rightarrow \forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in N_\delta^*(p)\cap A \Rightarrow \left|f|_A(x)-l\right|<\epsilon\\ &\Rightarrow \lim_{x\to p} f|_A(x)=l.\end{aligned}$$

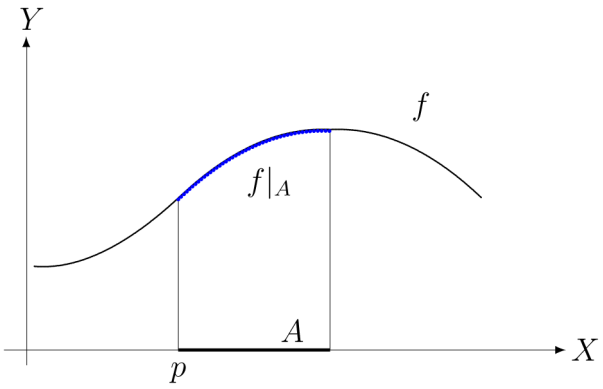


圖 1–11

註： 本定理之主要用途: 用以證明極限不存在. 對於一函數 f, 若存在 D_f 之二子集 A 與 B 且 $p\in A'\cap B'$, 使得

$$\lim_{x\to p} f|_A(x)\neq\lim_{x\to p} f|_B(x),$$

則由本定理知 $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ 不存在.

例 6. 試求 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}=?$

【解】設

$$f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R} : f(x)=\sin\frac{1}{x},\quad (\text{參見圖 1–12})$$

$$A=\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}\,\middle|\, k\in\mathbb{Z}_+\right\}, B=\left\{\frac{1}{k\pi}\,\middle|\, k\in\mathbb{N}\right\},$$

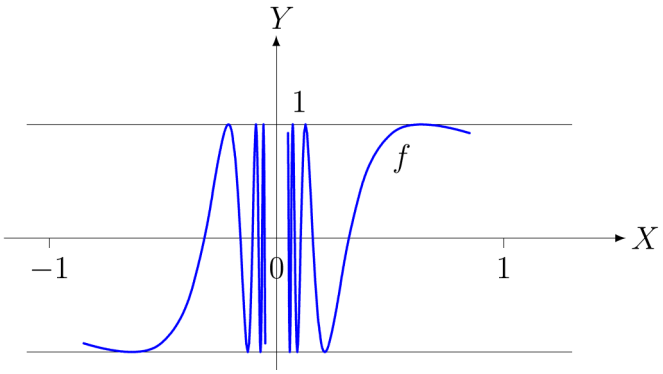


圖 1–12

則

- $\forall x \in A \Rightarrow \dfrac{1}{x} \in \left\{ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}_+ \right\} \Rightarrow \sin\dfrac{1}{x} = 1;$
- $\forall x \in B \Rightarrow \dfrac{1}{x} \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\} \Rightarrow \sin\dfrac{1}{x} = 0;$
- $0 \in A'$ 且 $0 \in B'$;

故

$$\lim_{x\to 0} f|_A(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1; \quad \lim_{x\to 0} f|_B(x) = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$

二者不等, 是以 f 在點 0 之極限不存在. □

註： 證明一極限不存在時, 我們常使用上述方法, 讀者是否發現集合 A 與 B 皆非區間, 如果在界定極限時, 我們規定: (i) 定義域須爲一區間且 (ii)『被趨近之點』p 必須爲定義域內之一點, 則本例之解法完全不能使用, 這也是我們界定極限時, 僅要求 p 爲定義域之一聚點的原因.

定義 1.17

設 $A = \{x \in D_f \mid x > p\}$, 若 $\lim\limits_{x\to p} f|_A(x)$ 存在, 則稱其爲 f 在點 p 之**右極限** (right-hand limit) 並記爲 $\lim\limits_{x\to p^+} f(x)$ 或 $f(p^+)$. 同理可界定**左極限**.

讀者在高中時已學過『極限存在之充要條件爲左右極限存在且相等』, 這還不夠用, 我們以下介紹一個功能更強的定理, 它不僅僅考慮從左右兩方分別趨近目的點 p .

定理 1.18

設 f 爲一函數, 若集合 A 與 B 爲 D_f 之子集, $A \cup B = D_f$, $p \in A' \cap B'$, 則 $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ 存在之充要條件爲

$$\lim_{x\to p} f|_A(x) \text{ 與 } \lim_{x\to p} f|_B(x)$$

均存在且相等. 此時, 上述三極限皆相等.

【證】1° 若 $\lim\limits_{x\to p} f|_A(x) \neq \lim\limits_{x\to p} f|_B(x)$ 或此二極限之一不存在, 我們已知 $\lim\limits_{x\to p} f(x)$ 不存在.

2° 若 $\lim\limits_{x\to p} f|_A(x) = \lim\limits_{x\to p} f|_B(x) = l$, 則由 極限之定義知存在二正數 δ', δ'' 使得

$$\begin{cases} \forall\, x \in A \cap N^*_{\delta'}(p) \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \epsilon, \\ \forall\, x \in B \cap N^*_{\delta''}(p) \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \epsilon, \end{cases}$$

令 $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, 顯然,

$$\forall\, x \in D_f \cap N^*_{\delta}(p) \;\Rightarrow\; |f(x) - l| < \epsilon.$$

故知 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = l$. □

例 7. 設

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \in \mathbb{Q}, \\ x^4, & \text{若 } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

試求極限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ?$

【解】**法一** : 利用定理 1.18.

令 $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R} \setminus A$, 則因

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} f|_A(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0, \\ \lim\limits_{x\to 0} f|_B(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^4 = 0, \end{cases}$$

是以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

法二 : 利用三明治原理.

因 $\forall\, x \in (-1, 1)$, $0 \le f(x) \le x^2$, 而 $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, 故知 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. □

§ 1.5 連續性

在正式下定義之前, 我們先檢討一下, 關於『連續性』有那些連想 :

(1) 連續的概念表面上十分簡易 —— 不要斷掉便是連續.

(2) 數學不能以模糊概念爲研究之基礎, 而必須以嚴格文字描述爲定義, 配合邏輯推演以達發現新結果爲目的, 對『連續』之概念也不例外.

(3) 『連續』基本上可用『極限』來界定, 但必須考慮特別情況 : 如果函數 f 之定義域只有一點 $\{p\}$ (或點 p 爲 D_f 之孤立點), 此時不能以極限來討論, f 在點 p 算連續嗎 ? 當我們發現 f 在點 p 並沒有不連續時, 我們又如何將這種情形『納入』連續之定義內 ?

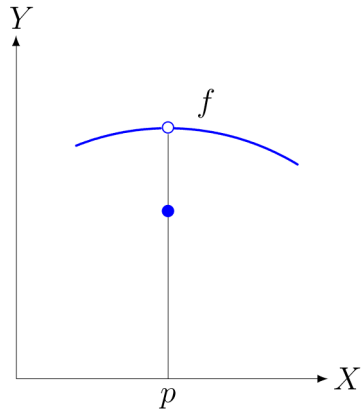


圖 1–13： 在點 p 極限存在但不連續

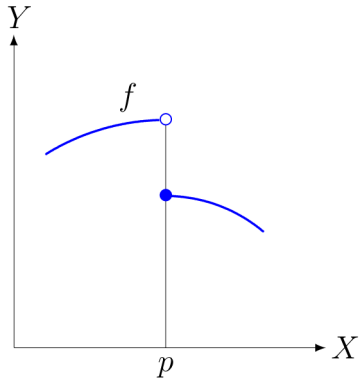


圖 1–14： 在點 p 極限不存在且不連續

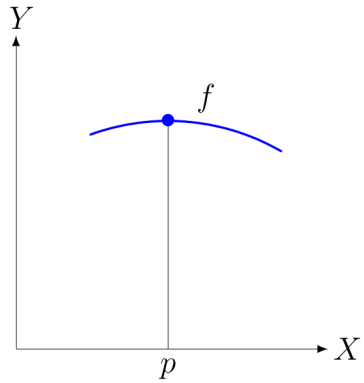


圖 1–15： 在點 p 極限存在且爲連續

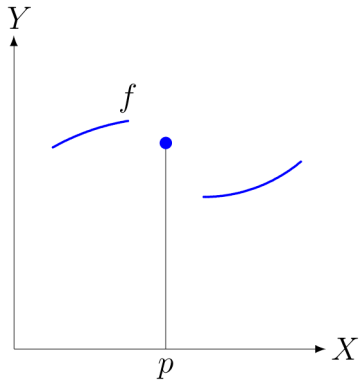


圖 1–16： 在點 p 無極限可言但爲連續

定義 1.19

設 $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $p \in D_f$, 若

$$p \in (D_f)' \ \Rightarrow\ \lim_{x\to p} f(x) = f(p),$$

則稱 f 於點 p 爲**連續** (continuous at p).

爲了方便連續性之討論, 我們將先證明以下三陳述爲對等, 今後遇有連續問題, 我們可利用此三陳述之一 .

I. $p \in (D_f)' \ \Rightarrow\ \lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

II. $\begin{cases} p \notin (D_f)', \text{ or} \\ p \in (D_f)', \ \lim_{x\to p} f(x) = f(p). \end{cases}$

III. $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (\forall\, x \in D_f)(|x-p| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(p)| < \epsilon)$.

【證】其中 “ I $\Rightarrow$ II ” 係利用邏輯上：命題 $(P \Rightarrow Q)$ 與命題 $((P \wedge Q) \vee (\neg P))$ 爲邏輯對等. 而 “ II $\Rightarrow$ III ” 顯然爲眞. 至於 “ III $\Rightarrow$ I ” 則是因爲

$$\begin{aligned} A \Rightarrow (B \Rightarrow C) &\equiv \neg A \vee (B \Rightarrow C) \\ &\equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) \\ &\equiv \neg A \vee \neg B \vee C \\ &\equiv \neg(A \wedge B) \vee C \\ &\equiv (A \wedge B) \Rightarrow C. \end{aligned}$$

我們視陳述 III 爲 A, 視陳述 “ $p \in (D_f)'$ ” 爲 B, 視陳述 “$\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$” 爲 C, 則由極限之定義知 “ III $\Rightarrow$ I ” 顯然爲眞. □

上述陳述 III 在稍後之定理證明中會用到, 但一般解題使用機會不多.

我們稱 f 爲一**連續函數**, 如果 $\forall p \in D_f, f$ 在點 p 爲連續. 若 f 在點 p 不爲連續, 則稱 p 爲 f 之**斷點** (discontinuous point). 此外我們稱 f 在 p 爲**右連續** (right-continuous), 如果 $f|_A$ 在點 p 爲連續, 其中 $A = D_f \cap [p, +\infty)$, 左連續可同理界定之. 此外, 我們稱 f 在集合 A 上爲**連續**, 如果 $\forall p \in A \subset D_f, f$ 在點 p 爲連續.

例 1. 試問：函數 $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{1}{x}$ 是否爲一連續函數?

【解】觀察圖 1–17, f 似乎並非連續, 若以定義來判斷, $\forall p \in \mathbb{R}^*$, 顯然

$$\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} \frac{1}{x} = \frac{1}{p} = f(p),$$

是以知 f 爲一連續函數. □

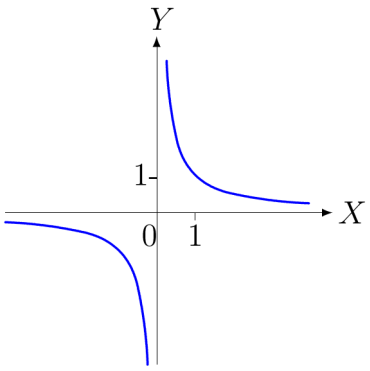


圖 1–17

例 2. 試證：函數 $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = x^{1/n}$ 爲一連續函數, 內 $n \in \mathbb{N}$.

【解】在第三節之例 4, 我們已證明 $\lim_{x\to p} x^{1/n} = p^{1/n}$. 是以知 f 爲一連續函數.

提醒讀者：當 $n = 2$ 時, f 乃根號函數 $\sqrt{\ }$. □

例 3. 試證 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(x)=|x|$ 爲一連續函數.

【解】我們將利用 ϵ-δ 方法證明 : $\lim\limits_{x\to p}|x|=|p|$.

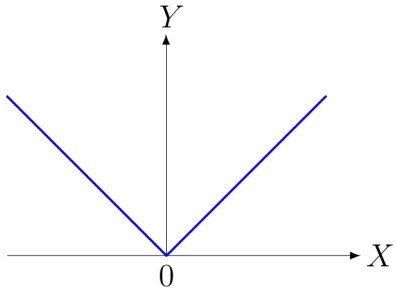


圖 1–18

1° 若 $p>0$, 只需考慮 $0<\epsilon<p$, 則因

$$\begin{aligned}\big||x|-|p|\big|<\epsilon &\Leftarrow |x-p|<\epsilon\\ &\Leftarrow 0<|x-p|<\epsilon\\ &\Leftarrow 0<|x-p|<\delta,\ (\text{令 }\delta=\epsilon).\end{aligned}$$

故知 $\lim\limits_{x\to p}|x|=|p|$.

2° 若 $p<0$, 同理.

3° 若 $p=0$, 對於 $\epsilon>0$, 因

$$\begin{aligned}\big||x|-|0|\big|<\epsilon &\Leftrightarrow |x-0|<\epsilon\\ &\Leftarrow 0<|x-0|<\delta,\ (\text{令 }\delta=\epsilon).\end{aligned}$$

故知 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=|0|$. □

例 4. 函數 $\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : \operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1, & \text{若 } x<0,\\ 0, & \text{若 } x=0,\\ 1, & \text{若 } x>0,\end{cases}$

稱爲**正負號函數** (signum function), 試討論 sgn 之連續性.

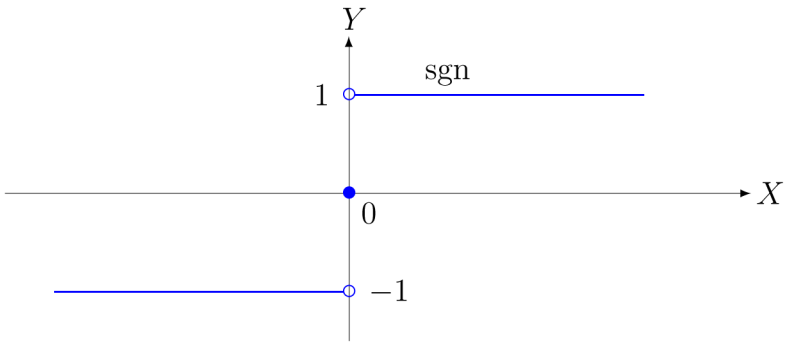


圖 1–19

【解】函數 sgn 在 $(-\infty,0)$ 上之制限 $\operatorname{sgn}|_{(-\infty,0)}$ 乃爲常數函數 -1, 故知 sgn 在區間 $(-\infty,0)$ 上爲連續. 同理, sgn 在區間 $(0,+\infty)$ 上亦爲連續. 但 sgn 在點 0 不爲連續, 因爲

$$\lim_{x\to 0^-}\operatorname{sgn}(x)=-1,\ \lim_{x\to 0^+}\operatorname{sgn}(x)=1.$$ □

定理 1.20 （四則運算之定理）

> 若函數 f, g 連續於點 p, 則其和、差、積、商 † 於點 p 皆爲連續.

【證】若 p 爲 $D_f \cap D_g$ 之一孤立點, 則 f 與 g 之和、差、積顯然皆連續於點 p. 若 p 爲 $D_f \cap D_g$ 之一聚點, 則利用極限之和、差、積之定理亦可證得其爲連續. 商之情形, 讀者自證之. □

定理 1.21 （合成之定理）

> 設
>
> (i) $f\colon A \to B$ 且 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = b$,
>
> (ii) $g\colon B \to C$ 連續於點 b,
>
> 其中 A, B, C 皆爲 $\mathbb{R}$ 之子集. 則 $\lim\limits_{x\to p} g(f(x)) = g(b) = g(\lim\limits_{x\to p} f(x))$.

【證】任予一正數 ϵ, 由於 g 於點 b 爲連續, 故存在一 $\eta > 0$ 使得

$$\forall\, y \in B \cap N_\eta(b) \;\Rightarrow\; |g(y) - g(b)| < \epsilon, \tag{1}$$

由於 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = b$, 故對於 η 而言, 應有一 $\delta > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \forall\, x \in A \cap N_\delta^*(p) \;&\Rightarrow\; |f(x) - b| < \eta \\ &\Rightarrow\; f(x) \in B \cap N_\eta(b) \\ &\Rightarrow\; |g(f(x)) - g(b)| < \epsilon, \ \text{(由(1) 式)} \end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{x\to p} g(f(x)) = g(b)$. □

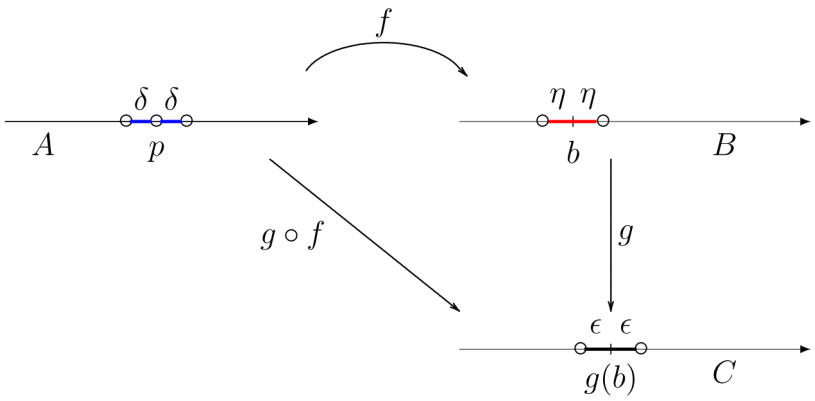


圖 1–20

† 商之情況須加條件：分母 g 在點 p 之值不爲 0, 即 $g(p) \neq 0$.

註： 本定理在說明：若 g 連續於點 b 且 b 爲 f 在點 p 之極限, 則極限 $\lim\limits_{x\to p} g(f(x))$ 可由 lim 與 g 對調而得. 絕對值函數 $|\cdot|$, 根號函數 $\sqrt{\ }$ 以及第三章之三角函數、指數函數、對數函數、雙曲函數等皆爲連續函數, 因此本定理之用途很廣, 某些函數如 $[x]$ 雖於整數點上不爲連續, 但本定理並不要求函數必須在每一點皆爲連續, 僅要求 g 連續在點 $b\,(=\lim\limits_{x\to p} f(x))$, 若 g 在點 b 不爲連續, 則需另行設法.

例 5. 試求極限 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x^3+2x+4}{x^2+5}}=?\quad \lim\limits_{x\to 2}\left[\dfrac{x^3+2x+4}{x^2+5}\right]=?$

【解】1° 利用根號函數爲連續之性質,

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+4}{x^2+5}}=\sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x+4}{x^2+5}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}.$$

2° 雖然括號函數不爲一連續函數, 但其於非整數點爲連續, 故

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^3+2x+4}{x^2+5}\right]=\left[\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x+4}{x^2+5}\right]=\left[\frac{16}{9}\right]=1. \qquad \square$$

例 6. 試求極限 $\lim\limits_{x\to 1}[2+2x-x^2]=?$ (內 $[\cdot]$ 爲最大整數函數).

【解】由於 $\lim\limits_{x\to 1}(2+2x-x^2)=3$, 而最大整數函數 $[\cdot]$ 於整數點不爲連續, 因此不可利用定理 1.21. 令 $x=1+h$, 其中 $0<|h|<1$, 則

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}[2+2x-x^2]&=\lim_{h\to 0}[2+2+2h-1-2h-h^2]\\&=\lim_{h\to 0}[3-h^2]=2.\end{aligned}$$

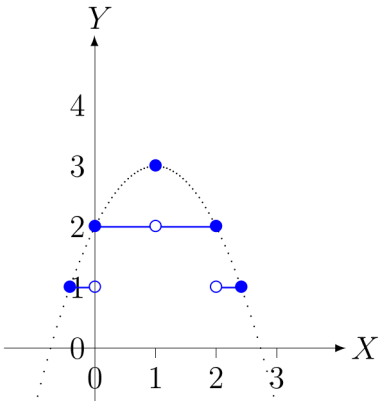


圖 1–21

如果冒然使用定理 1.21, 則得以下錯誤之結果：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}[2+2x-x^2]&=[\lim_{x\to 1}(2+2x-x^2)]\\&=[3]=3.\end{aligned} \qquad \square$$

定理 1.22

> 設 $f\colon A\to B$ 於點 p 爲連續, 且 $g\colon B\to C$ 於點 $f(p)$ 爲連續, 則 $g\circ f$ 於點 p 亦爲連續.

【證】若點 $p\notin A'$, 顯然 $g\circ f$ 於點 p 爲連續. 若點 $p\in A'$, 利用定理 1.21,

$$\lim_{x\to p} g(f(x))=g(\lim_{x\to p} f(x))=g(f(p)).$$

是以 $g\circ f$ 於點 p 爲連續. $\square$

例 7. 試問：$f(x)=[x]+\sqrt{10-[x]}$ 於哪些點不爲連續?

【解】1° 先求 f 之定義域.

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in\mathbb{R} \mid [x]+\sqrt{10-[x]} \text{ 有意義}\} \\ &= \{x\in\mathbb{R} \mid 10-[x]\geq 0\} = \{x\in\mathbb{R} \mid x<11\} \\ &= (-\infty, 11). \end{aligned}$$

2° f 於 D_f 上之非整數點顯然皆爲連續.

若 $p\in D_f\cap\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f \text{ 於點 } p \text{ 爲連續} &\Leftrightarrow \lim_{x\to p^-} f(x)=\lim_{x\to p^+} f(x)=f(p) \\ &\Leftrightarrow p-1+\sqrt{11-p}=p+\sqrt{10-p} \\ &\Leftrightarrow 1-2\sqrt{11-p}+11-p=10-p \\ &\Leftrightarrow p=10. \end{aligned}$$

意即：f 僅於 $p\in\{n\in\mathbb{Z}\mid n<10\}$ 不爲連續. □

定理 1.23 （ **Bolzano**† 戡根定理 ）

> 設 $f\colon D_f\to\mathbb{R}$, 於區間 I 上爲連續, $[x_1,x_2]\subset I$, $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, 則存在 $p\in(x_1,x_2)$ 使得 $f(p)=0$.

【證】只證 $f(x_1)<0<f(x_2)$ 之情況. 設

$$S=\{x\in[x_1,x_2]\mid f(x)<0\},$$

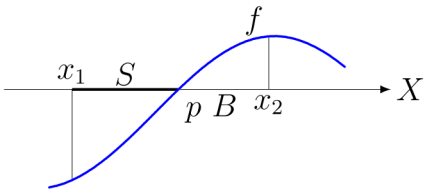


圖 1–22

則因 S 爲上方有界, 故其最小上界 $\sup S$ 存在, 令 $p=\sup S$. 次令 $B=(p,x_2]$, 則因 $f|_B$ 爲連續且 $f|_B(x)\geq 0$, 故

$$f(p)=\lim_{x\to p} f|_B(x)\geq 0,$$

其次 $p\in S'$, (若 $p\notin S'$ 則 $\exists\,\delta>0$ 使得 $(p-\delta,\,p)\cap S=\varnothing$, 是以 $p\neq\sup S$.) 且因 $f|_S(x)<0$, 是故

$$f(p)=\lim_{x\to p} f|_S(x)\leq 0.$$

是以 $f(p)=0$. □

† Bolzano (1781-1848) 爲天主教神父, 生於捷克布拉格.

定理 1.24 [**介值定理 (intermediate-value theorem)**]

> 設 $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, 於區間 I 上爲連續, 其次 $[x_1, x_2] \subset I$, $f(x_1) < c < f(x_2)$ 或 $f(x_2) < c < f(x_1)$, 則存在 $p \in (x_1, x_2)$ 使得 $f(p) = c$.

【證】設

$$g\colon [x_1, x_2] \to \mathbb{R} : g(x) = f(x) - c,$$

(參閱圖 1–23), 則 $g(x_1)\cdot g(x_2) < 0$, 由 Bolzano 定理知, 存在 $p \in (x_1, x_2)$ 使得 $g(p) = 0$, 是以 $f(p) = c$.

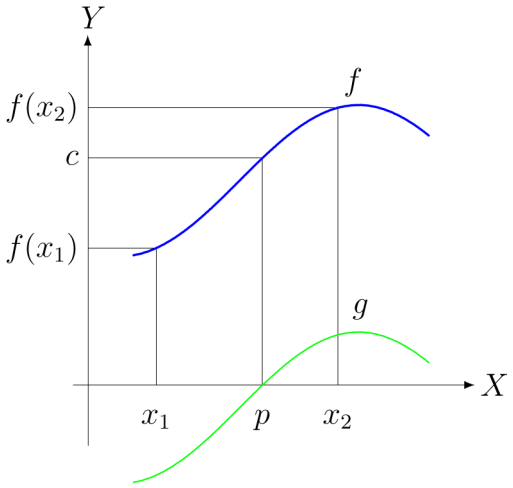


圖 1–23 □

定理 1.25 (區間保持性)

> 設 $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, 於區間 I 上爲連續, 則其像 $f(I)$ 亦爲一區間.

【證】如果我們考慮區間之定義, 則應爲 : "若 $y_1 < y_2$ 爲 J 之二元素, 則當 $y_1 < c < y_2$ 時, 恆有 $c \in J$, 則稱 J 爲一 (實數) **區間** (interval)."

利用介值定理顯然知 $f(I)$ 爲一區間. □

本定理之主要用途 : 可用以求一連續函數之值域, 下一節中我們將舉一例. 此外, 在第三章中我們將多次使用到這個定理. 以下將討論有關連續性與極值有關之理論.

定義 1.26

設函數 $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $p,\ q \in D_f$;

(1) 若 $\forall\, x \in D_f,\ f(x) \le f(p)$, 則稱 f 於點 p 有**最大值**或**絕對極大值** (absolute maximum).

(2) 若 $\forall\, x \in D_f,\ f(q) \le f(x)$, 則稱 f 於點 q 有**最小值**或**絕對極小值** (absolute minimum).

(3) 不論絕對極大值或絕對極小值, 我們統稱之爲**絕對極值** (absolute extremum).

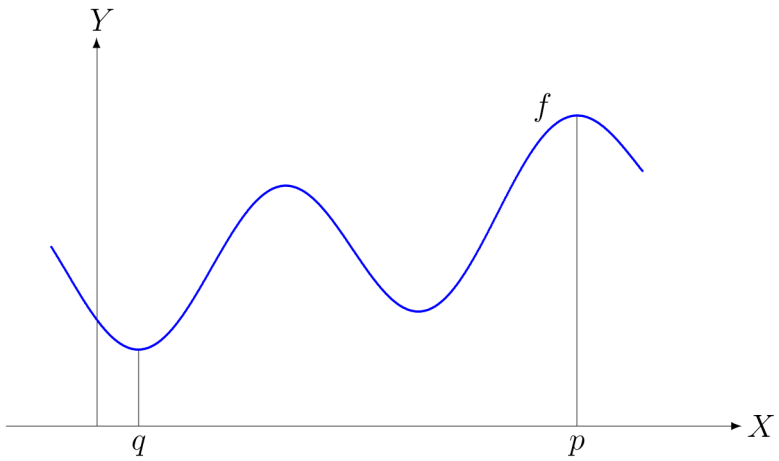


圖 1–24： 絕對極大值與絕對極小值

定理 1.27

若 f 於緊緻區間[‡] $I = [a,\, b]$ 上爲連續, 則 f 於 I 上爲有界.

【證】利用矛盾證法： 假設 f 於 I 上不爲有界.

1° 令 $c = (a+b)/2$, 則 f 必於 $[a, c]$ 上或 $[c, b]$ 上爲 無界. 令

$$I_1 = [a_1, b_1] = \begin{cases} [a, c], & \text{若 } f \text{ 在 } [a, c] \text{ 上爲無界}, \\ [c, b], & \text{若 } f \text{ 在 } [a, c] \text{ 上爲有界}, \end{cases}$$

對於區間 I_1 亦作如上之分法. 如此繼續下去, 而得 $I_n = [a_n, b_n]$ 爲 $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ 中二個平分閉區間之一, 而使得 f 於 I_n 上爲無界. 顯然

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

‡ 所謂**緊緻區間** (compact interval) 係指 $\mathbb{R}$ 之有界閉區間, 如 $I = [a,\, b]$.

2° 令 $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, 由 於 $a \le a_n \le b,\ \forall n \in \mathbb{N}$, 是以 $p = \sup A$ 存在且

(i) 由最小上界之定義知 $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \le p$;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N},\ p \le b_n$, 此因

$$\forall j,\, m \in \mathbb{N},\ j < m \ \Rightarrow\ a_j \le a_m < b_m \le b_j,$$

是以知 $\forall n \in \mathbb{N}$, b_n 皆爲 A 之一上界.

(iii) 因 f 爲連續於點 p, 故知 f 於點 p 爲局部有界, (參見趨零定理 1.9 之證), 是以存在 $\delta > 0$ 使得 $f(N_\delta(p) \cap I)$ 爲有界.

3° 對於上述 δ,

$$\begin{aligned}
\delta > 0 \ \Rightarrow\ & \exists n \in \mathbb{N} \ \text{使得}\ \delta > \frac{b-a}{2^n} \\
\Rightarrow\ & p - \delta < a_n \le p \le b_n < p + \delta,\ (\because\ 2^\circ\ \text{(i), (ii)}) \\
\Rightarrow\ & I_n \subset N_\delta(p) \cap I,\ (\because I_n \subset I) \\
\Rightarrow\ & f(I_n)\ \text{爲有界},\ (\because\ 2^\circ\ \text{(iii)})
\end{aligned}$$

此與 1° 之結果顯然相矛盾, 故定理得證. □

定理 1.28 [**極值定理 (Extreme Value Theorem)**]

> 若 f 於緊緻區間 $I = [a, b]$ 上爲連續, 則必有最大值及最小值, 即其像 $f(I)$ 亦爲一緊緻區間.

【證】由定理 1.27 知 f 於區間 I 上爲有界, 故 $f(I)$ 之最小上界及最大下界必存在. 令 $m = \inf f(I),\ M = \sup f(I)$.

1° 茲利用矛盾證法證明存在 $c \in I$ 使得 $f(c) = M$: 假定

$$\text{“ } I \text{ 中沒有任何點 } x \text{ 使得 } f(x) = M \text{ ”}, \qquad (*)$$

令 $g(x) = M - f(x)$, 則

$$\begin{aligned}
(*)\ \Rightarrow\ & g(x) > 0,\ \forall x \in I \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{g}\ \text{在 } I \text{ 上爲連續} \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{g}\ \text{在 } I \text{ 上爲有界, (由上一定理)} \\
\Rightarrow\ & \exists k > 0,\ \text{使得}\ \frac{1}{g(x)} < k,\ \forall x \in I \\
\Rightarrow\ & \exists k > 0,\ \text{使得}\ g(x) > \frac{1}{k},\ \forall x \in I \\
\Rightarrow\ & \exists k > 0,\ \text{使得}\ M - \frac{1}{k} > f(x),\ \forall x \in I \\
\Rightarrow\ & \sup f(I) \le M - \frac{1}{k} < M.
\end{aligned}$$

顯然與 M 之定義相矛盾.

2° 同理可證存在 $d \in I$ 使得 $m = \inf f(I)$. □

本定理之主要用途：對於一函數, 若題意僅要求解出其最大值與最小值(不要求相對極值), 而且已知 f 連續於緊緻區間 D_f 上, 那麼只需比較可能有極值之各點之函數值的大小. 在第四章中我們將詳細討論並舉範例. 此外, 本定理亦可用以求一連續函數之值域, 唯與定理 1.25 不同, 前者僅知值域爲一區間, 但本定理則進一步知悉值域爲一緊緻區間, (但定義域須爲一緊緻區間).

§ 1.6 其他八類極限

討論一實值之實變函數 $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ 之極限, 除了第三節之情況之外, 我們可推廣至 p 爲 $+\infty$ 或 $-\infty$, 極限值亦可推廣爲 $+\infty$ 或 $-\infty$, 下表正說明這九種情形 :

類別	$l \in \mathbb{R}$	$l = +\infty$	$l = -\infty$
$p \in \mathbb{R}$	I	IV	V
$p = +\infty$	II	VI	VII
$p = -\infty$	III	VIII	IX

其中第 I 種, 我們在第三節已詳細討論, 其他八種極限應採『類比』方式處理, 而不是以同樣方法討論八次, 類比之優點乃是吾人可以舉一以反八, 其關鍵在於"去心鄰近"及"鄰近", 而非 ϵ-δ. 實數 p 之鄰近與去心鄰近分別爲

$$N_\epsilon(p) = (p-\epsilon, p+\epsilon), \quad N_\epsilon^*(p) = (p-\epsilon, p+\epsilon) \setminus \{p\}.$$

而 $+\infty$ 之鄰近與去心鄰近又當如何界定? 由於在《微積分學》中, 函數之定義域及值均皆不包括 $+\infty, -\infty$, 因此, 我們並不需要 $\pm\infty$ 之鄰近觀念, 只需界定"去心鄰近"之定義.

首先, 當我們要求函數值 $f(x)$ 十分接近實數 l 時, 我們以

$$\forall\, \epsilon > 0, \ldots,\ f(x) \in N_\epsilon(l),$$

來處理, 當我們要求函數值趨近於 $+\infty$ 時, 則可用

$$\forall\, \beta > 0, \ldots,\ f(x) > \beta,$$

亦即

$$\forall\, \beta > 0, \ldots,\ f(x) \in (\beta, +\infty).$$

由此看來, 我們可以令 $(c,+\infty)$ 爲 $+\infty$ 之一去心鄰近, 內 c 爲一任意實數. 同理 $(-\infty,c)$ 爲 $-\infty$ 之一去心鄰近, 內 c 爲一任意實數. 以下我們將九種極限定義均予列出, 讀者只需留意以下二事：其一, 定義所代表之意義爲何, 其二, 第 II 種定義與第 I 種之相同與與相異之處; 把握其中奧秘, 對於"極限"觀念乃至於數學觀念皆有甚大之助益.

I. $\lim\limits_{x\to p} f(x)=l \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ (\forall x)(x\in N^*_\delta(p)\cap D_f \ \Rightarrow\ f(x)\in N_\epsilon(l))\Big]$.

II. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\epsilon>0,\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\ (\forall x)(x\in(\alpha,+\infty)\cap D_f \ \Rightarrow\ f(x)\in N_\epsilon(l)\ )\Big]$.

III. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\epsilon>0,\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\ (\forall x)(x\in(-\infty,\alpha)\cap D_f \ \Rightarrow\ f(x)\in N_\epsilon(l)\ )\Big]$.

IV. $\lim\limits_{x\to p} f(x)=+\infty \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\beta\in\mathbb{R},\ \exists\delta>0,\ (\forall x)(x\in N^*_\delta(p)\cap D_f \ \Rightarrow\ f(x)\in(\beta,+\infty)\ )\Big]$.

V. $\lim\limits_{x\to p} f(x)=-\infty \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\beta\in\mathbb{R},\ \exists\delta>0,\ (\forall x)(x\in N^*_\delta(p)\cap D_f \ \Rightarrow\ f(x)\in(-\infty,\beta)\ )\Big]$.

VI. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\beta\in\mathbb{R},\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\ (\forall x)(x\in(\alpha,+\infty)\cap D_f \ \Rightarrow\ f(x)\in(\beta,+\infty)\ )\Big]$.

VII. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\beta\in\mathbb{R},\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\ (\forall x)(x\in(\alpha,+\infty)\cap D_f \ \Rightarrow\ f(x)\in(-\infty,\beta)\ )\Big]$.

VIII. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\beta\in\mathbb{R},\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\ (\forall x)(x\in(-\infty,\alpha)\cap D_f \ \Rightarrow\ f(x)\in(\beta,+\infty)\ )\Big]$.

IX. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\beta\in\mathbb{R},\ \exists\alpha\in\mathbb{R},\ (\forall x)(x\in(-\infty,\alpha)\cap D_f \ \Rightarrow\ f(x)\in(-\infty,\beta)\ )\Big]$.

正式之定義尙須考慮"聚點"問題, 因此, 我們只寫出其中二種, 其餘部分讀者可自行補上.

定義 1.29

設 f 之定義域 D_f 爲無上界集合 [§], $l\in\mathbb{R}$, 我們規定

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\,\epsilon>0,\ \exists\alpha>0,\ (\forall\, x\in D_f)(x>\alpha \ \Rightarrow\ f(x)\in N_\epsilon(l)\ )\Big].$$

(參閱圖 1–25).

§ 此時我們視 $+\infty$ 爲 D_f 之一"聚點".

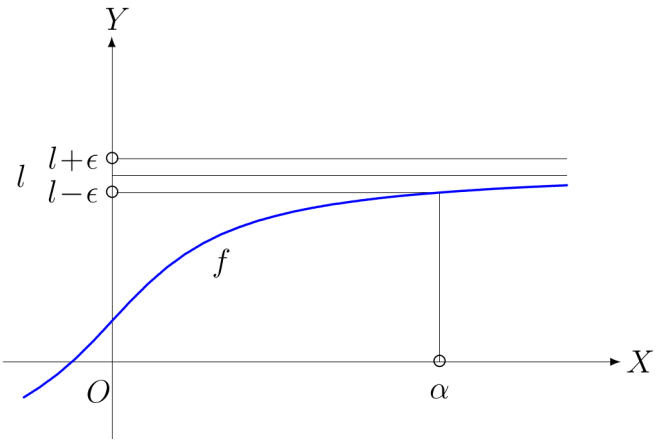


圖 1–25

註： 在此我們僅要求 D_f 爲一無上界集合, 它未必爲一區間, 在第八章中我們將令 $D_f = \mathbb{N}$, 利用上述定義, 可討論其極限.

例 1. 設函數 $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{1}{x}$, 試利用定義證明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

【解】$\forall\, \epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} |f(x) - 0| < \epsilon &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon \\ &\Leftarrow x > \frac{1}{\epsilon} \\ &\Leftarrow x > \alpha, \ \left(\text{令 } \alpha = \frac{1}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

故證得 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

定義 1.30

設函數 $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $p \in (D_f)'$, 我們規定

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \Big[\forall\, \beta \in \mathbb{R},\ \exists \delta > 0,\ \forall\, x \in N^*_\delta(p) \cap D_f \ \Rightarrow\ f(x) \in (\beta, +\infty)\Big].$$

(參閱圖 1–26).

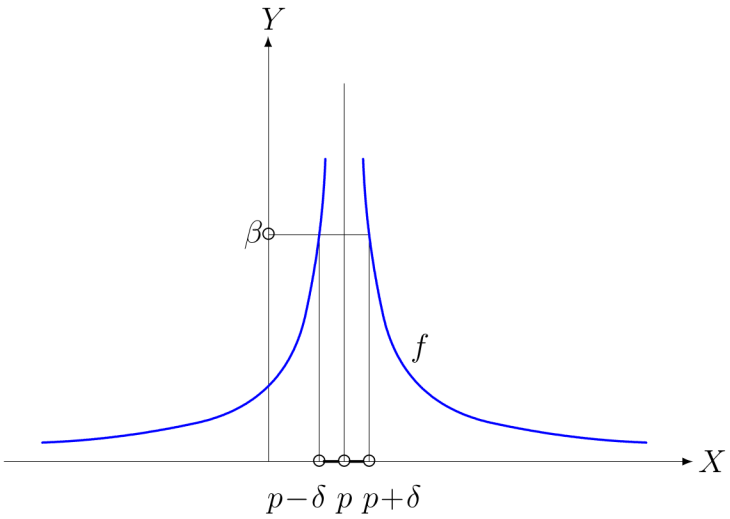


圖 1–26

註： 在第三節中我們稱 f 在點 p 之極限存在, 如果存在 $l \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = l$, 在本節中, 我們雖有

$$\lim_{x\to p} f(x) = +\infty \text{ 或 } \lim_{x\to p} f(x) = -\infty,$$

但我們並不視 f 在點 p 之極限存在. 更明白地說, 今後我們稱 f 在某點 p 之極限存在, 僅指此極限爲有限而已; $p = \pm\infty$ 之情形亦然.

本章第三節及第四節中有關極限之定理, 諸如函數間之加、減、乘、除、合成, 三明治原理、制限定理等只要加以適當修改 (p 改爲 $+\infty$ 或 $-\infty$, $N_\epsilon^*(p)$ 改爲 $(\alpha, +\infty)$ 或 $(-\infty, \alpha)$ 等等) 都可適用於 II 至 IX 等八類極限, 唯應注意在何條件下方能成立, 限於篇幅我們無法一一列出, 僅列出其中有關函數四則運算之極限的一種推廣.

定理 1.31

設 f 與 g 爲二函數, 點 $p \in \overline{\mathbb{R}}$ 爲 $D_f \cap D_g$ 之一聚點. $\lim\limits_{x\to p} f(x) = l$, $\lim\limits_{x\to p} g(x) = m$, 內 $l, m \in \overline{\mathbb{R}}$, 則

(1) 若 $l + m$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 內有意義, 則 $\lim\limits_{x\to p}(f(x) + g(x)) = l + m$.

(2) 若 $l \cdot m$ 在 $\overline{\mathbb{R}}$ 內有意義, 則 $\lim\limits_{x\to p} f(x)g(x) = l\,m$.

(3) 若 $l \in \{-\infty, +\infty\}$, 則 $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

(4) 若 $l = 0$ 且 $f(x)$ 在點 p 之一去心鄰近恆爲正, 則 $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$.

(5) 若 $l = 0$ 且 $f(x)$ 在點 p 之一去心鄰近恆爲負, 則 $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

【證】我們只證 (3) 且 p 爲一實數, 而 $l=+\infty$ 之情形, 其餘部分, 讀者可仿照第四節之定理證明自證之.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to p} f(x)=+\infty &\Rightarrow \left[\forall\,\beta>0,\,\exists\delta>0,\ \forall\,x\in N_\delta^*(p)\cap D_f \Rightarrow f(x)>\beta\right]\\ &\Rightarrow \left[\forall\,\beta>0,\,\exists\delta>0,\ \forall\,x\in N_\delta^*(p)\cap D_f \Rightarrow 0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{\beta}\right]\\ &\Rightarrow \left[\forall\,\beta>0,\,\exists\delta>0,\ \forall\,x\in N_\delta^*(p)\cap D_f \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}\right|<\frac{1}{\beta}\right],\quad (*)\end{aligned}$$

$\forall\,\epsilon>0$, 令 $\beta=\dfrac{1}{\epsilon}$, 則由 $(*)$ 知, 存在 $\delta>0$ 使得

$$\forall\,x\in N_\delta^*(p)\cap D_f \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)}-0\right|<\frac{1}{\beta}=\epsilon.$$

亦即 $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{1}{f(x)}=0$. □

例 2. 試求極限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-[x]}{3x+4}=?$

【解】由括號函數之定義知,

$$\begin{aligned}\forall\,x>0 &\Rightarrow x-1<[x]\le x\\ &\Rightarrow \frac{x-1}{x}<\frac{[x]}{x}\le 1,\end{aligned}$$

利用三明治原理得, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[x]}{x}=1$. 是以

$$\text{原題}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}-\frac{[x]}{x}}{3+\frac{4}{x}}=\frac{0-1}{3+0}=-\frac{1}{3}.$$ □

例 3. 試求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-[x]}{5x+3}\right)^{1/3}=?$

【解】1° 先求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-[x]}{5x+3}$. 當 $x>0$ 時,

$$\begin{aligned}x-1<[x]\le x &\Rightarrow 1-x\le 1-[x]<2-x\\ &\Rightarrow \frac{1-x}{5x+3}\le\frac{1-[x]}{5x+3}<\frac{2-x}{5x+3},\ (\text{因分母爲正})\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x}{5x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{5+\frac{3}{x}}=-\dfrac{1}{5}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-x}{5x+3}=-\dfrac{1}{5}$. 是以,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-[x]}{5x+3}=-\frac{1}{5}.$$

2° 其次, 設 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}: g(y)=y^{1/3}$, 由 第五節例 2 知, g 爲一連續函數, 是以

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(\frac{1-[x]}{5x+3}\Big)^{1/3}=\lim_{x\to+\infty}g\Big(\frac{1-[x]}{5x+3}\Big)=g\Big(\lim_{x\to+\infty}\frac{1-[x]}{5x+3}\Big)$$
$$=g\Big(-\frac{1}{5}\Big)=-\frac{1}{5^{1/3}}.$$ □

例 4. 設 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=x-[x]$ (稱爲**尾數函數** (mantissa)). 試求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=?$ (參見圖 1–27).

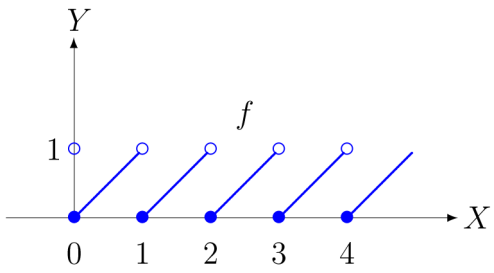


圖 1–27

【解】令 $f(x)=x-[x]$, $A=\{1.5,\ 2.5,\ 3.5,\ \cdots\}$, 則

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f|_{\mathbb{N}}(x)=0,\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f|_{A}(x)=0.5,\end{cases}$$

二制限之極限不相等, 故極限不存在. □

例 5. 試證: 方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 至少有一實根, 其中 $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ 且 $a\neq 0$.

【解】設 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 則

- f 爲連續, 由連續函數之區間保持性知 f 之值域爲一區間;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}ax^3\Big(1+\dfrac{b}{ax}+\dfrac{c}{ax^2}+\dfrac{d}{ax^3}\Big)=\operatorname{sgn}(a)\cdot(+\infty)$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}ax^3\Big(1+\dfrac{b}{ax}+\dfrac{c}{ax^2}+\dfrac{d}{ax^3}\Big)=\operatorname{sgn}(a)\cdot(-\infty)$.

由以上三點知, f 之值域爲無上、下界之區間, 即 $\mathbb{R}$, 故存在 $x_0\in\mathbb{R}$ 使得 $f(x_0)=0$. □

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

第 一 章 習 題

注意: 本習題中, $[\cdot]$ 乃最大整數函數.

極限

1-1 設 $\epsilon = 1$, 試求 $\delta > 0$ 以使 " $0 < |x-4| < \delta \ \Rightarrow\ |\sqrt{x}-2| < \epsilon = 1$ " 成立. 並進而證明: $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x} = 2$.

1-2 試以 ϵ-δ 方法證明: $\lim\limits_{x\to 3}\ \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2}$.

1-3 設 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \sqrt{4x-x^2-3}$.

(a) 試求: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ?$ 及 $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = ?$

(b) 試問:

$$\text{“ } \lim_{x\to 1}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) + \lim_{x\to 1} g(x) \text{ ”}$$

是否爲眞? 理由爲何?

1-4 試求下列各極限:

(a) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{[x]}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{[x^3]-27}{x^3-27}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\right]x$;

(f) $\lim\limits_{x\to 1}[n(2+2x-x^2)]$, (內 $n\in\mathbb{Z}^*$);

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{[x]}{x}$;

(h) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-[x^2])$;

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-x^2}{2x+1}$;

(j) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1+x^2)^{1/2}}{x}$.

1-5 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x) = \begin{cases} x+5, & \text{若 } x < -3\ , \\ 9-x^2, & \text{若 } -3\le x\le 3\ , \\ 5-x, & \text{若 } 3 < x. \end{cases}$

試求 $f(3^-)$, $f(3^+)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $f(-3^-)$, $f(-3^+)$ 及 $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$.

連續

1-6 試討論下列各函數之連續性：

(a) $f(x)=\dfrac{1}{5-\sqrt{x^2+16}}$；

(b) $g(x)=\sqrt{\dfrac{2-x}{3+x}}$；

(c) $h(x)=|x-[x]-0.5|$.

1-7 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=\begin{cases}-x, & \text{若 } x<0,\\ 1, & \text{若 } x\geq 0.\end{cases}$

$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}: g(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x<0,\\ x, & \text{若 } x\geq 0.\end{cases}$$

(a) 試證：f 與 g 在點 0 均不爲連續;

(b) 試求 fg, 並證明其爲一連續函數.

1-8 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=\begin{cases}\sin x, & \text{若 } x\leq c,\\ ax+b, & \text{若 } x>c,\end{cases}$ 若 b,c 爲已知, 試求 a 使 f 在點 c 爲連續.

1-9 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在點 0 爲連續且滿足

$$\forall\, x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y).$$

試證：f 爲連續.

1-10 設函數 $f\colon \mathbb{R}\to(0,+\infty)$, 滿足條件 (i) $\forall\, x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)f(y)$, 且 (ii) f 於點 0 爲連續. 試求 $f(0)=?$ 並證明 f 爲一連續函數.

1-11 試舉一函數 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 在每一點均不爲連續.

1-12 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{若 } x\in\mathbb{Q},\\ x^4, & \text{若 } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ 試問 f 於那些點上爲連續?

1-13 設 $f(x)=\dfrac{4}{3x-5}, g(x)=\sqrt{x}, h(x)=\operatorname{sgn}(x)$, 試討論下列函數之連續性：

(a) $f\circ g\circ h$; (b) $h\circ f\circ g$.

1-14 設 n 爲一正偶數, $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{n-1}$ 均爲非零實數. 試證：方程式

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x=0$$

至少有二相異實根.

1-15 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 爲連續且 $\forall\, x\in\mathbb{Q},\ f(x)=0$, 試證：$f=0$.

1-16 若函數 f 與 g 在 $[a, b]$ 上爲連續且 $f(a) < g(a) < g(b) < f(b)$; 試證 : 存在 $p \in (a, b)$ 使得 $f(p) = g(p)$.

1-17 設有一工廠每八小時換一個輪班, 每一輪班內有能力生產某項產品 15000 件. 其成本分爲二部分, 第一部分 : 每班八小時之固定成本爲 2000 美元, 第二部分 : 變動成本爲每件成品 2 美元.

(a) 試將上述成本之和表爲成品數量 x 之函數 (其中 $x \geq 0$) ;

(b) 上述函數在哪些點上不爲連續?

(c) 將 (a) 之函數以單一函數表之, (即不分爲不同 Cases) .

1-18 設 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 均爲連續函數, 試證 : 函數 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 亦爲連續.

1-19 設 f 在開區間 $I = (a, b)$ 上爲連續, 其中 $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, 且

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to b} f(x) = +\infty,$$

試證 : 存在 $p \in I$ 使得 $f(p) \leq f(x),\ \forall x \in I$, (亦即 f 具最小值).

Chapter 2

導函數

在數學的發展過程中,『面積』觀念一直是人類研究的重點之一, 而在十七、八世紀 Newton 和 Leibniz 發現面積問題可用導數來解決之後, 導數才逐漸成爲數學研究的另一個重點, 而構築成所謂的《微積分學》.

§ 2.1 導數與切線

談到導數, 人們一定立即聯想到切線, 有人說 :『導數乃是切線之斜率.』那麼切線又是什麼? 十九世紀之前, 人類對於切線的觀念還是相當模糊, 無法給予一個十分嚴格的定義, 有人說 :『切線是過切點且與法線垂直之線.』但法線又是什麼? 有人說 :『當曲線上一點 Q 趨近於固定點 P 時二點割線之"極限" 就是切線.』然而這種極限不易以嚴格數學界定清楚, 大數學家 Fermat (1601–1665) 的想法是將此觀念分成兩個步驟 : 首先, 上述割線之斜率 (這是個實值函數) 的極限當做切線之斜率, 其次, 利用解析幾何之"點斜式" 即可求出切線方程式. 因此, 我們開始介紹導數.

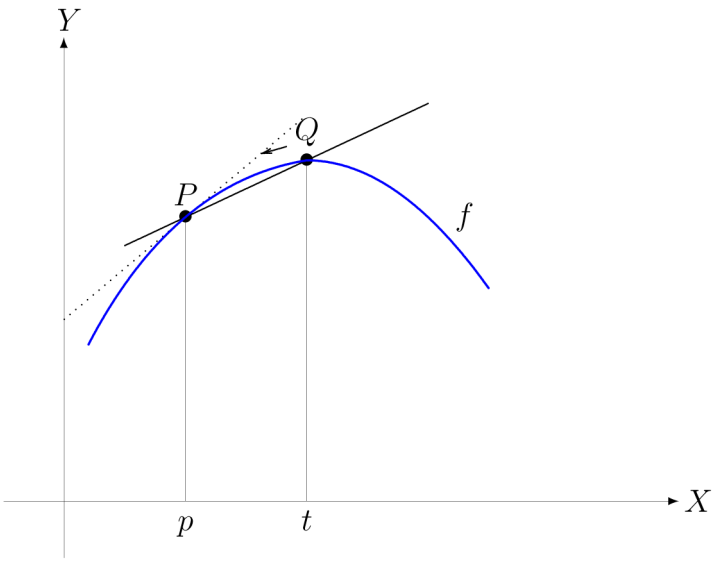


圖 2–1 : 切線

定義 2.1

設 $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $p \in D_f \cap (D_f)'$,

(1) 函數 $f_p^*\colon D_f \setminus \{p\} \to \mathbb{R} : f_p^*(t) = \dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ 稱爲 f 在點 p 之**差商函數** (difference quotient function).

(2) 如果極限 $\lim\limits_{t\to p} f_p^*(t) = \lim\limits_{t\to p} \dfrac{f(t)-f(p)}{t-p}$ 存在, 則稱 f 在點 p 爲**可微分** (differentiable), 並令之爲 $f'(p)$ 、$Df(p)$ 、$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=p}$ 或 $\dfrac{df(p)}{dx}$, 而稱爲 f 在 p 之**導數** (derivative).

(3) 若極限 $\lim\limits_{t\to p^+} f_p^*(t)$ 存在, 則稱 f 在點 p 爲**右可微** (right-differentiable), 並令此極限值爲 $f'_+(p)$ 或 $D_+f(p)$, 而稱爲 f 在 p 之**右導數** (right derivative). 同理 可界定左可微及左導數.

(4) 函數 $f'\colon E \to \mathbb{R} : x \mapsto f'(x)$, 其中

$$E = \{x \in D_f \mid f \text{ 在點 } x \text{ 爲可微 }\}$$

稱爲 f 之**導函數** (derivative).

(參閱圖 2–1) 所謂差商函數是指固定點 $P(p, f(p))$ 與曲線上另一點 $Q(t, f(t))$ 之連線之斜率. 稍早已提及, 差商函數之極限將被視切線之斜率而構成切線, 但此構想無法包含切線爲垂直之情形, 因此我們修改如下:

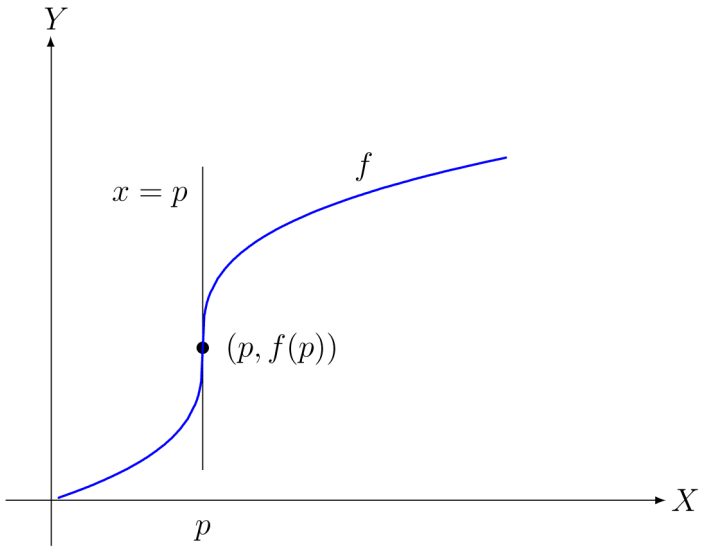


圖 2–2: 垂直切線

定義 2.2

(1) 如果 f 在點 p 爲可微, 則稱 $y = f'(p)(x-p)+f(p)$ 爲 f 圖形過點 $(p, f(p))$ 之 **切線** (tangent line);

(2) 如果 f 在點 p 爲連續且 $\lim\limits_{x\to p}\left|\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}\right| = +\infty$, 則稱 $x = p$ 爲 f 圖形過點 $(p, f(p))$ 之 (垂直) **切線**.

平常我們所謂的“微分 (differentiate) 某函數 f”一語, 其意思便是由函數 f 找出其導函數 f', 提醒讀者注意：一可微分函數 (即此函數在其定義域之每一點皆爲可微) 當然有導函數, 但某些函數並非在其定義域內之每一點皆爲可微分時, 依照定義 2.1 仍然有導函數.

例 1. 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(x) = c$, 試微分 f.

【解】由於定義域爲 $\mathbb{R}$, 故其上任一點皆爲聚點, 而

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{c-c}{t-x} = 0,$$

是以 $f'\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : f'(x) = 0$, 換言之, 常數函數之導函數爲零函數. □

例 2. 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(x) = x$, 試微分 f.

【解】由於定義域爲 $\mathbb{R}$, 故其上任一點皆爲聚點, 而

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{t-x}{t-x} = 1,$$

是以 $f'\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : f'(x) = 1$. □

例 3. 設 $n\in\mathbb{N}, f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(x) = x^n$, 試微分 f.

【解】在上例中我們已討論 $n = 1$ 之情形, 以下只考慮 $n > 1$ 之情形,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{t^n-x^n}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x}\frac{(t-x)(t^{n-1}+t^{n-2}x+\cdots+x^{n-1})}{t-x} \\ &= \lim_{t\to x}(t^{n-1}+t^{n-2}x+\cdots+x^{n-1}) \\ &= nx^{n-1}. \end{aligned}$$

是以 $f'\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : f'(x) = nx^{n-1}$.

(當 $n = 1$ 時, 此式亦眞, 唯 x^0 須視爲常數函數 1.) □

例 4. 設 $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : f(x) = 1/x$, 試微分 f.

【解】由於定義域爲 $\mathbb{R}^*$, 故其上任一點皆爲聚點, 而

$$f'(x) = \lim_{t\to x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{\frac{1}{t}-\frac{1}{x}}{t-x} = \lim_{t\to x} \frac{x-t}{(t-x)(tx)} = -\frac{1}{x^2}.$$

是以 $f'\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$. □

例 5. 試求通過原點而切於函數 $f(x) = (x+1)^3$ 圖形之直線方程式.

【解】因 $f(x) = (x+1)^3$, 故 $f'(x) = 3(x+1)^2$.

1° 設此切線之切點爲 (x_0, y_0), 由於

$$\begin{cases} y_0 = (x_0+1)^3, \\ \text{斜率 } m = f'(x_0) = 3(x_0+1)^2, \end{cases}$$

故切線方程式應爲

$$\begin{aligned} y &= m(x-x_0) + y_0 \\ &= 3(x_0+1)^2(x-x_0) + (x_0+1)^3. \qquad (1) \end{aligned}$$

2° 由題意知切線通過原點, 故由 (1) 式得

$$0 = 3(x_0+1)^2(-x_0) + (x_0+1)^3.$$

分解之, 得

$$(x_0+1)^2(1-2x_0) = 0.$$

亦即 $x_0 = -1$ 或 $x_0 = \dfrac{1}{2}$, 分別代入 (1) 式, 得二切線方程式 $y = 0$ 及 $y = \dfrac{27}{4}x$. □

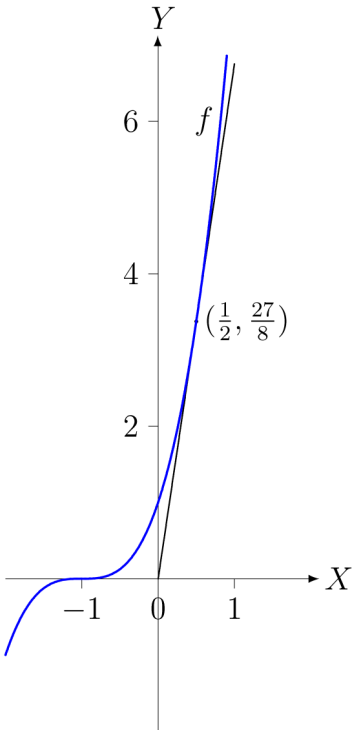


圖 2–3

由原設之函數 f, 我們可以求得其導函數 f' (注意：其定義域可能較 D_f 爲小), 對於 f' 我們可用同樣『差商極限之方法』以求 f' 在某點 p 之導數, 亦即

$$(f')'(p) = \lim_{t\to p} \frac{f'(t)-f'(p)}{t-p}, \quad (\text{若其存在}).$$

爲簡化符號, 我們將上述導數寫爲 $f''(p)$, 並稱其爲 f 在點 p 之二階導數 (second derivative), 如此繼續下去而有三階導數 $f'''(p)$, 但四階以上則表爲 $f^{(4)}(p)$, $f^{(5)}(p), \cdots, f^{(n)}(p)$ †. 當然我們可以更精確地界定高階導函數如下：

† f', f'', f''' 分別讀爲 f-prime, f-double-prime, f-triple-prime, 但其後之 $f^{(4)}$ 則讀爲 f 之四階導數 (4th derivative of f).

定義 2.3

設 f 爲一函數. 對於任一 $n \in \mathbb{N}$, 我們以遞迴定義法界定 f 之 n 階**導函數** $f^{(n)}$ (n-th derivative of f) 如下 :

(i) 若 f 有導函數, 則 $f^{(1)} = f'$;

(ii) 若 f 有 m 階導函數 $f^{(m)}$, 且 $f^{(m)}$ 有導函數, 則 $f^{(m+1)} = (f^{(m)})'$.

爲方便計, 我們常以 $f^{(0)}$ 表 f 本身, 此外 $f^{(n)}$ 亦常寫爲 $D^n f$ 或 $\dfrac{d^n y}{dx^n}$. 在此我們將暫不舉例, 在下節介紹有關函數四則運算及合成之導數求法之後, 再舉高階導數之範例.

§ 2.2 常用之導數定理

如同極限及連續之情形一樣, 我們不能全靠"定義" 以求一函數之導數, 一些基本性的定理可以幫助我們如何"微分", 不過這些常用定理並非萬能, 有時也需要定義, 許多讀者似乎過分依賴定理的功能, 而產生錯誤的認知與結果.

定理 2.4 (可微性與連續性)

(1) 若 f 在點 p 爲可微, 則 f 在點 p 爲連續 ;

(2) 若 f 在點 p 爲右可微, 則 f 在點 p 爲右連續.

【證】我們只證 (2), 若將其中之 p^+ 爲 p, $f'_+(p)$ 改爲 $f'(p)$ 即爲 (1) 之證. 由於

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^+}\left[\frac{f(x)-f(p)}{x-p}(x-p)+f(p)\right] = f'_+(p)\cdot 0 + f(p) = f(p),$$

故 f 在點 p 爲右連續. □

我們都知道 : 若 f 在點 p 爲連續, 則 f 在點 p 未必爲可微; 但若 f 在點 p 爲右連續, 則 f 在點 p 之右導數是否存在?

例 1. 舉一例以說明 : 若 f 在點 p 爲右連續, 則 f 在點 p 之右導數未必存在. (其中 p 不爲 D_f 之孤立點.)

【解】設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(x) = x^{1/3}$, 由於

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+}\frac{t^{1/3}}{t} = +\infty,$$

故知 f 在點 0 不爲 (右) 可微, 但 f 在點 0 顯然爲 (右) 連續, (參見第一章第五節例 2). □

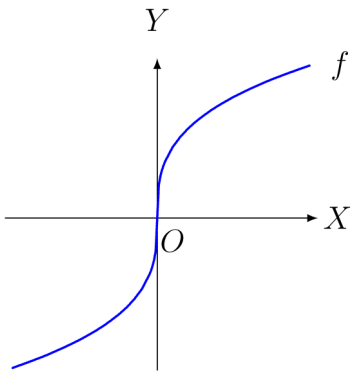


圖 2–4

定義 2.5

設 f 爲一函數. 若 f 爲可微分且 f' 爲連續, 則稱 f 爲**連續可微** (continuously differentiable). 類此, 若 $f^{(n)}\colon D_f \to \mathbb{R}$ 存在且連續, 則稱 f 爲 n **階連續可微** (n-th order continuously differentiable), 並以 $f \in C^n$ 表之.

由 2.4 定理我們可獲以下蘊含式, 用以表示連續與可微之強弱關係 :

$$\begin{aligned} f \text{ 爲 } n \text{ 階連續可微} &\Rightarrow f \text{ 爲 } n \text{ 階可微} \\ &\Rightarrow f \text{ 爲 } n-1 \text{ 階連續可微} \\ &\Rightarrow \cdots \\ &\Rightarrow f \text{ 爲二階可微} \\ &\Rightarrow f \text{ 爲一階連續可微} \\ &\Rightarrow f \text{ 爲一階可微} \\ &\Rightarrow f \text{ 爲連續.} \end{aligned}$$

上述各蘊含式之逆敍述皆不爲眞, 例如 : 函數

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

(參見圖 2–5), 爲 (一階) 可微, 但不爲 (一階) 連續可微. (第三章習題).

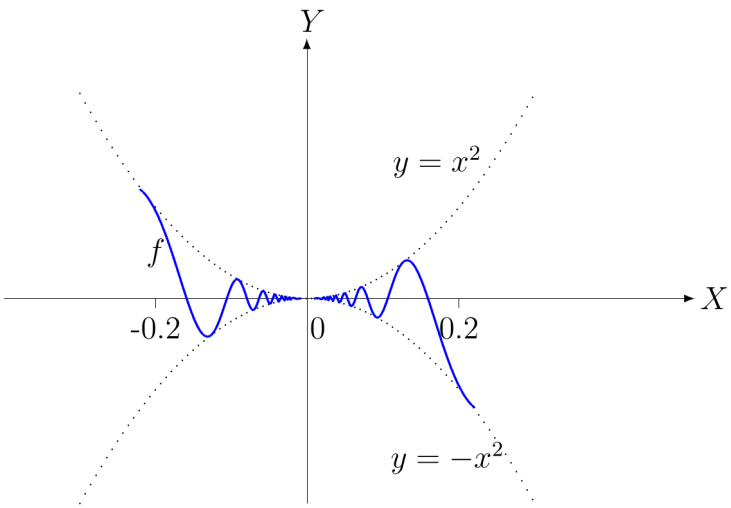


圖 2–5

定理 2.6 （導數之四則運算）

設 f, g 在點 p 爲可微, p 爲和（或差、積、商）函數定義域之聚點, 則

(1) $(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)$;

(2) $(f-g)'(p) = f'(p) - g'(p)$;

(3) $(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$;

(4) $\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{g^2(p)}$, （若 $g(p) \neq 0$）.

【證】(1) 利用第一章「和函數之極限定理」,

$$\begin{aligned}(f+g)'(p) &= \lim_{t\to p} \frac{(f+g)(t) - (f+g)(p)}{t-p} \\ &= \lim_{t\to p} \frac{(f(t)+g(t)) - (f(p)+g(p))}{t-p} \\ &= \lim_{t\to p} \frac{f(t)-f(p)}{t-p} + \lim_{t\to p} \frac{g(t)-g(p)}{t-p} = f'(p) + g'(p).\end{aligned}$$

(2) 仿 (1).

(3) 利用第一章「和函數與積函數之極限定理」,

$$\begin{aligned}(fg)'(p) &= \lim_{t\to p} \frac{(fg)(t) - (fg)(p)}{t-p} \\ &= \lim_{t\to p} \frac{f(t)g(t) - f(t)g(p) + f(t)g(p) - f(p)g(p)}{t-p} \\ &= \lim_{t\to p} f(t)\frac{g(t)-g(p)}{t-p} + \lim_{t\to p} g(p)\frac{f(t)-f(p)}{t-p} = f'(p)g(p) + f(p)g'(p).\end{aligned}$$

(4) 首先

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(p) = \lim_{t\to p} \frac{(1/g)(t) - (1/g)(p)}{t-p} = \lim_{t\to p} \frac{g(p)-g(t)}{g(t)g(p)(t-p)} = -\frac{g'(p)}{g^2(p)}.$$

其次利用 (3),

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(p) &= f'(p)\cdot\frac{1}{g(p)} + f(p)\cdot\frac{-g'(p)}{g^2(p)} \\ &= \frac{f'(p)g(p) - f(p)g'(p)}{g^2(p)}.\end{aligned}$$

□

例 2. 設 f 爲可微分函數. 證明: $Df^n(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$, 其中 n 爲大於一之自然數.

(注意：讀者宜分辨 f^n 與 $f^{(n)}$ 意義完全不同).

【解】利用函數之積的微分公式及數學歸納法可證得：

$$D(f_1\cdots f_n)(x)=f_1'(x)f_2(x)\cdots f_n(x)+f_1(x)f_2'(x)\cdots f_n(x)+\cdots \\ +f_1(x)f_2(x)\cdots f_n'(x).$$

令 $f_1=f_2=\cdots=f_n=f$, 則上式可化爲 $Df^n(x)=nf^{n-1}(x)\cdot f'(x)$. □

例 3. 試微分 $f(x)=x^r$, 內 $r=\dfrac{m}{n}$, $m\in\mathbb{N}$, n 爲大於 m 之奇數, 且二者互質.

【解】顯然 $D_f=\mathbb{R}$.

1° 當 $x\neq 0$ 時, 首先,

$$Dx^{1/n}=\lim_{t\to x}\frac{t^{1/n}-x^{1/n}}{t-x} \\ =\lim_{t\to x}\frac{1}{(t^{1/n})^{n-1}+(t^{1/n})^{n-2}x^{1/n}+\cdots+(x^{1/n})^{n-1}}=\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

因 $f(x)=(x^{1/n})^m$, 故

$$f'(x)=m(x^{1/n})^{m-1}\cdot\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}=rx^{r-1}.$$

2° 當 $x=0$ 時, 由於

$$\lim_{t\to 0^+}f_0^*(t)=\lim_{t\to 0^+}\frac{t^{m/n}-0}{t-0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^{(n-m)/n}}=+\infty.$$

知 f 於點 0 不爲可微. (參閱圖 2–6).

綜合以上討論知 $f'\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}: f'(x)=rx^{r-1}$.

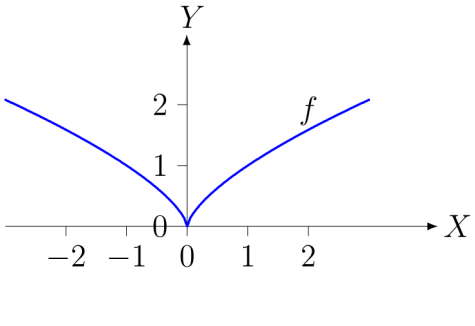


圖 2–6A m 爲偶數, n 爲奇數

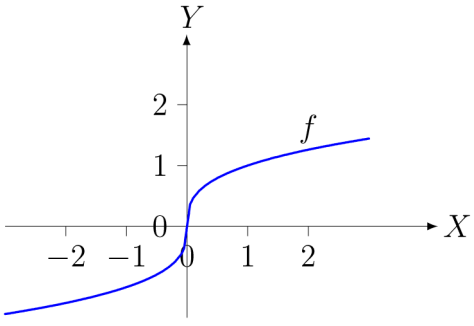


圖 2–6B m, n 皆爲奇數 □

註： 若本例中之 $r\geq 1$, 則 f 在點 0 爲可微.

定理 2.7 [**微分連鎖律 (Chain Rule)**]

設 f 在點 p 爲可微, g 在點 $f(p)$ 爲可微, 則 $D(g\circ f)(p)=g'(f(p))\cdot f'(p)$.

【證】設

$$f^*\colon D_f \to \mathbb{R} : f^*(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}, & \text{若 } x \neq p, \\ f'(p), & \text{若 } x = p, \end{cases}$$

則 f^* 連續於點 p 且 $\forall\, x \in D_f,\ f(x)-f(p) = f^*(x)(x-p)$. 次設

$$g^*\colon D_g \to \mathbb{R} : g^*(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(f(p))}{y-f(p)}, & \text{若 } y \neq f(p), \\ g'(f(p)), & \text{若 } y = f(p), \end{cases}$$

則 g^* 連續於點 $f(p)$ 且 $\forall\, y \in D_g,\ g(y)-g(f(p)) = g^*(y)(y-f(p))$. 是以 $\forall\, x \in D_f,\ y = f(x) \in R_f \subset D_g$, 應有

$$\begin{aligned} g(f(x))-g(f(p)) &= g^*(f(x))(f(x)-f(p)) \\ &= g^*(f(x))f^*(x)(x-p), \end{aligned}$$

又因 f^* 與 $g^* \circ f$ 均連續於點 p, 故

$$\lim_{x\to p} \frac{g(f(x))-g(f(p))}{x-p} = \lim_{x\to p} g^*(f(x))f^*(x) = g'(f(p))f'(p). \qquad \square$$

例 4. 試微分函數 $F(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{1/3}$.

【解】1° 首先令

$$f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : f(x) = 1+\frac{1}{x},$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(y) = y^{1/3},$$

則

$$g(f(x)) = (f(x))^{1/3} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} = F(x).$$

即 F 乃 f, g 二函數所合成.

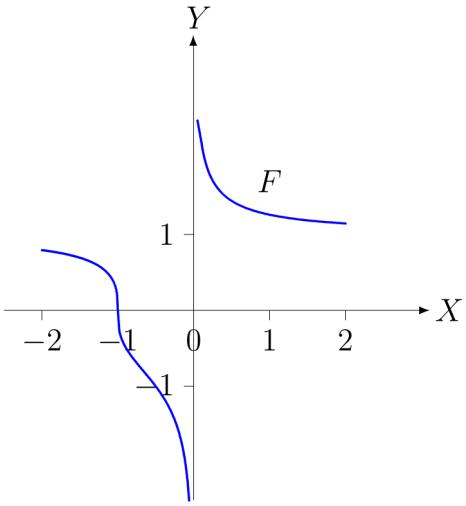


圖 2–7

2° 由於 g 在點 $y=0$ 時不爲可微, 故當 $f(x)=0$ 時, $g'(f(x))$ 無意義, 在此因 $f(-1)=0$, 故於點 $x=-1$ 不能利用連鎖律. 但由定義 2.1,

$$\begin{aligned} \lim_{t\to -1} \frac{F(t)-F(-1)}{t-(-1)} &= \lim_{t\to -1} \frac{[1+(1/t)]^{1/3}}{t+1} \\ &= \lim_{t\to -1} \frac{1}{t^{1/3}(t+1)^{2/3}} \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

故知 F 於點 -1 不爲可微分.

3° 至於 $\forall\, x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1\}$,

$$F'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{3}(f(x))^{-2/3} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{3x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2/3}}.$$

綜合以上討論知

$$F'\colon \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \to \mathbb{R} : F'(x) = -\frac{1}{3x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2/3}}. \qquad \square$$

例 5. 試微分 $f(x) = \sqrt{x^3 - x^4}$.

【解】先求 f 之定義域,

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3 - x^4 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^3(1-x) \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \,|\, x(1-x) \geq 0\} = [0, 1]. \end{aligned}$$

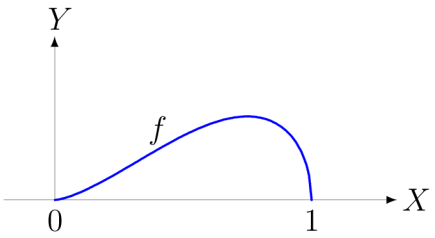


圖 2–8

次設

$$F\colon [0,1] \to \mathbb{R} : F(x) = x^3 - x^4,$$
$$G\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R} : G(y) = \sqrt{y}.$$

顯然有 $f(x) = G(F(x)),\ \forall x \in D_f$. 由於 G 在 $y = 0$ 時不爲可微分, 故當 $F(x) = 0$ (亦即 $x = 0$ 或 1) 時, 不可使用連鎖律, 而應使用導數之定義. (參閱圖 2–8).

1° $\forall\, x \in (0,1),\ f'(x) = \dfrac{3x^2 - 4x^3}{2\sqrt{x^3 - x^4}}$.

2° f 在點 1 不爲可微分, 因爲

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x^3 - x^4}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} -\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{1-x}} = -\infty,$$

3° 在點 $x = 0,\ f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^3 - x^4} - 0}{x - 0} = 0.$

是以

$$f'\colon [0,1) \to \mathbb{R} : f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2 - 4x^3}{2\sqrt{x^3 - x^4}}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases} \qquad \square$$

註： 有些人解合成函數之微分問題時, 未考慮各函數是否符合連鎖律之條件, 直接代入公式, 再判斷是否有點不爲可微, 可能發生誤判之情事, 以本題爲例, 以下解法是不正確的.

1° 因 $f(x)=\sqrt{x^3-x^4}=(x^3-x^4)^{1/2}$, 故

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^3-x^4)^{-1/2}(3x^2-4x^3)=\frac{3x^2-4x^3}{2\sqrt{x^3-x^4}}. \qquad ①$$

2° 當 $x\in\{0,1\}$ 時, 因 ① 式右端之分母爲 0, 故 f 在點 0 及點 1 皆爲不可微.

系 2.8

設 f 在點 x 爲可微, r 爲一有理數, $f(x)>0$, 則 $Df^r(x)=r\cdot f^{r-1}(x)f'(x)$.

【證】令 $g\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}: g(x)=x^r$, 則 $f^r(x)=g(f(x))$, 利用微分連鎖律, 得

$$Df^r(x)=g'(f(x))f'(x)=r\cdot f^{r-1}(x)f'(x). \qquad \square$$

註： 若 f 在點 x 爲可微, 而有理數 $r=\frac{m}{n}$, 其中 $m\in\mathbb{N}$, n 爲奇數時, 即使 $f(x)<0$, 亦有 $Df^r(x)=rf^{r-1}(x)f'(x)$. 但當 $f(x)=0$ 時, 則 $f^r(x)$ 是否可微, 當視 r 是否小於 1 而定, 我們留給讀者去思考.

例 6. 設 $f\colon(-\infty,1]\to\mathbb{R}: f(x)=\sqrt{1-x}$. 試求 f 之 n 階導函數.

【解】1° 若 $x<1$, 則 $f'(x)=-\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$; 而 f 在點 1 不爲可微分, 因

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\sqrt{1-x}}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-1}{\sqrt{1-x}}=-\infty.$$

2° 其次, $\forall x<1$,

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(1-x)^{-3/2},$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot(1-x)^{-5/2}.$$

$$f^{(4)}(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot(1-x)^{-7/2}.$$

當 $n\geq2$ 時, 我們可歸納得 $f^{(n)}\colon(-\infty,1)\to\mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x)=-\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2^n}\cdot(1-x)^{-(2n-1)/2}. \qquad \square$$

§ 2.3 關聯比率(導數應用之一)

導數在數學上的意義是切線之斜率, 在物理上則是瞬間速度, 如果我們考慮一質點沿一直線運動, 時間 t 時, 其位置爲直線上之 $f(t)$, 二者乃爲一函數關係, 今考慮自 t_0 至 t 之平均速度

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0},$$

若 t 趨近於 t_0 時, 上述平均速度之極限存在, 由於

$$\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=f'(t_0),$$

故稱 $f'(t_0)$ 爲質點在時間 t_0 之**瞬間速度** (instantanous velocity).

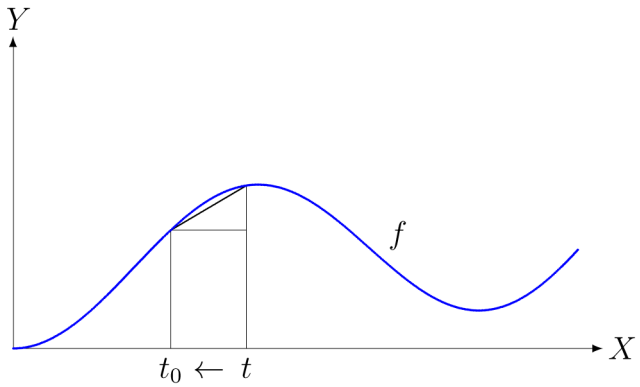


圖 2–9

導數在物理上的第一個應用乃是運動之速度. 同理, 位移函數之二階導數則爲加速度觀念. 除了應用在力學上之速度外, 亦常用在二變數之間之**關聯比率** (related rate). 設我們討論的是兩個變數 x 與 y, 其間有函數關係 : $y=f(x)$. 若 f 之定義域包含區間 $[p,t]$, 今考慮 : 自變數自 p 變至 t 而有增量 $t-p$ 時, f 之函數值亦隨之由 $f(p)$ 變至 $f(t)$ 而有增量 $f(t)-f(p)$ (注意 : 所謂增量未必爲正), 此函數值增量與自變數增量之比值

$$\frac{f(t)-f(p)}{t-p}$$

通常稱爲函數 f 由 p 至 t 間之**平均變率** (average rate of change). 亦即函數值對應於自變數變化之比率. 此乃我們界定導數時所謂之差商, 若 t 趨近於點 p 時, 上述平均變率之極限存在, 則此極限值通常稱爲 f 在點 p 之**瞬間變率** (instantaneous rate of change), 或簡稱爲 f 在點 p 之變率. 變率之應用極廣, 多半情形自變數爲時間, 故常表爲 t.

求關聯比率之步驟

1° 依題意繪出圖形;

2° 指定各變數, 對於所欲求之變率, 找出變數與相關變數之關係 (函數或方程式) ;

3° 微分上述函數或以隱函數方法*微分上述方程式之二端;

4° 依題意代入各項數值, 並解出所欲求之變率.

例 1. 某甲騎機車以時速 60 公里向東行駛, 此時其頭上 2000 公尺有一架飛機以時速 300 公里保持水平向北飛行. 在時間 t 時, 某甲與飛機之距離爲何? 在 $t=6$ 分鐘時, 二者之距離之變率爲若干? (下圖中點 P 表飛機, 點 A 表某甲).

【解】由於機車與飛機之距離 (單位 : 公里) 爲

$$S\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}\colon S(t)=\sqrt{(60t)^2+(300t)^2+2^2},$$

故二者距離之變率爲

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}(93,600\,t^2+4)^{-1/2}(2\times 93,600\,t).$$

當 $t_0=6$ 分鐘 $=0.1$ 小時,

$$\begin{aligned}\left.\frac{dS}{dt}\right|_{t_0}&=(93,600\times 0.1^2+4)^{-1/2}\times 93600\times 0.1\\&=\frac{9,360}{\sqrt{940}}=\frac{4,680}{\sqrt{235}}\\&\approx 305.289\quad (\text{公里/小時}).\end{aligned}$$

□

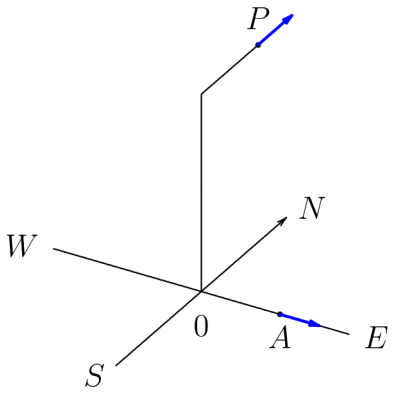


圖 2–10

例 2. 一直徑 8 呎深 10 呎之正圓錐容器 (頂點在下), 每分鐘注入 5 立方呎之水, 試問當水深爲 6 呎時, 水面上升之速度爲何? (參見下圖).

【解】設於時間 t 分鐘, 水面高度爲 y 呎, 水面半徑爲 x 呎, 此時水之總體積爲 V 立方呎, 由原設知, $\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{4}$, 是以 $x=\dfrac{2y}{5}$, 故體積應爲

$$V=\frac{\pi x^2 y}{3}=\frac{4\pi y^3}{75},$$

上式左右兩端分別對 t 微分之, 得

$$\frac{dV}{dt}=\frac{4\pi y^2}{25}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

已知進水速度 $\dfrac{dV}{dt}=5$, 水面高度 $y=6$, 代入上式得水面上升速度爲

$$\frac{dy}{dt}=\frac{25}{4\pi\cdot y^2}\cdot\frac{dV}{dt}=\frac{25}{4\pi\cdot 36}\cdot 5=\frac{125}{144\pi}\approx 0.2763\ (\text{呎/分}).$$

* 詳見第三章第十二節.

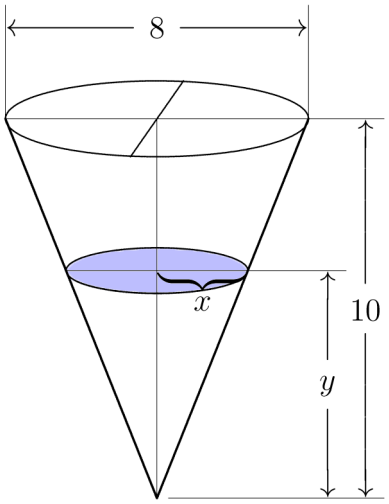


圖 2–11 □

例 3. 某患者之身上有一球形腫瘤直徑爲 x mm, 主治醫生發現該腫瘤之直徑每日增加 0.2 mm, 試問直徑爲 5 mm 時, 腫瘤體積增加之速率爲何？反之, 若體積增加速率爲一常數 C_0, 當體積爲 V_0 時, 試將直徑之增加速率表爲 C_0 與 V_0 之函數.

【解】1° 由於體積可表爲

$$V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}x^3,$$

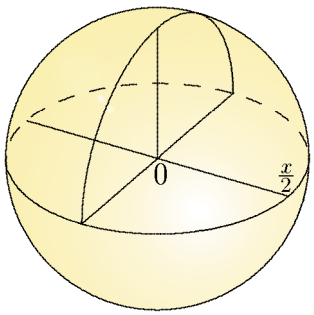


圖 2–12

兩端對 t 微分之, 則

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{2}x^2 \cdot \frac{dx}{dt},$$

當 $x = 5$ 時, $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{\pi}{2} \cdot 5^2 \cdot 0.2 = 2.5\pi$ $(\text{mm}^3/\text{日})$.

2° 由 $V = \dfrac{\pi}{6}x^3$, 解出 x 爲

$$x = \left(\frac{6V}{\pi}\right)^{1/3},$$

是以

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3}\frac{1}{3}V^{-2/3} \cdot \frac{dV}{dt},$$

當 $V = V_0$ 時,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}\left(\frac{6}{\pi}\right)^{1/3}V_0^{-2/3} \cdot C_0.$$

□

§ 2.4 導數與極值

微積分學中之微分部分, 最重要而且最常被用到的就是有關極值之問題. 不論是理論之探討或是應用, 人們常希望求得某一事項『最快』、『最大』、『最經濟』... 等等, 本章中我們將利用導數方法解決求極值的問題, 第四章中我們還有進一步方法, 在第十章中我們將探討多變數函數之極值問題.

定義 2.9

設函數 $f: D_f \to \mathbb{R}$, p, $q \in D_f$.

(1) 若存在點 p 之一鄰近 $N(p)$, 使得 $\forall x \in D_f \cap N(p)$, $f(x) \le f(p)$, 則稱 f 於點 p 有**局部極大值** (local maximum)或**相對極大值** (relative maximum).

(2) 若存在點 q 之一鄰近 $N(q)$, 使得 $\forall x \in D_f \cap N(q)$, $f(x) \ge f(q)$, 則稱 f 於點 q 有**局部極小值** (local minimum)或**相對極小值** (relative minimum).

(3) 不論相對極大值或相對極小值, 我們統稱其爲**相對極值** (relative extremum).

一函數之極值點未必是該函數定義域之內點, 如果定義域爲一半開區間或緊緻區間, 屬於該區間之端點"往往"有相對極值, 但非"必定"有, 我們將逐步深入探討.

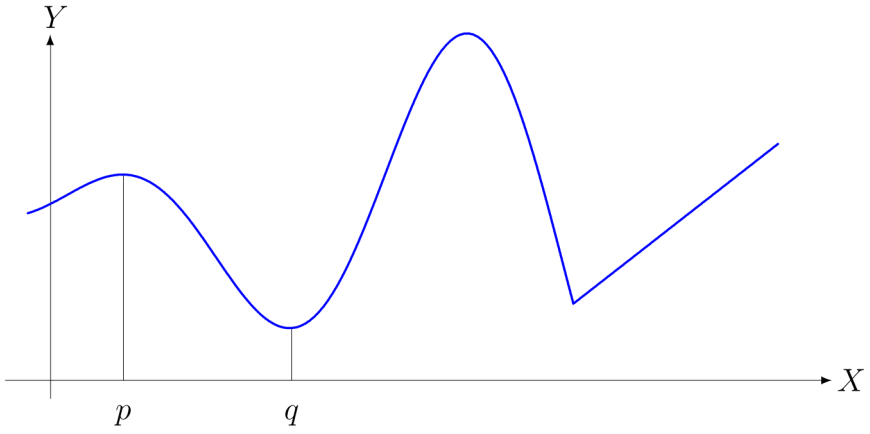


圖 2–13: 相對極值

定理 2.10 (導數與極值之定理)

設 $f: D_f \to \mathbb{R}$, 若

(1) p 爲 D_f 之內點 ;

(2) f 在點 p 爲可微 ;

(3) f 在點 p 有局部極值 .

則 $f'(p) = 0$.

【證】只證 f 於點 p 有局部極小之情形 (極大之情形同理).

- 由於 p 爲 D_f 之內點, 知存在 $\delta_1 > 0$ 使得 $N_{\delta_1}(p) \subset D_f$;
- 因 f 在點 p 有局部極小值, 知存在 $\delta_2 > 0$ 使得 $\forall x \in N_{\delta_2}(p) \cap D_f,\ f(p) \le f(x)$;

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, 則 $\forall x \in N_\delta(p)$,
$f(p) \le f(x)$. 是以函數 f 在點 p 之差商函數

$$f_p^*(t) = \frac{f(t)-f(p)}{t-p} \begin{cases} \le 0, & \text{若 } p-\delta < t < p, \\ \ge 0, & \text{若 } p < t < p+\delta, \end{cases}$$

因 f 在點 p 爲可微分, 故應有

$$0 \ge f_p^*(p^-) = \lim_{t\to p} f_p^*(t) = f_p^*(p^+) \ge 0,$$

即 $f'(p) = 0$. □

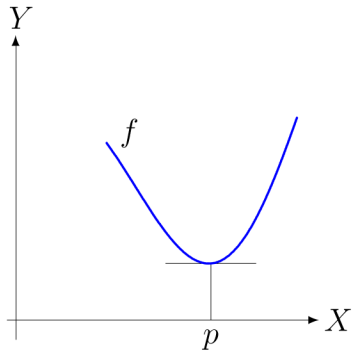


圖 2–14

系 2.11

若 f 在點 p 有極值, 則 $p \in Z_{f'} \cup (D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f) \cup S_f$, 其中

- $Z_{f'} = \{x \in D_f \mid f'(x) = 0\}$, (即 $f'(x) = 0$ 之解集合).
- $D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f$, (非內點集合) ‡.
- S_f 爲不可微分之點集合.

【證】若 $p \notin Z_{f'} \cup (D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f) \cup S_f$, 則

(i) f 於點 p 爲可微分;
(ii) p 爲 D_f 之內點;
(iii) $f'(p) \ne 0$.

假定「f 於點 p 有局部極值」, 則由 (i) 及 (ii) 知 $f'(p) = 0$, 顯然與 (iii) 矛盾. □

本系中三集合之聯集 $Z_{f'} \cup (D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f) \cup S_f$ 亦稱爲 f 之**臨界點集** (set of critical points). 本系僅說明函數 f 於點 p 有局部極值之必要條件爲點 p 爲 f 之一臨界點, 但此條件並非充分條件. 我們將在下節提供充分條件之一, 而在第四章中更進一步的討論. 範例亦在下一節以及其後二章中提供.

‡ 若 D_f 爲一緊緻區間, 則 $D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f$ 爲區間之二端點所成之集合.

§ 2.5 微分均值定理

不論是在理論上或是實際的應用上, 微分均值定理是個不可缺少的定理, 本節在證明定理之餘, 僅略作簡單的應用, 至於它在理論上的許多應用留待以後陸續討論.

定理 2.12 (**Rolle 定理**)

設

(1) f 在區間 $[a,b]$ 上爲連續 ,

(2) f 在區間 (a,b) 上爲可微 ,

(3) $f(a)=f(b)$.

則存在 $p\in(a,b)$ 使得 $f'(p)=0$.

【證】因 f 在區間 $[a,b]$ 上爲連續, 由 1.28 極值定理知 f 在區間 $[a,b]$ 之某處 p 必有絕對極大, 亦必在某處 q 有絕對極小.

(1) 若 $f(p)=f(q)$, 則 f 爲一常數函數. 此時, $\forall\, p\in(a,b)$, 均有 $f'(p)=0$.

(2) 若 $f(p)>f(q)$, 則僅可能 $f(p)>f(a)$ 或 $f(q)<f(a)$. 假定 $f(p)>f(a)=f(b)$, 則 p 必爲 $[a,b]$ 之內點, 且因 f 於點 p 有絕對極大, 由定理 2.10 知, $f'(p)=0$. 同理可證, 若 $f(q)<f(a)$, 則 $q\in(a,b)$ 且 $f'(q)=0$.

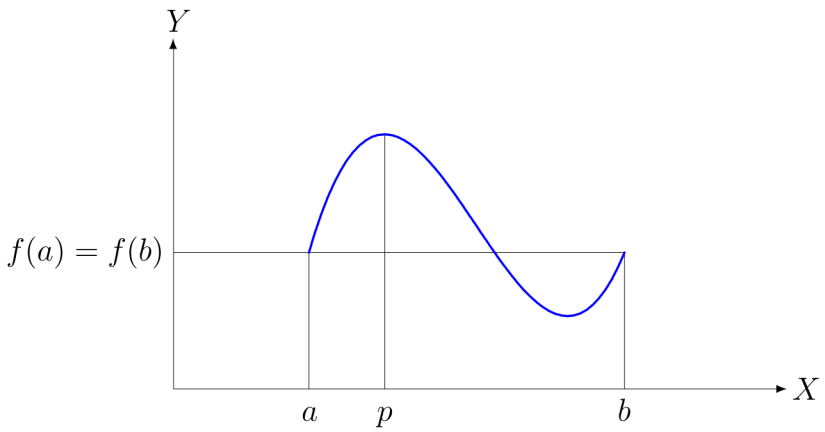


圖 2–15 □

定理 2.13 [**微分均值定理 (Mean Value Theorem)**]

設

(1) f 在區間 $[a,b]$ 上爲連續 ;

(2) f 在區間 (a,b) 上爲可微 .

則存在 $p\in(a,b)$ 使得 $f'(p)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

【證】設 f 在 $[a,b]$ 上爲連續, 且在 (a,b) 上爲可微, 令

$$\phi\colon [a,b]\to\mathbb{R}:\phi(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

顯然 ϕ 在 $[a,b]$ 上爲連續, 在 (a,b) 上爲可微, 且

$$\phi(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a),$$
$$\phi(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a),$$

由 Rolle 定理知, 存在 $p\in(a,b)$ 使得 $\phi'(p)=0$, 亦即

$$f'(p)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$ □

微分均值定理在幾何上的意義

當我們將一函數 $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ 圖示於平面上, 若此函數連續且於區間 (a,b) 爲可微, 則我們可斷言, 在該圖形上必有一處 p 其斜率 $f'(p)$ 等於連接點 $(a,f(a))$ 與 $(b,f(b))$ 之直線斜率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$; 換言之, 二者平行如圖 2–16 所示.

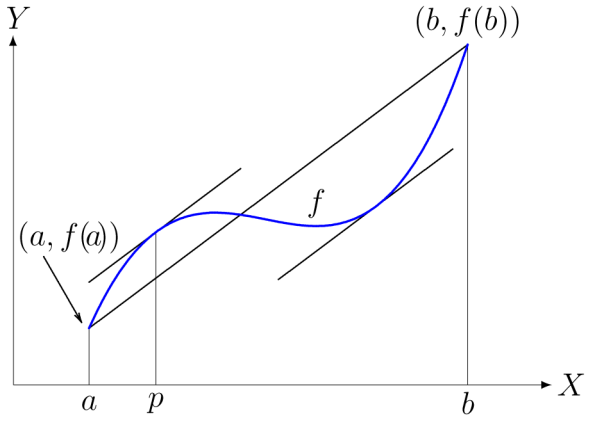


圖 2–16

若以上節之變率觀念而言, 微分均值定理乃說明： f 之值從時間 a 至時間 b 之平均變率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 等於 f 在某特定時間 p 之瞬時變率 $f'(p)$. 這也是本定理稱爲均值定理之理由.

系 2.14 [**零導數定理 (Zero Derivative Theorem)**]

設函數 f 在區間 I 上爲連續, 且在 I 之內部 $\overset{\circ}{I}$ 爲可微分; 若 $\forall\, x\in\overset{\circ}{I},\ f'(x)=0$, 則 f 於 I 上爲一常數.

【證】只需證明：若 $x_1,\ x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$, 則 $f(x_1) = f(x_2)$. 由於

- f 於 $[x_1, x_2]$ 上爲連續,
- f 於 (x_1, x_2) 上爲可微分,

故由微分均值定理知, 存在 $c \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

但由原設知 $f'(c) = 0$, 故 $f(x_2) = f(x_1)$.

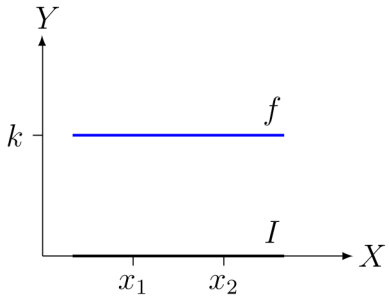


圖 2–17

系 2.15

設函數 $f,\ g$ 在區間 I 上爲連續, 且在 I 之內部 $\overset{\circ}{I}$ 爲可微分; 若 $\forall\, x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) = g'(x)$, 則存在常數 c 使得 $f(x) = g(x) + c,\ \forall\, x \in I$.

【證】設 $F\colon I \to \mathbb{R} : F(x) = f(x) - g(x)$. 顯然, 函數 F 在 I 上爲連續, 且在 I 之內部爲可微分, 再者 $\forall\, x \in \overset{\circ}{I}$,

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) = 0,$$

則由系 2.14 知, 存在 $c \in \mathbb{R}$, 使得 $\forall\, x \in I$, 均有 $F(x) = c$, 亦即

$$\forall\, x \in I,\ f(x) = g(x) + c.$$

(參見下圖).

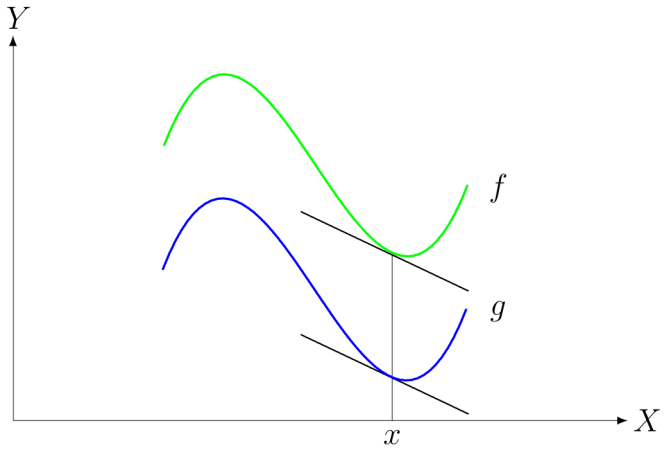


圖 2–18 □

系 2.16 (導數與函數之單調性)

設函數 f 在區間 I 上爲連續, 且在 I 之內部 $\overset{\circ}{I}$ 爲可微; 則

(1) $(\forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) > 0) \Rightarrow$ (f 於 I 上爲遞增);

(2) $(\forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \geq 0) \Leftrightarrow$ (f 於 I 上爲不減少);

(3) $(\forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) < 0) \Rightarrow$ (f 於 I 上爲遞減);

(4) $(\forall x \in \overset{\circ}{I},\ f'(x) \leq 0) \Leftrightarrow$ (f 於 I 上爲不增加).

【證】(1) 設 $x_1, x_2 \in I$ 且 $x_1 < x_2$. 今考慮 f 於區間 $[x_1, x_2]$ 上. 顯然, f 於 $[x_1, x_2]$ 上爲連續, 且在 (x_1, x_2) 上爲可微分. 由均值定理知: 存在 $p \in (x_1, x_2)$ 使得

$$f'(p) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

故 $f(x_2) - f(x_1) = f'(p)(x_2 - x_1) > 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

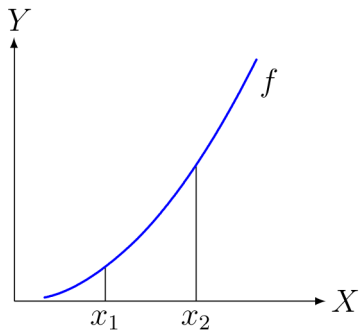


圖 2–19

(2) $\forall x \in \overset{\circ}{I}$, 考慮差商函數

$$f_x^*(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

若 f 於 I 上爲不減函數, 則 $\forall t \in I \setminus \{x\}, f_x^*(t) \geq 0$, 故由極限之保序定理知

$$f'(x) = \lim_{t \to x} f_x^*(t) \geq 0.$$

反之, 若 $f'(x) \geq 0$, 仿 (1) 之證明可得 f 於 I 上爲不減.

(3) 仿 (1) 之證.

(4) 仿 (2) 之證. □

例 1. 試證明方程式 $2x^3 - 3x^2 + 6x + 6 = 0$ 恰有一實根且非重根.

【解】考慮函數

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x + 6.$$

1° 由於 f 之值域爲 $\mathbb{R}$ (見第一章第六節例 5), 知 $f(x) = 0$ 至少有一實根.

2° 因 $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 6x^2 - 6x + 6 = 6\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] > 0.$$

知 f 爲遞增函數, 原方程式不可能有二相異實根.

3° 若該根 a 爲重根, 則 f 可以表爲 $f(x)=2(x-a)^3$, 此時, 其導函數 $f'(x)=6(x-a)^2$ 並不恆正, 與 $f'>0$ 相矛盾, 是以原方程式不可能有重根. □

例 2. 設函數 $f\colon [0,8]\to\mathbb{R}: f(x)=x^{1/3}(x-7)^2$. 試求 f 於何處有極大值及極小值.

【解】當 $x\in(0,8]$ 時,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-7)^2+2x^{1/3}(x-7)\\ &= \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-7)(x-7+6x)\\ &= \frac{7}{3}x^{-2/3}(x-7)(x-1), \end{aligned}$$

其次討論在點 0 之可微性, 由於 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{1/3}(x-7)^2}{x}=+\infty$, 知 f 在點 0 不爲可微, 故 $Z_{f'}\cup(D_f\setminus\mathring{D}_f)\cup S_f=\{0,1,7,8\}$.

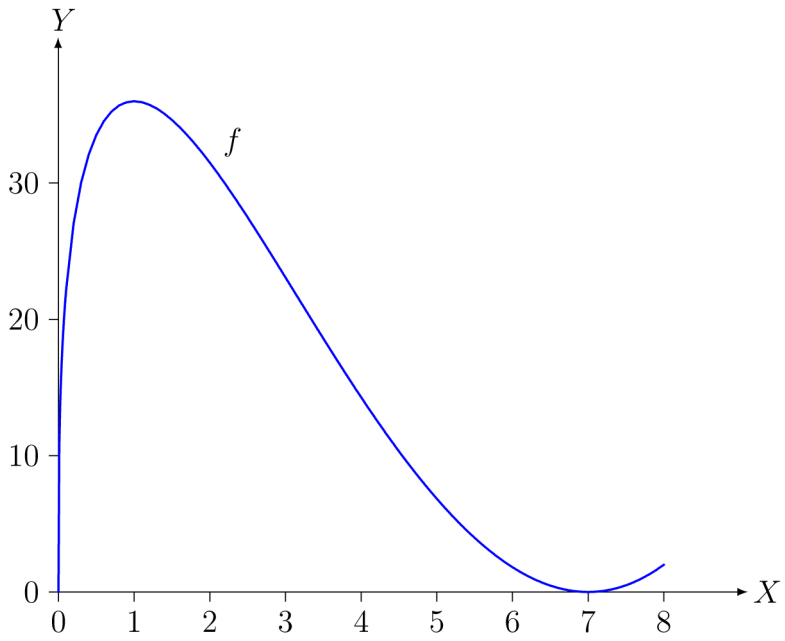


圖 2–20

又由下表,

x	0		1		7		8
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
說明	min	↗	max	↘	min	↗	max

知 f 在點 0 及點 7 有相對極小, 而於點 8 及點 1 有相對極大; 其次, 因

$$f(0)=f(7)=0<f(8)=2<f(1)=36,$$

知 f 在點 0 及點 7 有最小值 0, 於點 1 有最大值 36. (參見圖 2–20). □

註： 討論極值問題時, 繪表乃是最常被使用的方法.

例 3. 今有長度爲 l 之線段, 應如何將其切成兩段, 並以之各圍成一圓及一正三角形, 而使其面積和爲最大? 又最小時切法又應如何?

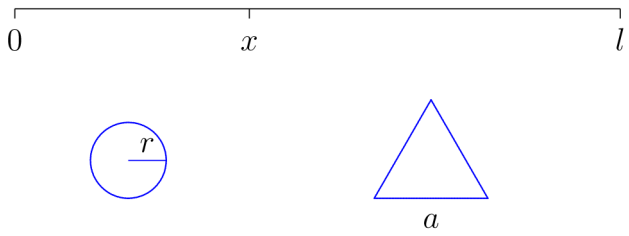


圖 2–21

【解】令圍成圓之圓周長爲 x, 則圍成正三角形之長爲 $l-x$, 若圓半徑爲 r, 三角形之邊長爲 a, 應有

$$r=\frac{x}{2\pi},\ a=\frac{l-x}{3},$$

是以面積和爲

$$A\colon [0,l]\to\mathbb{R}\colon A(x)=\pi\Big(\frac{x}{2\pi}\Big)^2+\frac{\sqrt{3}}{4}\Big(\frac{l-x}{3}\Big)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(l-x)^2}{12\sqrt{3}}.$$

故

$$A'(x)=\frac{x}{2\pi}-\frac{l-x}{6\sqrt{3}}=0\ \Leftrightarrow\ x=\frac{\pi l}{3\sqrt{3}+\pi}.$$

$Z_{A'}=\Big\{\dfrac{\pi l}{3\sqrt{3}+\pi}\Big\},\ S_A=\varnothing,\ D_A\setminus\mathring{D}_A=\{0,l\}$. 由表

x	0		$\dfrac{\pi l}{3\sqrt{3}+\pi}$		l
$A'(x)$		$-$	0	$+$	
說明	max	↘	min	↗	max

以及

$$A(0)=\frac{l^2}{12\sqrt{3}}<A(l)=\frac{l^2}{4\pi},$$

知, 以 l 全長圍成圓時面積和最大, 以 $\dfrac{\pi l}{3\sqrt{3}+\pi}$ 圍成圓, 其餘圍成正三角形, 其面積和最小. □

註： 本題尚有其他解法, 由於 $A(x)$ 爲二次多項式, 故可利用配方法解之; 或在求出三臨界點後, 利用第一章之極值定理, 比較其函數值之大小, 但應說明 A 連續於緊緻區間 $[0,l]$.

定理 2.17 （**導數之極限定理**）

設函數 f 在 $N_\delta^*(p)$ 爲可微且在點 p 爲連續.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to p} f'(x)=b\in\mathbb{R}$, 則 $f'(p)=b$;

(2) 若 $\lim\limits_{x\to p} f'(x)=\pm\infty$, 則 $\lim\limits_{x\to p} f_p^*(x)=\pm\infty$, (即 f 在點 p 不爲可微.)

【證】(1) 若 x 爲 $N_\delta^*(p)$ 之任一元素, 今考慮 f 於區間 $[p,x]$ (或 $[x,p]$), 由微分均值定理知, 存在 c_x, 介於 p 與 x 之間, 使得

$$f'(c_x)=\frac{f(x)-f(p)}{x-p}. \tag{1}$$

由於 $\lim\limits_{x\to p} f'(x)=b$, 應有

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\delta_1\in(0,\delta)\ \text{使得}\ (\forall\,x)(0<|x-p|<\delta_1\ \Rightarrow\ |f'(x)-b|<\epsilon), \tag{2}$$

故

$$\begin{aligned} 0<|x-p|<\delta_1\ &\Rightarrow\ 0<|c_x-p|<\delta_1\\ &\Rightarrow\ |f'(c_x)-b|<\epsilon,\quad [\text{由 (2)}]\\ &\Rightarrow\ \left|\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-b\right|<\epsilon,\quad [\text{由 (1)}]. \end{aligned}$$

亦即

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\delta_1\in(0,\delta)\ \text{使得}\ (\forall\,x)\left(0<|x-p|<\delta_1\ \Rightarrow\ \left|\frac{f(x)-f(p)}{x-p}-b\right|<\epsilon\right).$$

是以 $f'(p)=\lim\limits_{x\to p}\dfrac{f(x)-f(p)}{x-p}=b$.

(2) 仿 (1) 之證明, 讀者自證之. □

註： 上述定理亦可推廣爲單側極限之情形, 只需將鄰近 $N_\delta^*(p)$ 改爲 $(p,p+\delta), x\to p$ 改爲 $x\to p^+, f'(p)$ 改爲 $f'_+(p)$. 左側情形仿之.

例 4. 試利用定理 2.17 以討論函數 $f(x)=\sqrt{x^3-x^4}$ 在點 0 及點 1 之可微性.

【解】在第二節例 4 中, 我們曾利用"可微"之定義討論 f 在上述二點之可微性. 在此, 已知

$$\forall\,x\in(0,1),\ f'(x)=\frac{3x^2-4x^3}{2\sqrt{x^3-x^4}}=\frac{3x^{1/2}-4x^{3/2}}{2\sqrt{1-x}}.$$

因爲 $\lim\limits_{x\to1^-} f'(x)=-\infty$, 故知 f 在點 1 不爲可微分. 其次 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$, 是以 $f'(0)=0$. □

定理 2.18 （**Cauchy 微分均值定理**）

設

(1) $f,\ g$ 在區間 $[a,b]$ 上爲連續；

(2) $f,\ g$ 在區間 (a,b) 上爲可微.

則存在 $p\in(a,b)$ 使得 $\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(p) \\ g(b)-g(a) & g'(p) \end{vmatrix}=0.$

【證】設

$$F\colon [a,b]\to\mathbb{R}\colon F(x)=\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(x)-f(a) \\ g(b)-g(a) & g(x)-g(a) \end{vmatrix},$$

則 $\forall\, x\in(a,b)$,

$$F'(x)=\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(x) \\ g(b)-g(a) & g'(x) \end{vmatrix},$$

顯然, 函數 F 在 $[a,b]$ 上爲連續, 且在 (a,b) 上爲可微分, 再者 $F(a)=F(b)=0$, 由 Rolle 定理知存在 $p\in(a,b)$ 使得 $F'(p)=0$, 亦即

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(p) \\ g(b)-g(a) & g'(p) \end{vmatrix}=0.$$ □

我們可利用 Cauchy 均值定理以證明微分均值定理, (只需令 $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}\colon g(x)=x$), 因此 Cauchy 均值定理乃微分均值定理之推廣, 但用途卻少了許多, 在第四章之 l'Hospital 規則之證明就需要用到 Cauchy 均值定理.

與微分均值定理相似, Cauchy 均值定理亦有其幾何意義, 讀者可參閱書後之附錄四.

以下我們將介紹一定理, 它的用途不大, 僅在第五章不定積分中說明某些不連續函數之不定積分並不存在, 少了此一定理, 諸如 $\int [x]\,dx=?$ 之問題則難以回答.

定理 2.19 （**導函數介值定理**）

設 f 於區間 $[p,\ q]$ 上爲可微.

(1) 若 $f'(p)<c<f'(q)$, 則存在 $t\in(p,q)$ 使得 $f'(t)=c$;

(2) 若 $f'(p)>c>f'(q)$, 則存在 $t\in(p,q)$ 使得 $f'(t)=c$.

【證】(1) 若 $f'(p) < c < f'(q)$, 令 $F\colon [p,\, q] \to \mathbb{R} : F(x) = f(x) - cx$. 顯然

$$\begin{aligned} F \text{ 於 } [p,\, q] \text{ 上爲可微} &\Rightarrow F \text{ 於 } [p,\, q] \text{ 爲連續} \\ &\Rightarrow \exists t \in [p,q] \text{ 使得 } F \text{ 在點 } t \text{ 有最小值} \\ &\Rightarrow \exists t \in (p,q) \text{ 使得 } F \text{ 在點 } t \text{ 有最小值}, \quad [\star] \\ &\Rightarrow \exists t \in (p,q),\ F'(t) = 0 \\ &\Rightarrow \exists t \in (p,q),\ f'(t) - c = 0. \end{aligned}$$

[⋆] 因爲 $F'(p) = f'(p) - c < 0$, 故知 $t \neq p$. 又因 $F'(q) = f'(q) - c > 0$, 故知 $t \neq q$.

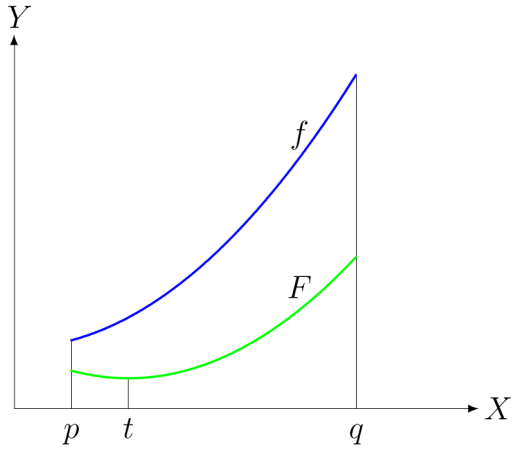


圖 2–22

(2) 若 $f'(p) > c > f'(q)$, 利用 $g = -f$ 及 (1) 即可證得定理之結論. □

本定理說明：若 f 於區間 I 上爲可微, 則其導函數 f' 之映像 $f'(I)$ 必爲一區間, 即使 f' 不爲一連續函數, 如

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

§ 2.6 微分

Leibniz 在微積分發展之初, 給了導數一個符號

$$\frac{dy}{dx}, \qquad ①$$

其中

dx 表自變數 x 之增量, 是個無限小 (infinitesimal)†, ②

† 意即 $|dx|$ 爲一無限小之正數.

$$dy = f(x+dx) - f(x) \text{ 則爲對應之 } y = f(x) \text{ 之增量,} \qquad ③$$

①又可拆爲

$$dy = \frac{dy}{dx}\,dx. \qquad ④$$

討論

一. 上述難之 dx 顯然是個矛盾之怪物, $\frac{|dx|}{2}$ 是否小於 $|dx|$ 呢? 其實 $\frac{dy}{dx}$ 乃表示函數 f 在點 x 之導數, 亦即

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x},$$

符號 $\frac{dy}{dx}$ 應視爲一體, 不應視爲 dy 與 dx 之商, 此一符號之缺點爲：1° 令初學者以爲它只是二數之商, 而未能注意『它』是極限值, 2° 令初學者以爲導數爲一整體性概念, 事實上, 導數乃爲一局部性概念, 因此有人加以修正爲：

$$\frac{d}{dx}f(p) = \lim_{t\to p}\frac{f(t)-f(p)}{t-p};$$

或

$$\frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

其實符號 $\frac{dy}{dx}$ 亦有二項優點： 1° 由符號本身即可知悉導數爲一商數, 2° 商數之分子與分母之絕對值皆極其微小. (不過數學並不允許任何導致矛盾之缺點, 即使它有再多的優點).

二. 爲解決 ③ 與 ④ dy 與 dx 拆離之問題, 我們將在以下之定義中把 $dy = f'(x)dx$ 寫爲 $df(p,h) = f'(p)\cdot h$, 以 h 代替 dx, 但無『無限小』之意, 不過在此我們必須說明一事, $dy = f'(x)dx$ 雖非一良好概念, 但在不定積分與定積分之計算有其方便之處, 屬於『計算技術』的層次, 因此不應加以全面揚棄, 我們將在第五、六章加以說明. 此外, $df(p,h) = f'(p)\cdot h$ 有近似值之功能, 儘管它的近似性並不很好, 但它將帶給微積分初學者有關『近似值』的初步概念.

定義 2.20

設 f 爲一函數, 我們稱函數

$$df : D_{f'}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R} : df(x,h) = f'(x)\cdot h,$$

爲 f 之**微分函數** (differential function), 而稱 $df(x,h)$ 爲 f 在點 x 對於 (增量) h 之**微分** (differential of f at x relative to h).

在上述定義中, 我們以 $df(x,h)=f'(x)h$ 取代傳統的寫法 $dy=y'\,dx$, 但我們不再限制 h 之絕對值很小, 它是個變數, 正、負、零皆可, 其對應之 $df(x,h)$ 亦可能爲正、負或零, 在介紹以下定理之後, 我們再來探討"微分函數"之用途.

定理 2.21

設 f 爲一函數, $p\in D_f\cap(D_f)'$. 則下列二陳述爲對等 :

(1) f 在點 p 爲可微分.

(2) 存在一 $m\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\eta(x)}{x-p}=0$, 內 $\eta(x)=f(x)-f(p)-m(x-p)$.

【證】1° 若 f 在點 p 爲可微分, 則按定義 2.1, $f'(p)$ 存在. 令 $m=f'(p)$, 則

$$\lim_{x\to p}\frac{\eta(x)}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)-f'(p)(x-p)}{x-p}=f'(p)-f'(p)=0,$$

2° 若存在一 $m\in\mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{\eta(x)}{x-p}=0$, 則

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{f(x)-f(p)-m(x-p)+m(x-p)}{x-p}=m,$$

是以知 f 在點 p 爲可微分. □

若 f 在點 p 爲可微分, 令 $m=f'(p)$, $g(x)=f(p)+m(x-p)$, 則 g 爲過點 $(p,\ f(p))$ 斜率爲 $m=f'(p)$ 之直線 (即切線), 此時

$$\eta(x)=f(x)-(f(p)+m(x-p))=f(x)-g(x),$$

則由本定理知

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)-g(x)}{x-p}=\lim_{x\to p}\frac{\eta(x)}{x-p}. \qquad (\star)$$

乃表示 $f(x)-g(x)$ 趨近於 0 較 $x-p$ 趨近於 0 爲快. 又令 $h=x-p$, 則 $(\star)$ 式可寫爲

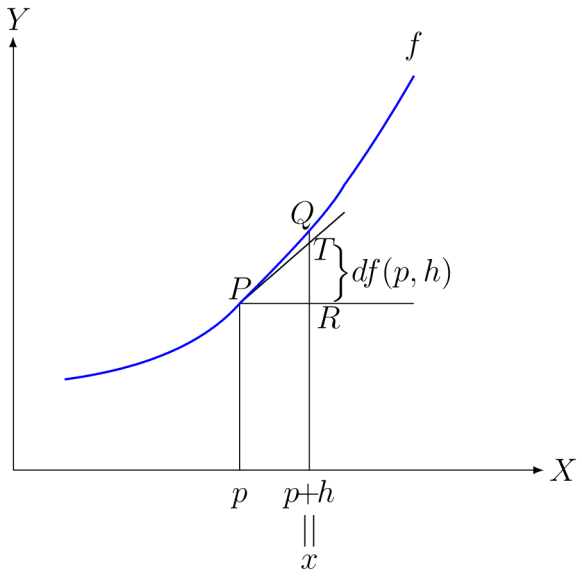
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)-f'(p)h}{h}=0.$$

乃表示 $f(p+h)-f(p)-df(p,h)$ 趨近於 0 較 h 爲快.

若以圖形說明 : 圖中 $QR=f(p+h)-f(p)$ 表示 f 之增量, $\overleftrightarrow{PT}$ 爲在點 P 之切線, 其斜率爲 $f'(p)$, 故 $f'(p)h=df(p,h)$ 爲 TR, 而 QR 與 TR 之差爲

$$TQ=\big|f(p+h)-f(p)-df(p,h)\big|,$$

比起 $PR = |h|$ 來甚小.



- 左圖中 $TQ = |\eta(x)|$.
- 讀者宜留心, 此圖中 $f'(p) > 0$ 且 $h > 0$, 但應考慮二者不皆爲正之情形, (讀者可自繪圖形).

圖 2–23

在微積分中, 近似值與誤差之觀念常被提到, 爲便於今後之討論, 我們界定如下 :

定義 2.22

若以 A 爲 V 之**近似值** (approximate value), 而 E 與 V 及 A 之關係爲

$$V = A + E,$$

則稱 V 爲**真值**(true value), 而稱 E 爲 A 對 V 之**誤差** (error).

當近似值 A 小於 眞值 V 時, 誤差 E 爲正; 當近似值 A 大於眞值 V 時, 誤差 E 爲負. 當然, 我們希望 A 與 V 之值很靠近, 因此我們常要求誤差之絕對值 $|E|$ 很小, 而不是 E 本身很小.

例如我們欲估計 π,

- 若取 $A_1 = 4$ 爲近似值, 則誤差 $-0.9 < E_1 < -0.8$,
- 若取 $A_2 = 3$ 爲近似值, 則誤差 $0.14 < E_2 < 0.15$.

雖然 $E_1 < E_2$, 但若考慮絕對值, 由於 $|E_1| > |E_2|$, 故近似值 A_2 優於 A_1.

微分函數之用途

設 f 爲一可微分函數, 若令定理 2.21 中之 x 爲 $p + h$, 則由定理之後的說明知, 當 $|h|$ 很小時, $|\eta(x)|$ 更微不足道, 是以

$$f(p + h) - f(p) = f'(p) \cdot h + \eta(x) \approx f'(p) \cdot h = df(p, h).$$

換言之， 我們可以 $f'(p)h$ 可做爲 $f(p+h)-f(p)$ 之近似值.

在此提醒讀者 : 以微分 (differential) 方法求一函數值之近似值, 誤差之絕對值可能稍大, 故此法並非十分理想. 第四章中我們將介紹另一種方法, 我們可控制誤差至吾人所設定之範圍內.

例 1. 求 $\sqrt{4.01}$ 之近似值.

【解】設 $f(x)=\sqrt{x},\ p=4,\ h=0.01$, 則

$$\begin{aligned}\sqrt{4.01} &= f(4.01)=f(4+0.01)\\ &= f(p+h)\\ &\approx f(p)+f'(p)\cdot h\\ &= f(4)+f'(4)\cdot 0.01\\ &= \sqrt{4}+\frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot 0.01\\ &= 2.0025.\end{aligned}$$ □

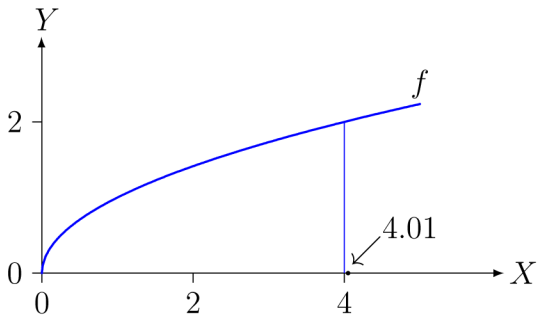


圖 2–24

例 2. 設 $H(t)$ 表男生在 t 歲時之身高 (單位: 公分, 年齡以足歲計), 假設已知 $H'(12)=3.8$ (公分/年), 若某男生十二歲生日時爲 150 公分, 試估計其三個月後身高之近似值.

【解】由於

$$H(12.25)\approx H(12)+H'(12)\cdot(12.25-12)=150+3.8\times 0.25=150.95\text{ cm},$$

故其三個月後身高之近似值爲 150.95 公分. (讀者是否注意到 $H'(12)=3.8$ 乃說明在 12 歲左右, 每年約長高 3.8 公分.) □

由於計算機及掌上計算器的發明, 利用微分函數方法以求近似值已不具實用價值, 但當手邊沒有計算工具時, 此法或可派上用場.

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

第 二 章 習 題

注意：本習題中, $[\cdot]$ 乃最大整數函數.

導數之計算

2-1 先求下列各函數之定義域、再求其導函數:

(a) $f(x) = x^{1/3}$;

(b) $f(x) = (x + |x|)^{3/4}$;

(c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$;

(d) $f(x) = |x| \cdot [x]$.

2-2 設函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{否則}, \end{cases}$

(a) 試證 : f 在點 0 爲可微分, 並求 $f'(0)$;

(b) 試問 f 在點 $p \neq 0$ 是否爲可微分?

2-3 設函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 滿足 $f(0) \neq 0$ 及 $f(a+b) = f(a)f(b),\ \forall\, a, b \in \mathbb{R},$

(a) 試證: $f(0) = 1$;

(b) 若 f 在點 0 爲可微分, 試證 : f 在任何點 c 皆爲可微分, 且 $f'(c) = f(c) \cdot f'(0)$.

2-4 設函數 $f\colon [0, 3] \to \mathbb{R} : f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$.

(a) 試討論 f 在點 1 是否爲可微分?

(b) 試求 $f'(\frac{1}{2}) =$?

2-5 設 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1},\ g(x) = x - 1, h(x) = x^2$, 試求合成函數 $h \circ g \circ f$ 之導函數.

2-6 試求 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ 之 n 階導函數.

2-7 設 $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, 試求 f 之導函數.

2-8 設已知 $f(2) = 2,\ f'(2) = 9,\ f''(2) = 12,\ f(4) = 45,\ f'(4) = 52,\ f''(4) = 24.$ 試求 $(f \circ f)''(2) =$?

切線與變率

2-9 設 $f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = 2x^2 + k.$

(a) 試求 k 值以使 f 之圖形與 g 之圖形相切.

(b) 繪出上述二函數之圖形 (在同一圖上).

2-10 設函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{若 } x \geq 0, \\ ax + b, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$

(a) 試求 a, b 值以使 f 於點 0 爲可微分.

(b) 繪出函數之圖形.

[提示] 利用連續性及可微性.

2-11 設曲線 $y = x^2 - 1$ 上兩點 $P(0, -1)$ 及 $Q(1, 0)$. 試求此曲線與弦 PQ 平行之切線方程式; 並繪出其圖形.

2-12 一身高 180 公分的人, 距高度 3 公尺之路燈 2.4 公尺處, 以 每秒 1 公尺之速率走向路燈, 試問人影縮小之速率爲何?

[提示] 設行走中之人燈距離爲 x, 先求出影長 y 與 x 之關係.

2-13 設函數 $f(x) = (x - a)^{1/3}$, 內 a 爲一常數. 試求:

(a) f 之導函數;

(b) 過點 $(a, 1)$ 且切於 f 之圖形的直線方程式.

2-14 (a) 試繪出 $y = x^2$ 及 $y = -x^2 + 10x - 17$ 二曲線之圖形.

(b) 試求上述二曲線之公切線.

2-15 設直線 $y = mx + b$ 爲函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 圖形之一切線, 試證 $y = mx + 2b$ 爲函數 $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = 2f(\frac{x}{2})$ 圖形之一切線.

2-16 一球狀之汽球以每分鐘 5 立方公尺的速率灌入氦氣, 試問當半徑爲 1.5 公尺時, 其表面積之變率爲若干?

均值定理與應用

2-17 設一長方形區域之兩頂點位於拋物線 $y = 6 - x^2$ 上, 其另一邊在 X 軸上. 試問 : 此長方形之最大面積爲若干?

2-18 設有一半徑爲 r 之球. 試求外接於此球的正圓錐體之最小體積.

2-19 某城市發現流行性感冒, 衛生單位之官員稱感染人數爲 $P(t) = 50t^2 - t^3$,
(t 之單位: 天, $t = 0$ 表三月三日 0 時),

(a) 試問此函數之定義域爲何?

(b) 試問何日何時流行性感冒之人數最多?

(c) 試問何日何時此流行性感冒之傳染遞增速度最快? 何時遞減速度最快?

2-20 試證 : $\forall\, x \in (0,\, 1) \cup (1,\, +\infty),\ \ 2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$.

[提示] 可利用均值定理或者證明 $2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ 有最小值 3.

2-21 試利用均值定理證明 : 若 r 爲大於 1 之有理數, 則

$$ra^{r-1}(b-a) < b^r - a^r < rb^{r-1}(b-a),$$

內 $0 < a < b$.

2-22 舉一反例以說明 : 若函數 f 之定義域不爲一區間, 則陳述

『 $f' = 0 \ \Rightarrow\ f$ 爲一常數函數 』

未必爲眞.

2-23 設 $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ 滿足 $x, y \in \mathbb{R}^*,\ |f(x) - f(y)| \le (x-y)^2$. 試證 : f 必爲一常數函數.

2-24 試問 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 於何處有極大值? 於何處有極小值?

2-25 設 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 爲連續, 已知 $\forall\, y > 0,\ f'(y) = \dfrac{y-1}{\sqrt{y}}$, 次設 $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F(x) = f(x^4)$.

(a) 試求 $F'(x), \forall\, x \neq 0$;

(b) 試討論 F 在點 0 之可微性. [提示] 利用導數之極限定理.

2-26 (a) 設 f 爲一可微於點 0 之偶函數, 試證 : $f'(0) = 0$.

(b) 對於 (a) 題, 試指出以下證明所犯錯誤之處 :

$$\begin{aligned} f \text{ 爲偶函數} &\ \Leftrightarrow\ f(-x) = f(x) \\ &\ \Rightarrow\ -f'(-x) = f'(x), \quad (\text{利用連鎖律}) \\ &\ \Rightarrow\ -f'(-0) = f'(0) \\ &\ \Rightarrow\ f'(0) = 0. \end{aligned}$$

2-27 設 f 在區間 $[0,1]$ 爲連續, 且 $f(0) = 0$, 次設 f' 在 區間 $(0,1)$ 存在且爲遞增. 試證 : 函數 $g\colon (0,1) \to \mathbb{R} : g(x) = f(x)/x$ 亦爲遞增函數.

Chapter 3

特殊函數

到目前爲止我們所認識的函數僅止於代數函數. 然而, 在自然科學及應用科學上我們所遇到的函數, 以及將來可能發現的函數絕不止三五類. 本章我們將研究幾個最基本的函數, 諸如三角函數、指數函數、對數函數及雙曲函數等及其導函數; 其他的函數, 有些可由上述所謂的特殊函數以及有理函數組合而成, 有些則依需要而建構. 我們先界定三角函數與指數函數, 然後再去界定其他的特殊函數.

§ 3.1 反函數

在預篇中, 我們已介紹過反函數之定義如下：設 $f\colon A \to B$ 爲一函數, 今令

$$f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\},$$

若 f^{-1} 爲一函數, 則稱 f 爲可逆, 並稱 f^{-1} 爲 f 之反函數. 由於點 (x,y) 與 點 (y,x) 對稱於直線 $y=x$, 是以反函數 f^{-1} 之圖形亦與 f 之圖形對稱於直線 $y=x$, 參閱圖 3–1 及圖 3–2. 三角、指數、對數及雙曲等函數之反函數在理論及應用上皆十分重要, 在本章之始, 深入探討反函數及其導函數觀念實屬必要.

定理 3.1 (反函數定理)

設 $f\colon A \to B$ 爲一函數, 則以下二陳述爲對等：

I. f 爲一對射；

II. 存在唯一自 B 映至 A 之函數 g 使得 $g \circ f = I_A$ [†], $f \circ g = I_B$.

其中 $I_A\colon A \to A : I_A(x) = x$, (稱爲 A 上之恆等函數); I_B 同理.

【證】參見附錄一. □

† $g \circ f = I_A \Leftrightarrow \Big(g(f(x)) = x,\ \forall x \in A\Big)$.

註： (1) 上述定理中之函數 g 即爲 f 之反函數, 因爲若令 $y=f(x)$, 則 $x=f^{-1}(y)$, 故 $g(y)=g(f(x))=x=f^{-1}(y),\ \forall\, y\in B$.

(2) 本定理說明函數可逆之充要條件爲該函數爲對射. 其實若函數 f 爲嵌射, 只需將函數改爲 $f\colon A\to R_f$, 則 f 爲對射矣.

例 1. 試求 $f(x)=\sqrt{2rx-x^2}$ 之反函數, 其中 $0\le x\le r$.

【解】 1° 由於 $f'(x)=\dfrac{2r-2x}{2\sqrt{2rx-x^2}}>0,\ \forall\, x\in(0,r)$. 是以 f 於區間 $[0,r]$ 爲遞增; 又 $f(0)=0,\ f(r)=r$, 故知 f 之值域爲 $[0,r]$, 換言之, $f\colon[0,r]\to[0,r]$ 爲對射.

2° 其次, 因 $0\le x,\ y\le r$,

$$\begin{aligned} y=\sqrt{2rx-x^2} &\Leftrightarrow\ y^2=2rx-x^2\\ &\Leftrightarrow\ r^2-y^2=r^2-2rx+x^2\\ &\Leftrightarrow\ r-x=\sqrt{r^2-y^2}\\ &\Leftrightarrow\ x=r-\sqrt{r^2-y^2}, \end{aligned}$$

故 $f^{-1}\colon[0,r]\to[0,r]:f^{-1}(y)=r-\sqrt{r^2-y^2}$.

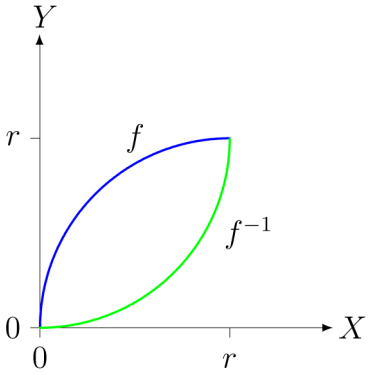


圖 3–1 □

本章中每當我們介紹一個函數時, 不但要討論其微分法並且要討論其反函數及它的微分法. 因此我們先研究如何微分某一函數之反函數.

定理 3.2 (反函數之導數定理)

設 $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲一嵌射且連續之函數.

(1) 若 f 在點 x_0 爲可微且 $f'(x_0)\neq 0$, 則 $(f^{-1})'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$, 其中 $y_0=f(x_0)$.

(2) 若 f 在點 x_0 爲可微且 $f'(x_0)=0$, 則 f^{-1} 在點 $y_0=f(x_0)$ 不爲可微分 .

(3) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=+\infty$, 則 $(f^{-1})'(y_0)=0$, 其中 $y_0=f(x_0)$.

【證】爲方便計, 在以下之證明中令 $g=f^{-1}$.

(1) 仿照上一章微分連鎖律之證明, 設

$$f^*\colon[a,b]\to\mathbb{R}:f^*(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & \text{若 } x\neq x_0,\\ f'(x_0), & \text{若 } x=x_0.\end{cases}$$

考慮 g 在點 y_0 之差商函數, 其中 $y \neq y_0$,

$$g^*_{y_0}(y) = \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{\dfrac{y-y_0}{g(y)-g(y_0)}}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{f(g(y))-f(x_0)}{g(y)-x_0}} = \frac{1}{f^*(g(y))},$$

由於 g 在點 y_0 爲連續 †且 f^* 在點 $x_0 = g(y_0)$ 爲連續, 故 $f^* \circ g$ 在 y_0 亦爲連續, 是以

$$\lim_{y\to y_0} g^*_{y_0}(y) = \lim_{y\to y_0} \frac{1}{f^*(g(y))} = \frac{1}{f^*(g(y_0))} = \frac{1}{f^*(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

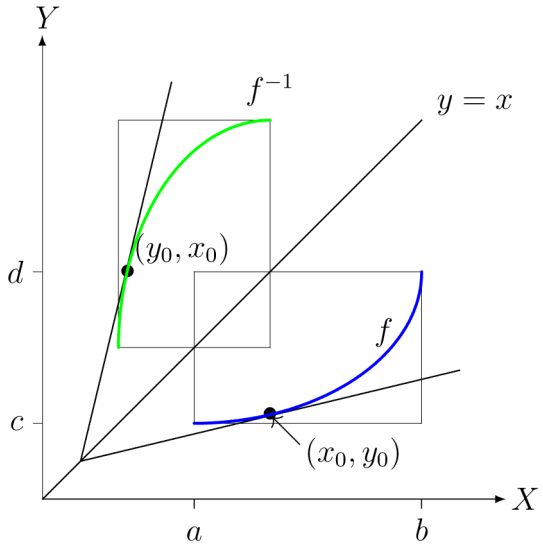


圖 3–2

(2) 假定 g 於點 y_0 爲可微分, 已知 $f'(x_0) = 0$, 則由連鎖律知, 函數 $g(f(x)) = x$ 於點 x_0 亦爲可微分, 則得

$$1 = D(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(y_0) \cdot 0 = 0,$$

顯然矛盾.

(3) 設

$$\hat{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R} : \hat{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}, & \text{若 } x \neq x_0, \\ 0, & \text{若 } x = x_0. \end{cases}$$

則由原設知 $\hat{f}$ 於點 x_0 爲連續, 是以 $\hat{f} \circ g$ 於點 y_0 爲連續, 故

$$g'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{g(y)-x_0}{f(g(y))-f(x_0)}$$
$$= \lim_{y\to y_0} \hat{f}(g(y)) = \hat{f}(g(y_0)) = 0. \qquad \square$$

圖 3–2 係以幾何方式表示 : 由於 f 在點 x_0 之切線與 f^{-1} 在點 y_0 之切線對稱於直線 $y = x$, 正說明 $f'(x_0)$ 與 $(f^{-1})'(y_0)$ 二者之倒數關係.

† 參見附錄二

§ 3.2 三角函數

三角函數與三角學之關係十分密切, 早在西元前二世紀, 希臘天文學家 Hipparchus 就開始有關三角學之研究, 其後在中國、印度、阿拉伯都有不少出色的成果, 十七世紀初, 法國數學家 Albert Girard 創立了今日大家所熟悉的三角函數符號 sin, cos, tan, $\cdots$ 等, 而十八世紀中瑞士的 L. Euler 則將三角函數推廣到複變數之情形, 限於篇幅, 本書將不涉及複數部分.

如果 sin 與 cos 均爲已知, 則令

$$\tan = \frac{\sin}{\cos},\ \cot = \frac{\cos}{\sin},\ \sec = \frac{1}{\cos},\ \csc = \frac{1}{\sin}.$$

sin 與 cos 之 傳統定義方法 爲: 設 P 爲平面上單位圓上之一點, 其與 X 軸之夾角爲 x (弳), (若自 X 軸以反時針方向計, 則 x 爲正, 否則爲負), P 之坐標爲 (a_x, b_x), 如圖 :

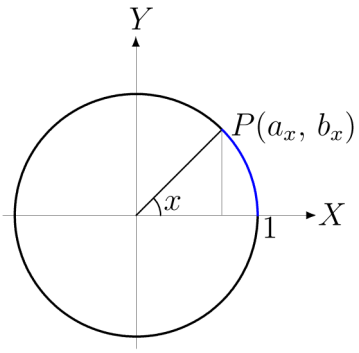


圖 3–3

$$\begin{cases} \sin\colon \mathbb{R} \to [-1,1] : \sin x = b_x, \\ \cos\colon \mathbb{R} \to [-1,1] : \cos x = a_x. \end{cases}$$

本書中, 我們將介紹 sin 與 cos 的另一種定義方式.

定義 3.3

若函數 $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 滿足

$$f' = g,\ g' = -f,\ f(0) = 0,\ g(0) = 1,$$

則稱 f 爲**正弦函數** (sine function), g 爲**餘弦函數** (cosine function), 並分別記爲 sin 及 cos.

換言之,

$$\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ 滿足 } \begin{cases} \sin' x = \cos x,\ \cos' x = -\sin x,\ \forall x \in \mathbb{R}, \\ \sin(0) = 0,\ \cos(0) = 1. \end{cases}$$

以上述微分方程式方法定義之二函數必須考慮兩個問題 :

(1) 存在性 : 我們將在第八章中, 利用冪級數理論可得, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots,$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

(2) 唯一性：若有二對函數

$$\begin{cases} f,\, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ 滿足 } f'=g,\ g'=-f,\ f(0)=0,\ g(0)=1, \\ f_1,\, g_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ 滿足 } f_1'=g_1,\ g_1'=-f_1,\ f_1(0)=0,\ g_1(0)=1, \end{cases}$$

我們將證明 $f=f_1,\ g=g_1$.

爲此, 令

$$\phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}:\phi(x)=(f(x)-f_1(x))^2+(g(x)-g_1(x))^2, \tag{$*$}$$

則 $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\phi'(x)&=2(f(x)-f_1(x))(f'(x)-f_1'(x))+2(g(x)-g_1(x))(g'(x)-g_1'(x))\\&=2(f(x)-f_1(x))(g(x)-g_1(x))-2(g(x)-g_1(x))(f(x)-f_1(x))=0,\end{aligned}$$

由此可知 ϕ 爲一常數函數 C; 又在 $(*)$ 式中以 0 代 x, 則知 $C=\phi(0)=0$, 是以證得：

$$\phi(x)=(f(x)-f_1(x))^2+(g(x)-g_1(x))^2=0,$$

由於任何實數之平方均不爲負, 故應有 $f(x)=f_1(x)$, $g(x)=g_1(x)$.

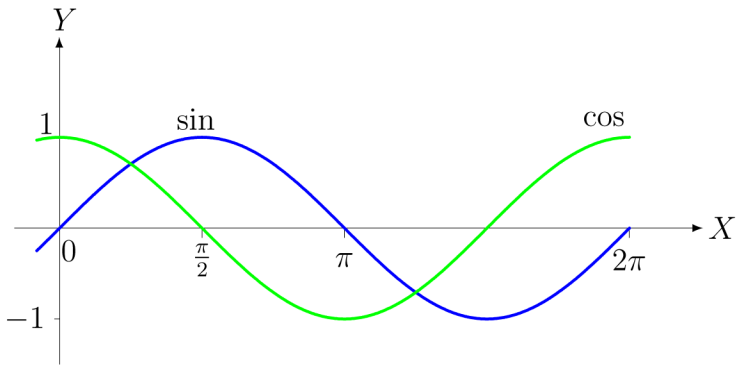


圖 3–4

三角函數之諸性質與高中時所學並無不同. 諸如：

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$

$$\sin(-x)=-\sin x,\ \cos(-x)=\cos x,$$

$$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y,$$

$$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y,$$

$$\sin(2x)=2\sin x\cos x,$$

$$\cos(2x)=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x,$$

皆可利用上述定義證得. 此外我們規定 $\pi = 2\min\{x > 0 \mid \cos x = 0\}$, 儘管如此定義方式與傳統上以圓周長除以直徑之定義方式不同. 但均可以證明二者並無不同.

定義 3.4

設 $D_1 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. 則稱函數

(1) $\tan\colon D_1 \to \mathbb{R} : \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ 爲**正切函數** (tangent function);

(2) $\cot\colon D_2 \to \mathbb{R} : \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ 爲**餘切函數** (cotangent function);

(3) $\sec\colon D_1 \to \mathbb{R} : \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ 爲**正割函數** (secant function);

(4) $\csc\colon D_2 \to \mathbb{R} : \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$ 爲**餘割函數** (cosecant function).

在此所界定之四函數連同正弦與餘弦函數, 統稱爲**三角函數** (trigonometric functions).

有關三角函數之一般性質及公式, 我們不擬重複研究. 本節的後半, 主要目的在於探討三角函數之微分法, 而下節我們將界定其反函數並求其導函數. 正切、餘切、正割、餘割四函數之圖形如圖 3–5, 3–6, 3–7 及 3–8.

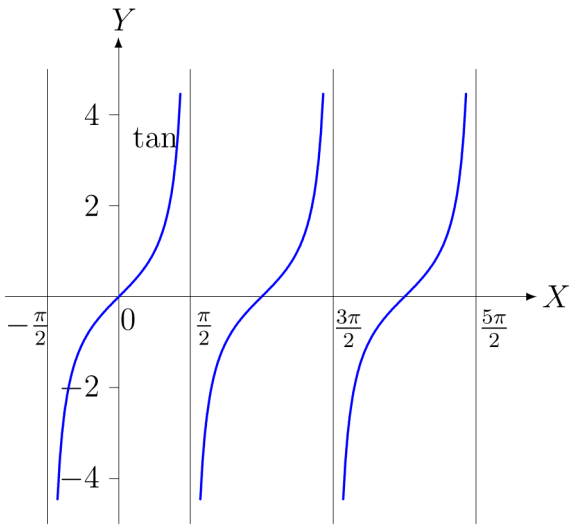


圖 3–5: 正切函數

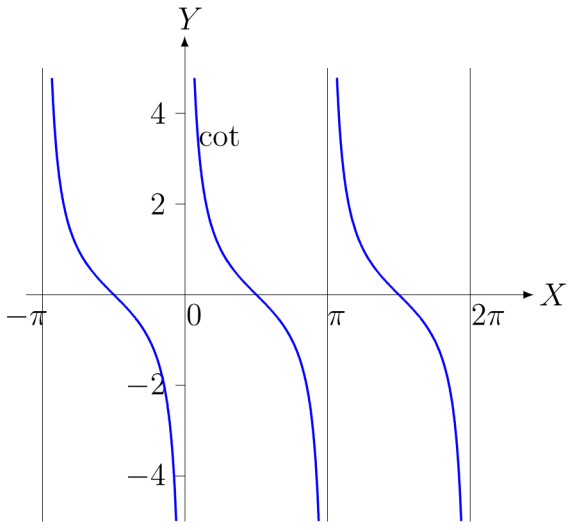


圖 3–6: 餘切函數

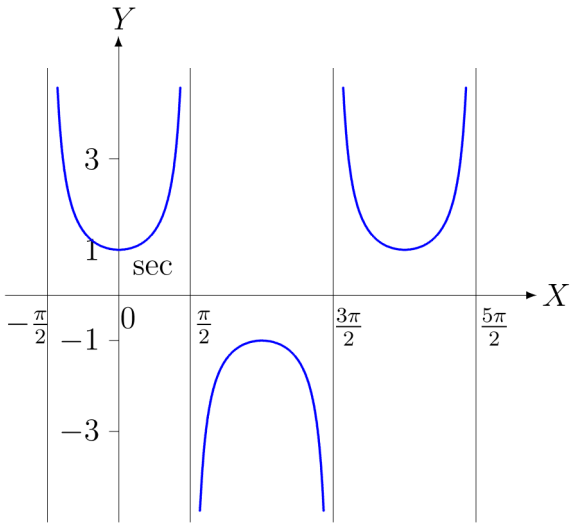


圖 3–7： 正割函數

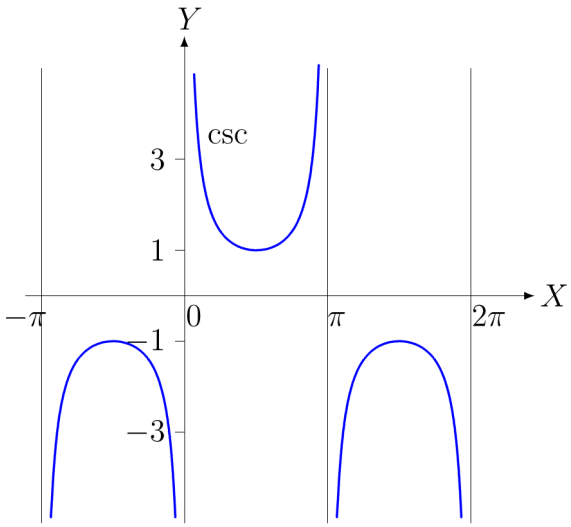


圖 3–8： 餘割函數

定理 3.5 （三角函數函數之導函數）

設 $D_1 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$, $D_2 = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 則

(1) $\forall\, x \in D_1,\ D \tan x = \sec^2 x$;

(2) $\forall\, x \in D_2,\ D \cot x = -\csc^2 x$;

(3) $\forall\, x \in D_1,\ D \sec x = \sec x \tan x$;

(4) $\forall\, x \in D_2,\ D \csc x = -\csc x \cot x$.

【證】利用函數之商之導數公式, 讀者自證之. □

例 1. 利用均值定理證明：$\forall\, x > 0,\ \sin x < x$.

【證】1° 先考慮 $x \in (0, \pi/2]$, 由於 sin 爲可微分函數, 故 sin 於區間 $[0, x]$ 上滿足均值定理之條件 (即定理之前提), 故存在 $p \in (0, x)$ 使得

$$\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin' p = \cos p < 1,$$

(因 $0 < p < x \le \pi/2$); 移項之, 得 $\sin x < x$.

2° 若 $x > \frac{\pi}{2}$, 則 $\sin x \le 1 < \frac{\pi}{2} < x$. □

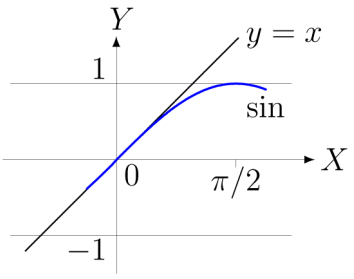


圖 3–9

例 2. 試證：$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

【解】利用導數之定義,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 0}{x-0}=D\sin x\,\big|_{x=0}=\cos x\,\big|_{x=0}=1. \qquad \square$$

§ 3.3 反三角函數

我們知道, 週期性函數必非嵌射, 故無反函數, 是以六個三角函數皆無反函數. 基於實際需要, 人們將函數之定義域予以適當的制限 (restrict), 而有所謂的反三角函數.

一. 反正弦函數

定理 3.6

設 $I=\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, 則函數 $\sin|_I\colon I\to[-1,1]$ 爲對射.

【證】1° $\sin|_I$ 爲嵌射; 此因

$$D\sin|_I(x)=D\sin x=\cos x>0,\ \forall\, x\in\overset{\circ}{I},$$

故知 $\sin|_I$ 爲遞增.

2° $\sin|_I$ 爲蓋射; 此乃因爲 I 爲一緊緻區間, 而 $\sin|_I$ 爲連續且爲遞增, 其最小值爲 $\sin(-\pi/2)=-1$, 其最大值爲 $\sin(\pi/2)=1$, 故其值域爲 $[-1,1]$. $\square$

由定理 3.1 知 $\sin|_I$ 爲可逆, 是以有以下之定義 :

定義 3.7

$\sin|_I$ 之反函數

$$\sin^{-1}\underset{\text{def}}{=}(\sin|_I)^{-1}\colon[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]:\sin^{-1}(y)=x\ \Leftrightarrow\ \sin|_I(x)=y$$

稱爲**反正弦函數** (arcsine function).

有些學者主張以 arcsin 表示反正弦函數, 而不使用 $\sin^{-1}$, 因爲部分初學者, 常將 $\sin^{-1}x$ 與 $(\sin x)^{-1}$ 相混. 圖 3–10 中有二曲線, 其中之藍色線乃反正弦函數之圖形.

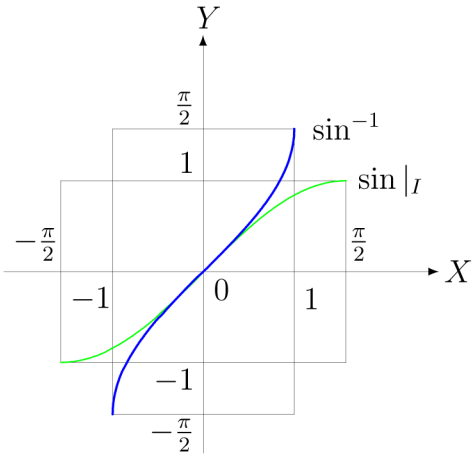


圖 3–10

定理 3.8

$\forall x \in (-1,1),\ D\sin^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 但 $\sin^{-1}$ 在點 -1 及 1 不爲可微.

【證】 1° $\forall x \in (-1,1)$, 令 $y = \sin^{-1}(x)$, 則 $x = \sin|_I(y)$ 且 $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$D\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin|_I'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin|_I^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2° 我們將利用第二章導數極限定理以證明：$\sin^{-1}$ 在點 -1 及點 1 不爲可微. 因爲

$$\lim_{x\to 1^-}(\sin^{-1})'(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to -1^+}(\sin^{-1})'(x) = \lim_{x\to -1^+}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty. \qquad \square$$

二. 反餘弦函數

定理 3.9

設 $I = [0,\pi]$, 則函數 $\cos|_I : I \to [-1,1]$ 爲對射 .

【證】 1° $\cos|_I$ 爲嵌射; 此因

$$D\cos|_I(x) = D\cos x = -\sin x < 0,\ \forall x \in (0,\pi),$$

故知 $\cos|_I$ 爲遞減.

2° $\cos|_I$ 爲蓋射; 此乃因爲 I 爲一緊緻區間, 而 $\cos|_I$ 爲連續且爲遞減, 其最小值爲 $\cos\pi = -1$, 其最大值爲 $\cos 0 = 1$, 故其值域爲 $[-1,1]$. □

定義 3.10

$\cos|_I$ 之反函數

$$\cos^{-1} \underset{\text{def}}{=} (\cos|_I)^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi] : \cos^{-1}(y) = x \ \Leftrightarrow\ \cos|_I(x) = y$$

稱爲**反餘弦函數** (arccosine function).

其圖形如圖 3–11.

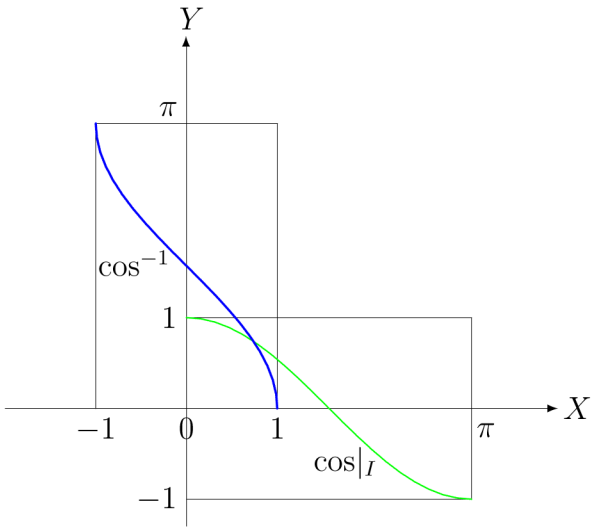


圖 3–11

定理 3.11

$\forall x \in (-1,1),\ D\cos^{-1}(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$. 但 $\cos^{-1}$ 在點 -1 及 1 不爲可微.

【證】 1° $\forall x \in (-1,1)$, 令 $y = \cos^{-1}(x)$, 則 $x = \cos|_I(y)$ 且 $y \in (0,\pi)$,

$$\begin{aligned} D\cos^{-1}(x) &= \frac{1}{\cos|_I'(y)} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos|_I^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

2° $\cos^{-1}$ 在點 -1 及點 1 不爲可微, 理由與 $\sin^{-1}$ 相仿. □

例 1. 試證：$\forall x \in [-1,1],\ \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$.

【解】本題可利用反正弦及反餘弦之定義證明, 但有點麻煩. 以下是較簡單的方法：令

$$\phi\colon [-1,1] \to \mathbb{R} : \phi(x) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x,$$

則 $\phi'(x) = D\sin^{-1} x + D\cos^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0,\ \forall x \in (-1,1),$

由零導數定理知 ϕ 爲一常數函數, 其次, $\phi(0) = \sin^{-1} 0 + \cos^{-1} 0 = \dfrac{\pi}{2}$, 即證得

$\forall x \in [-1,1],\ \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$. □

三. 反正切函數

定理 3.12

設 $I = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 則函數 $\tan|_I\colon I \to \mathbb{R}$ 爲對射 .

【證】1° $\tan|_I$ 爲嵌射; 此因

$$D\tan|_I(x) = D\tan x = \sec^2 x > 0,\ \forall x \in I,$$

故知 $\tan|_I$ 爲遞增.

2° $\tan|_I$ 爲蓋射; 此因 I 爲一區間, $\tan|_I$ 爲連續, 且因

$$\lim_{x\to\pi/2^-} \tan|_I(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\pi/2^+} \tan|_I(x) = -\infty,$$

故其值域爲一無上界且無下界之區間, 即爲 $\mathbb{R}$. □

定義 3.13

設 $I = (-\pi/2, \pi/2)$. $\tan|_I$ 之反函數

$$\tan^{-1} \underset{\text{def}}{=} (\tan|_I)^{-1}\colon \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) : \tan^{-1}(y) = x \ \Leftrightarrow\ \tan|_I(x) = y.$$

稱爲**反正切函數** (arctangent function).

其圖形如圖 3–12.

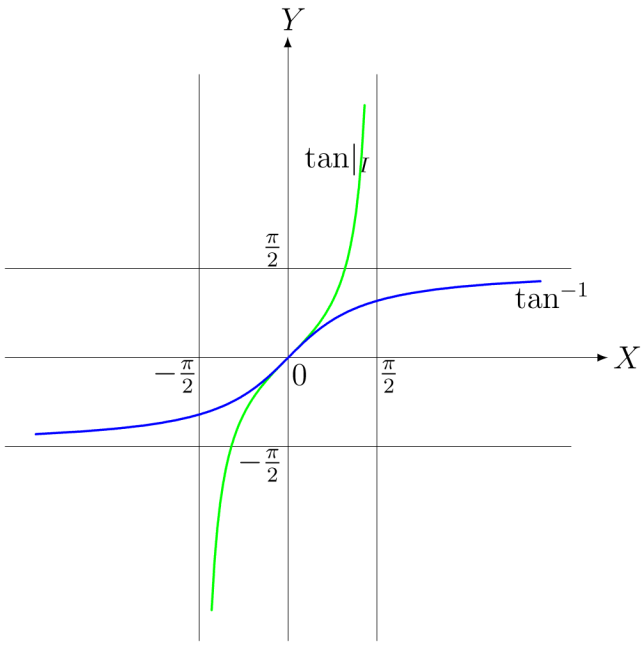


圖 3–12

在微積分及應用數學中, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ 三函數之用途很廣, 讀者若能對此三圖形多下工夫, 必有相當助益.

定理 3.14

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ D\tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

【證】設 $I = (-\pi/2, \pi/2)$. $\forall\, x \in \mathbb{R}$, 令 $y = \tan^{-1} x$, 顯然 $y \in I = (-\pi/2, \pi/2)$, 是以

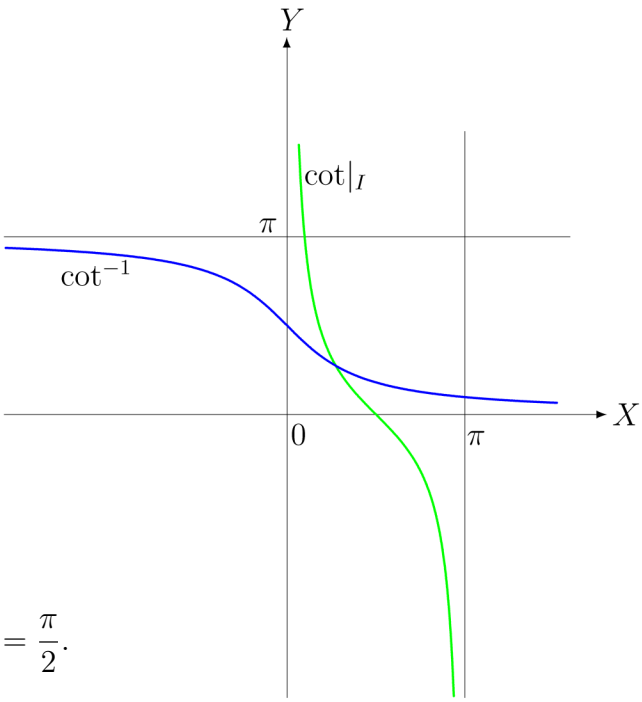
$$D\tan^{-1}(x) = \frac{1}{\tan\big|_I'(y)} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+\tan\big|_I^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}. \qquad \square$$

關於 $\cot^{-1}$ 之定義及相關定理, 與 $\tan^{-1}$ 相仿, 只陳述其結果如下 : 設 $I = (0, \pi)$,

$$\cot^{-1} \underset{\text{def}}{=} (\cot|_I)^{-1} \colon \mathbb{R} \to (0,\pi) : \cot^{-1}(y) = x \ \Leftrightarrow\ \cot|_I(x) = y.$$

$$D\cot^{-1}(x) = \frac{-1}{1+x^2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

其圖形參見圖 3–13.



例 2. 試證 : $\forall x \in \mathbb{R},\ \tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \dfrac{\pi}{2}$.

【解】仿例 1 讀者自證之. □

圖 3–13

關於 sec 之反函數, 設 $E = [0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi],\ F = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$,

$$\sec^{-1} \underset{\text{def}}{=} (\sec|_E)^{-1} \colon F \to E : \sec^{-1}(y) = x \ \Leftrightarrow\ \sec|_E(x) = y.$$

$$D\sec^{-1} \colon (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbb{R} : D\sec^{-1} x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}.$$

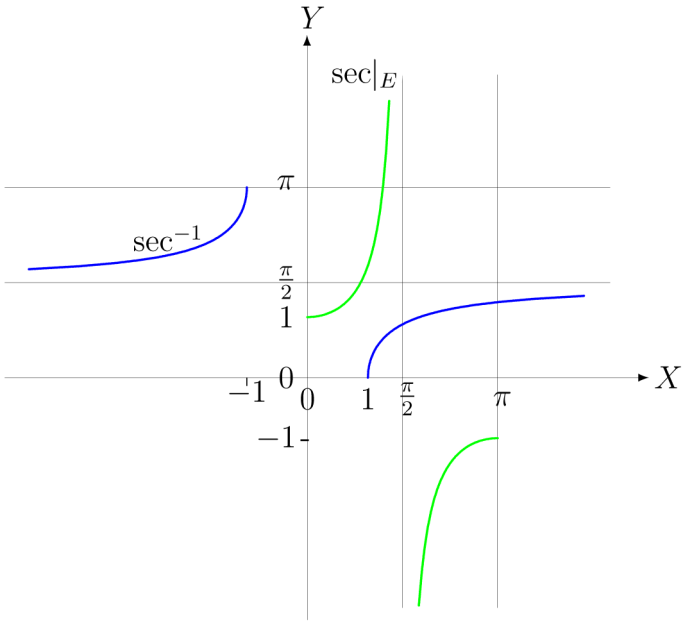


圖 3–14

關於 csc 之反函數, 設 $E=[-\pi/2,0)\cup(0,\pi/2]$, $F=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$,

$$\csc^{-1}\underset{\text{def}}{=}(\csc|_E)^{-1}\colon F\to E:\csc^{-1}(y)=x\ \Leftrightarrow\ \csc|_E(x)=y.$$

$$D\csc^{-1}\colon(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}:D\csc^{-1}x=\frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

讀者不妨自行證明 $\sec^{-1}$ 及 $\csc^{-1}$ 之導函數.

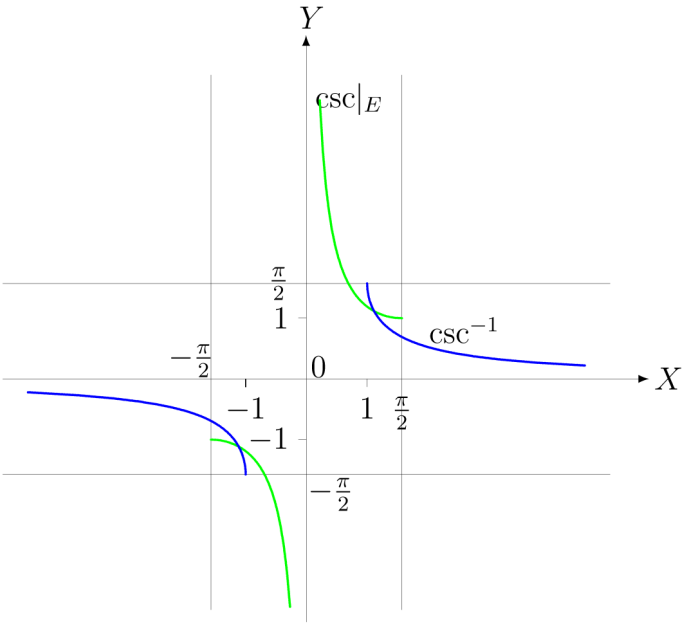


圖 3–15

註： 在電腦軟體中爲避免與 $(\sin x)^{-1}$ 相混淆, 反正弦函數常寫爲 ARCSIN, arcsin, ASIN 或 asin 等, 當然反餘弦、反正切函數則常寫爲 ARCCOS, ARCTAN 或 acos, atan 等等, 使用極廣的微軟軟體 Excel 中反正弦、反餘弦與反正切函數分別定爲 ASIN, ACOS, ATAN.

例 3. 試微分 $f\colon\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}:f(x)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

【解】$\forall\,x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=D\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\\&=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot D\frac{x-1}{x+1}\\&=\frac{1}{\dfrac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x+1)^2}}\cdot\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

故知 f 之導函數爲

$$f'\colon\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}:f'(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

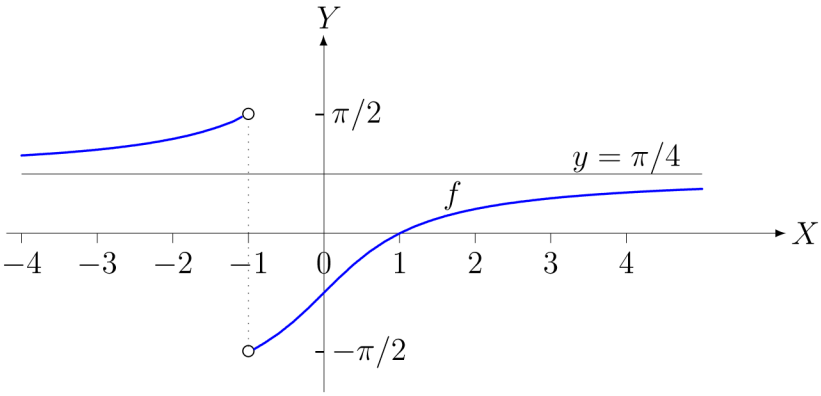


圖 3–16： $f(x)=\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$

提醒讀者注意：本例之函數的導數雖與 $\tan^{-1}(x)$ 之導數幾乎相同 (除了在點 -1), 但由於定義域並非一區間, 故二者之差並非一常數函數, 讀者不妨比較二者之圖形, 以了解其中之關鍵. □

§ 3.4 指數函數

如果有人提問：當 a 與 b 皆爲實數時, a^b 應如何界定？這個問題看似簡單, 如果進一步思考, 我們將會發現類似 $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ 之值的定義並非易事. 我們嘗試由簡入深思考其定義.

首先, 若 $a=0,\ \ b$ 爲正有理數時, 我們規定 $a^b=0$, ($a=0,\ b=0$ 或爲負有理數時, a^b 無意義). 故以下討論僅限 $a\neq 0$.

第一類： b 爲整數.

1° 若 $b=n\in\mathbb{Z}_+$, 則令 $a^n=\begin{cases}\underbrace{a\cdots a}_{n\text{項}}, & \text{若 } n\in\mathbb{N},\\ 1, & \text{若 } n=0,\end{cases}$

[a^n 讀爲 a 之 n 次方 (a raised to the nth power), 而 a 稱爲底 (base), n 稱爲指數 (exponent), 以下同理.]

2° 若 $b=-n,\ n\in\mathbb{N}$, 則令 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$.

第二類： $b=\dfrac{1}{n}$ (內 n 爲自然數).

1° 若 n 爲正偶數, $a>0$, 則令 $a^b=x$, 其中 x 爲滿足方程式 $x^n=a$ 之唯一非負實數. (a 不得爲負數).

2° 若 n 爲正奇數, (a 正負皆可), 則令 $a^b = x$, 其中 x 爲滿足方程式 $x^n = a$ 之唯一實數.

第三類： $b \in \mathbb{Q}^*$.

1° 若 $b > 0$, $b = \dfrac{m}{n}$, 其中 m, n 爲互質自然數, 令 $a^b = (a^{1/n})^m$, (若 n 爲偶數, a 必須爲正).

2° 若 $b < 0$, 令 $a^b = \dfrac{1}{a^{-b}}$.

第四類： 若 b 爲無理數時, a^b 則較爲困難, 如 $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$, 該如何界定 ?
如此界定又如何『證明』指數律 ? 方法有好幾種 :

一. 先界定自然對數函數

$$\ln\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R} : \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

再界定 $\exp x = \ln^{-1}(x)$ 以及指數 $a^b = \exp(b \ln a)$, 最後討論指數律. (有些微積分教本使用此一方法以爲 ln 之定義, 但必須先討論『積分』, 而我們在第六章才開始討論積分).

二. 先界定

$$a^b = \lim_{r \to b, r \in \mathbb{Q}} a^r, \quad e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

再界定 $\exp x = e^x$, 以及 $\ln x = \exp^{-1}(x)$, 最後討論指數律.

三. 以微分方程式方法界定之, 我們將採此種方法在以下四節中逐步探討.

定義 3.15

若函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 滿足 (i) $f'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, (ii) $f(0) = 1$, 則稱 f 爲 (自然) **指數函數** (exponential function), 而寫爲 exp, 亦即

$$\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ 滿足 } \forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp' x = \exp x, \text{ 且 } \exp 0 = 1.$$

指數函數之圖形我們將在稍後繪製. 與 sin, cos 之情形相似, 如此定義必須檢討兩個問題,

(1) 存在性 : 在第八章中我們可以利用冪級數界定爲

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots.$$

(2) 唯一性 : 我們應證明「若函數 f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 滿足 $f'(x) = f(x)$, $g'(x) = g(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, 且 $f(0) = 1$, $g(0) = 1$, 則 $f = g$.」

1° 先證：$f(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, 爲此令

$$\psi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}:\psi(x)=f(x)\cdot f(-x),$$

因 $\psi'(x)=0$, 知 ψ 爲一常數, 又因 $f(0)=1$, 是以 $\psi(x)=1$, 故 $f(x)\neq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

2° 令 $\phi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}:\phi(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$, 則因

$$\phi'(x)=\frac{g'(x)f(x)-f'(x)g(x)}{f^2(x)}=\frac{g(x)f(x)-f(x)g(x)}{f^2(x)}=0,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

知存在 $C\in\mathbb{R}$ 使得 $C=\phi(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}$, 又由原設 $f(0)=g(0)=1$, 是以知 $C=1$, 即 $g(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$.

定理 3.16

$\forall a,\ b\in\mathbb{R},\ \exp(a+b)=(\exp a)(\exp b).$

【證】令 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=\exp(x)\exp(a+b-x)$, 則

$$\begin{aligned} f'(x)=\exp(x)\exp(a+b-x)-\exp(x)\exp(a+b-x)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ \Rightarrow\ f \text{ 爲一常數函數}\\ \Rightarrow\ f(0)=f(a)\\ \Rightarrow\ \exp(a+b)=(\exp a)(\exp b). \end{aligned}$$

□

系 3.17

(1) $\exp(x)\exp(-x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(2) $\exp x>0, \forall x\in\mathbb{R}$. (故知 exp 爲一遞增函數).

(3) $\exp(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\exp(x_1)\exp(x_2)\cdots\exp(x_n),\ \forall x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$.

【證】(1) 易明.

(2) $\forall x\in\mathbb{R},\ \exp x=\exp\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}\right)=\left(\exp\dfrac{x}{2}\right)^2\geq 0$, 又由 (1) 知 $\exp x\neq 0$, 故 $\exp x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(3) 利用定理 3.16 及數學歸納法即可. □

定義 3.18

> 指數函數 exp 在點 1 之值 $\exp 1$, 稱其爲一**Euler 數** (Euler's number), 並以羅馬字母 e 表之.

例 1. 試證 : $2 < e < 3$.

【證】 1° 考慮 exp 在區間 $[0,1]$, 顯然它滿足微分均值定理之前提, 故存在 $p \in (0,1)$ 使得 $\exp' p = \dfrac{\exp 1 - \exp 0}{1-0}$, 即

$$e - 1 = \exp' p = \exp p > \exp 0, \ (\text{因 exp 爲遞增}).$$

故 $e > 2$.

2° $e < 3$ 之證明須利用第四章之 Taylor 定理, 稍後再予研究. □

利用第四章之 Taylor 定理, 我們可求得 e 之十五位小數的近似值爲

$$2.71828\,1828\,45\,90\,45\ .$$

有了 e 之近似值, 我們可以繪製 exp 之圖形如右 :

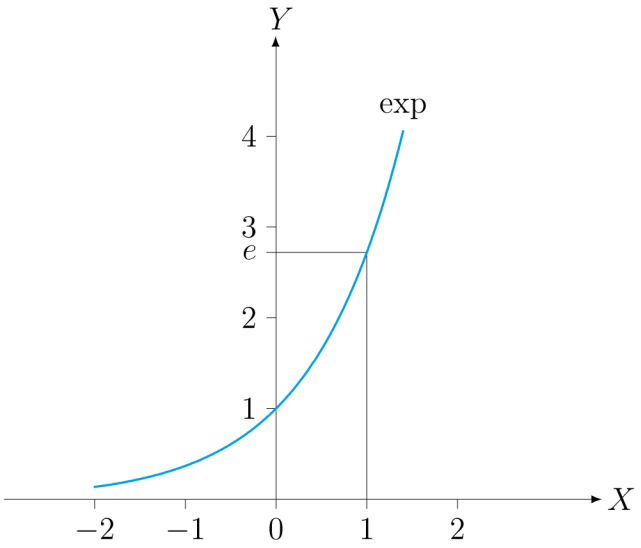


圖 3–17

例 2. 試證 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \exp x = 0$.

【解】 1° 先證 : $\forall x > 0,\ \exp x > x + 1$.

爲此令 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \exp x - x$, 則 $\forall\, x > 0$,

$$f'(x) = \exp x - 1 = \exp x - \exp 0 > 0, \ (\text{因 exp 爲遞增})$$

故知 f 於區間 $[0, +\infty)$ 爲遞增, 是以 $f(x) > f(0) = 1$, 亦即 $\forall\, x > 0$, $\exp x - 1 > x$.

2° 由 1° 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ 立得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp x=+\infty$.

3° 令 $x=-t$, 則

$$\lim_{x\to-\infty}\exp x=\lim_{t\to+\infty}\exp(-t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\exp t}=0.$$ □

定理 3.19

$\forall r\in\mathbb{Q},\quad e^r=\exp r$.

【證】1° 若 $r=n\in\mathbb{N}$, 則

$$\exp(n)=\exp(\underbrace{1+\cdots+1}_{n\text{ 項}})=\exp(1)\cdots\exp(1)=\underbrace{e\cdots e}_{n\text{ 項}}=e^n.$$

2° 若 $r=\dfrac{p}{q}$, $p,\ q\in\mathbb{N}$, 則

$$e^p=\exp(p)=\exp\left(\underbrace{\frac{p}{q}+\cdots+\frac{p}{q}}_{q\text{ 項}}\right)=\left(\exp\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q=(\exp r)^q,$$

兩端開 q 次方即得 $e^r=\exp r$.

3° 若 r 爲負有理數, 則

$$\exp r=\frac{1}{\exp(-r)}=\frac{1}{e^{-r}}=e^r.$$

4° 若 $r=0$, 等式顯然成立. □

定義 3.20

$e^x\underset{\text{def}}{=}\exp x,\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

至目前爲止我們界定了以 e 爲底之指數, 當然有人會問, 是否可以馬上界定以任何正數爲底之指數? 關於這一點, 我們還有一些準備工作, 留待本章稍後再行研究.

定理 3.21

若 x 與 y 爲實數, 則

(1) $e^{x+y}=e^x\cdot e^y$;

(2) $De^x=e^x$.

【證】利用定理 3.16 及 e^x 之定義, 讀者自證之. □

定理 3.22

指數函數 $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ 爲一對射.

【證】1° $\exp$ 爲嵌射, 此因 $\exp' x = \exp x > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$, 是以 $\exp$ 爲遞增.

2° 其次 $\exp$ 爲蓋射, 此因 $\exp$ 於區間 $\mathbb{R}$ 上爲連續, 故其值域必爲一區間, 此外, 由本節之例 2 知

$$\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp x = 0,$$

且知 $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exp x > 0$, 故 $\exp$ 之值域爲 $(0,+\infty)$. □

§ 3.5 自然對數函數

由定理 3.22 知指數函數 $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ 爲一對射, 故其反函數必存在, 而該反函數有許多相當重要性質, 用途極廣, 本節中我們將深入討論.

定義 3.23

指數函數 $\exp$ 之反函數

$$\ln = \exp^{-1}\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R} : \ln x = y \ \Leftrightarrow\ \exp y = x$$

稱爲**自然對數函數** (natural logarithmic function).

ln 有兩種讀法, 其一是讀爲 natural log, 另一種則讀爲 lawn. 此一符號乃美國加州大學柏克萊校區之 Irving Stringham 於 1893 所創.

指數函數與其反函數『自然對數函數』之圖形如下, 二者對稱於直線 $y = x$.

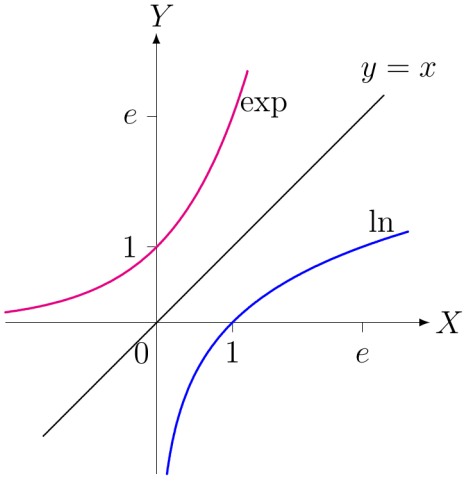


圖 3–18

定理 3.24 (自然對數函數之一般性質)

(1) $\ln 1 = 0,\ \ln e = 1.$

(2) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp x) = x.$

(3) $\forall\, x > 0,\ \exp(\ln x) = x.$

(4) $\forall\, x, y > 0,\ \ln(xy) = \ln x + \ln y.$

(5) $\forall\, x, y > 0,\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y.$

(6) $\forall\, x > 0,\ \ln' x = \dfrac{1}{x}.$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty, \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty.$

【證】(1) 因 $\exp 0 = 1,\ \exp 1 = e$.

(2) 因 ln 與 exp 互爲反函數.

(3) 因 ln 與 exp 互爲反函數.

(4) 令 $u = \ln x,\ v = \ln y$, 則 $x = \exp u,\ y = \exp v$, 是以

$$\ln(xy) = \ln[(\exp u)(\exp v)] = \ln[\exp(u+v)] = u + v = \ln x + \ln y.$$

(5) 在 (4) 中令 $x = 1/y$, 則得 $\ln(1/y) = -\ln y$, 是以

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = \ln x + \ln\frac{1}{y} = \ln x - \ln y.$$

(6) 利用反函數之導數定理, 令 $x = \exp y$, 則

$$D\ln x = \frac{1}{\exp' y} = \frac{1}{\exp y} = \frac{1}{x}.$$

(7) 由第一章極限之定義知

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\, \beta > 0,\ \exists \alpha > 0,\ (\forall x > 0)(x > \alpha \ \Rightarrow\ \ln x > \beta).$$

對於 $\beta > 0$, 取 $\alpha = e^\beta$, 則 $x > \alpha \ \Rightarrow\ \ln x > \beta$, 是以 $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

其次, 令 $t = 1/x$, 則

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = \lim_{x\to 0^+} -\ln\frac{1}{x} = -\lim_{t\to+\infty} \ln t = -\infty. \qquad \square$$

例 1. 設函數 $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = 2x + \ln x$, 試證 : f 爲可逆, 並求其反函數 f^{-1} 在點 2 之導數 $(f^{-1})'(2)$.

【解】1° f 爲嵌射, 因爲

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0\,, \quad \forall\, x > 0.$$

是以 f 爲遞增.

2° f 爲蓋射, 因爲 f 爲一連續函數, D_f 爲一區間, 且

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

故知 f 之值域爲 $\mathbb{R}$.

3° 當 $y = 2$ 時, 由 $y = 2x + \ln x$ 知 $x = 1$, 即 $f(1) = 2$, 利用反函數導數定理得

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2+\frac{1}{1}} = \frac{1}{3}.$$ □

註 : 本題無法由 f 求出 f^{-1}.

例 2. 利用均值定理, 試證: 若 $0 \neq x > -1$, 則 $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

【解】由於 ln 爲可微分函數, 令函數

$$f\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \ln(1+x).$$

顯然 f 亦爲可微分函數, 今考慮 f 在區間 $[0,x]$ 或 $[x,0]$ 上, 因爲 f 滿足均值定理之條件, 故存在 $p \in (0,x)$ 或 $p \in (x,0)$, 使得

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = f'(p) = \frac{1}{1+p}.$$

亦即

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1+p}. \qquad (1)$$

- 若 $x > 0$,

$$\begin{aligned} 0 < p < x &\Rightarrow 1 < 1+p < 1+x \\ &\Rightarrow 1 > \frac{1}{1+p} > \frac{1}{1+x} \\ &\Rightarrow x > \frac{x}{1+p} > \frac{x}{1+x} \\ &\Rightarrow x > \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}. \end{aligned}$$

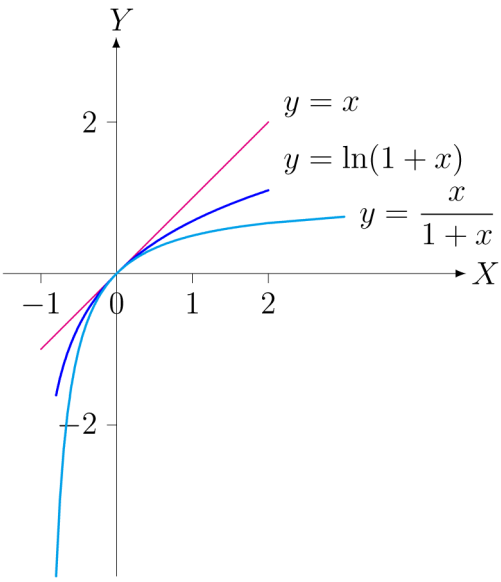


圖 3–19

- 若 $-1 < x < 0$,

$$\begin{aligned} -1 < x < p < 0 &\Rightarrow 0 < 1+x < 1+p < 1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{1+x} > \frac{1}{1+p} > 1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+p} < x \\ &\Rightarrow \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x. \end{aligned}$$ □

§ 3.6 一般指數函數

定義 3.25

設 $a > 0$, 則函數 $\exp_a : \mathbb{R} \to (0, +\infty) : \exp_a(x) \underset{\text{def}}{=} \exp(x \ln a)$ 稱爲**以 a 爲底之指數函數** (exponential function with base a).

顯然, 當 $a = e$ 時, $\exp_e(x) = \exp(x \ln e) = \exp x$, 亦即函數 $\exp_e$ 與自然指數函數 exp 無異. 其次, 不同之底當然指數函數之圖形亦相異, 以下僅繪出數種情況.

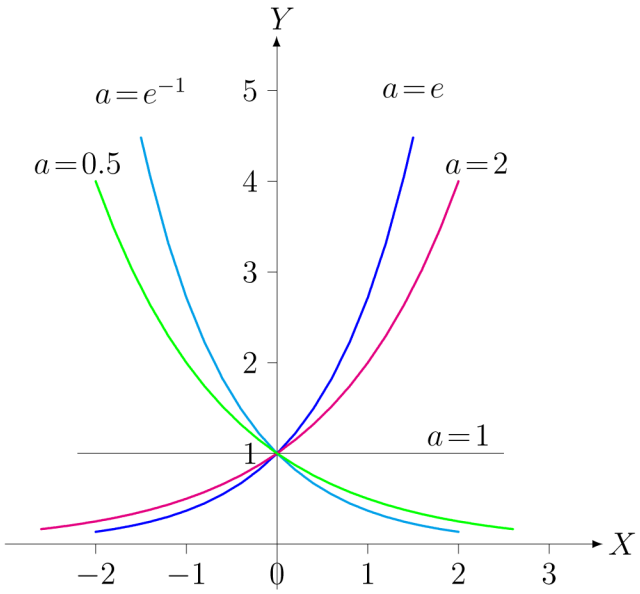


圖 3–20

讀者是否注意到：$\exp_e$ 與 $\exp_{1/e}$ 之圖形相對稱? 而 $\exp_a$ 與 $\exp_{1/a}$ 之圖形是否也對稱呢?

定理 3.26

(1) $\exp_a 0 = 1, \exp_a 1 = a.$

(2) $\exp_a x > 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$

(3) $\exp_a(x_1 + \cdots + x_n) = \exp_a(x_1) \cdots \exp_a(x_n), \ \forall\, x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}.$

(4) $\forall\, x \in \mathbb{R}, D(\exp_a x) = (\ln a) \exp_a x.$

【證】(1) 由定義立即可得 .

(2) 因 exp 之值恆正.

(3) 利用系 3.17,

$$\begin{aligned}\exp_a(x_1+\cdots+x_n) &= \exp\big[(x_1+\cdots+x_n)\ln a\big]\\ &= \exp(x_1\ln a+\cdots+x_n\ln a)\\ &= \exp(x_1\ln a)\cdots\exp(x_n\ln a)\\ &= \exp_a(x_1)\cdots\exp_a(x_n).\end{aligned}$$

(4) $D(\exp_a x) = D\exp(x\ln a) = (\ln a)\exp(x\ln a) = (\ln a)\exp_a x.$ □

定理 3.27

$\forall\, a>0,\ \forall\, r\in\mathbb{Q},\quad a^r = \exp_a r\ .$

【證】讀者可仿照定理 3.19 自證之. □

定義 3.28

設 $a>0,\quad b\in\mathbb{R}$, 我們規定 :

(1) $a^b \underset{\text{def}}{=} \exp_a b = \exp(b\ln a) = e^{b\ln a}$;

(2) $0^a \underset{\text{def}}{=} 0$. †

或許有人會問 : 本定義到底有何用途? 稍早, 我們曾提出『 $\sqrt{2}^{\sqrt{3}} =?$ 』的問題, 利用本定義,

$$\sqrt{2}^{\sqrt{3}} = \exp(\sqrt{3}\ln\sqrt{2}) = \exp\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 2\Big).$$

在第四章中, 我們利用 Taylor 定理可以解決 $\ln x$ 及 $\exp x$ 之近似值問題, 因此 $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ 之近似值問題亦因而獲得解決. 此外, $f(x)^{g(x)}$ 也是我們常會遇到的問題, 利用本定義,

$$f(x)^{g(x)} = \begin{cases}\exp[g(x)\ln(f(x))], & \text{若 } f(x)>0,\\ 0, & \text{若 } f(x)=0 \text{ 且 } g(x)>0.\end{cases}$$

---

† 關於 0^0 之定義, 部分數學家界定 $0^0=1$, 但另外一些數學家, 以極限理論主張不應如此界定, 因此在本書中, 我們視 0^0 爲無意義.

定理 3.29 [**指數律 (laws of exponent)**]

(1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;

(2) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

(3) $(a^x)^y = a^{xy}$;

(4) $(ab)^x = a^x b^x$;

(5) $(a/b)^x = a^x/b^x$.

【證】我們只證 (1), 其餘讀者自證之.

$$a^x \cdot a^y = \exp_a x \cdot \exp_a y = \exp_a(x+y) = a^{x+y}. \qquad \square$$

定理 3.30

設 $r \in \mathbb{R}$, 則

(1) $Dx^r = rx^{r-1},\ \forall\, x > 0$;

(2) $Da^x = a^x \ln a, \forall\, a > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

【證】(1) 由指數之定義知 $x^r = \exp(r \ln x)$, 故

$$Dx^r = D\,\exp(r \ln x) = \frac{r}{x}\exp(r \ln x) = \frac{r}{x}x^r = rx^{r-1}.$$

(2) 由定理 3.26 立即可得

$$Da^x = D\exp_a x = (\ln a)\exp_a x = a^x \ln a. \qquad \square$$

例 1. 試微分函數 $f(x) = x^x$.

【解】顯然 $D_f = (0, +\infty)$, 當 $\forall\, x > 0$ 時, $f(x) = x^x = \exp(x \ln\, x)$, 是以

$$f'(x) = \exp(x \ln\, x) \cdot (\ln x + 1) = x^x(1 + \ln x). \qquad \square$$

定理 3.31

$\forall\, a > 0$ 且 $a \neq 1$, $\exp_a \colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 爲一對射.

【證】因 $\exp_a x = \exp(x \ln a)$, 故可視其乃爲線性函數 $x \ln a$ 與 exp 之合成函數. 又因上述線性函數與 exp 皆係對射, 故其合成函數亦爲對射. □

例 2. 試微分 $y = 2^{\cos^{-1} x}$.

【解】設 $f(x) = 2^{\cos^{-1} x} = \exp(\cos^{-1} x \cdot \ln 2)$, 顯然 $D_f = [-1, 1]$.

1° $\forall x \in (-1, 1)$,

$$f'(x) = \exp(\cos^{-1} x \cdot \ln 2) \cdot \frac{-\ln 2}{\sqrt{1-x^2}} = -2^{\cos^{-1} x} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2° 若 $x = 1$, 則因 $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$, 知 f 在點 1 不爲可微. 在點 -1 同理亦不爲可微.

是以

$$f' \colon (-1, 1) \to \mathbb{R} : f'(x) = -2^{\cos^{-1} x} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{1-x^2}}.$$ □

§ 3.7 一般對數函數

在電子計算機發明之前, 數千年來, 人類對於繁複的數字計算一直在尋找最佳的解決方法, 尤其是天文學家爲然. 在這方面, 對數的發明使得人們能利用以下公式『以加法運算解決乘法問題』, 而『以乘法運算解決指數問題』

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad \log_a x^k = k \log_a x.$$

此一偉大的構思應歸功於十七世紀蘇格蘭人 John Napier.

由定理 3.31 知, 當 $a > 0,\ a \neq 1$ 時 $\exp_a$ 爲對射, 故爲可逆.

定義 3.32

設 $a > 0,\ a \neq 1$, 則指數函數 $\exp_a$ 之反函數

$$\log_a = \exp_a^{-1} \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R} : \log_a x = y \ \Leftrightarrow\ (a^y =) \exp_a y = x$$

稱爲**以 a 爲底之對數函數** (logarithmic function with base a).

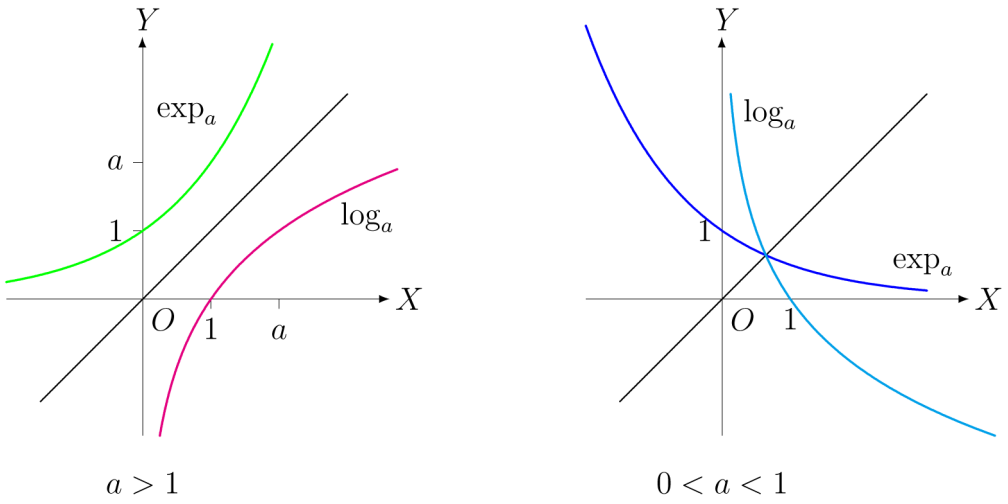


圖 3–21： $\log_a$ 之圖形

定理 3.33

設 $a>0,\ a\neq 1$.

(1) $\forall\, x>0,\quad \log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$;

(2) $\log_a 1=0,\quad \log_a a=1$;

(3) $\forall\, x\in\mathbb{R},\quad \log_a(a^x)=x$;

(4) $\forall\, x>0,\quad a^{\log_a x}=x$;

(5) $\forall\, x,y>0,\quad \log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$;

(6) $\forall\, x>0, k\in\mathbb{R},\quad \log_a x^k=k\log_a x$;

(7) $\forall\, x>0,\quad D(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}$.

【證】(1) 設 $y=\log_a x$, 則 $\exp_a y=x$, 故

$$\ln x=\ln(\exp_a y)=\ln(\exp(y\ln a))=y\ln a,$$

因 $\ln a\neq 0$, 是以 $\log_a x=y=\dfrac{\ln x}{\ln a}$.

(2) 由 (1) 立得.

(3) 由於 $\log_a$ 與 $\exp_a$ 互爲反函數, 是以 $\log_a(a^x)=\log_a(\exp_a x)=x$.

(4) $a^{\log_a x}=\exp_a(\log_a x)=x$.

(5) $\log_a(xy)=\dfrac{\ln(xy)}{\ln a}=\dfrac{\ln x}{\ln a}+\dfrac{\ln y}{\ln a}=\log_a x+\log_a y$.

(6) $\log_a x^k = \dfrac{\ln x^k}{\ln a} = \dfrac{\ln(\exp(k\ln x))}{\ln a} = \dfrac{k\ln x}{\ln a} = k\log_a x$.

(7) $D(\log_a x) = D\dfrac{\ln x}{\ln a} = \dfrac{1}{x\ln a}$. □

例 1. 試證 : $\pi^e < e^\pi$.

【證】設 $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R} : f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, 則

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}\begin{cases} > 0, & \text{若 } 0<x<e,\\ = 0, & \text{若 } x=e,\\ < 0, & \text{若 } x>e. \end{cases}$$

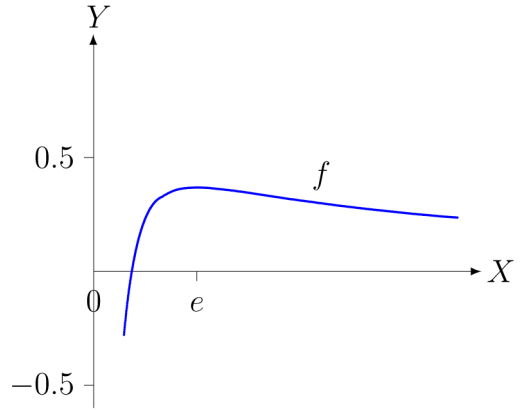


圖 3–22

知 f 於點 e 有最大值, 是以

$$\begin{aligned} f(\pi) < f(e) &\Rightarrow \frac{\ln\pi}{\pi} < \frac{\ln e}{e}\\ &\Rightarrow e\ln\pi < \pi\ln e\\ &\Rightarrow \ln\pi^e < \ln e^\pi\\ &\Rightarrow \pi^e < e^\pi. \end{aligned}$$ □

或許有人認爲本題只需按按計算器或以電腦計算, 立即知道 e^π 較大, 然而計算機只是一項工具, 它並不能取代數學的本質 —— 邏輯演繹, 更何況對於問題『試證 : $\forall a\in(0,+\infty)\setminus\{e\}$, $a^e < e^a$ 』, 我們仍需要本例之數學演繹方法.

§ 3.8 指數與對數之應用

(1) 指數成長與指數衰變 :

設 I 爲一非退化區間 ‡, 若

$$f\colon I\to(0,+\infty) \text{ 滿足 } \frac{f'(t)}{f(t)} = k,\ \forall t\in I,\quad (\text{內 } k \text{ 爲一常數})$$

則存在 $C\in\mathbb{R}$ 使得 $f(t) = C\,e^{kt}$, 理由是 :

$$\begin{aligned} &\frac{f'(t)}{f(t)} = k,\ \forall t\in I\\ &\Rightarrow D\ln(f(t)) = k,\ \forall t\in I\\ &\Rightarrow \exists C_0\in\mathbb{R},\ \text{使得}\ \ \ln(f(t)) = kt + C_0\\ &\Rightarrow \exists C_0\in\mathbb{R},\ \text{使得}\ \ f(t) = \exp(kt+C_0)\\ &\Rightarrow \exists C\in\mathbb{R},\ \text{使得}\ \ f(t) = C\,e^{kt},\ [\,\text{令 } C = \exp(C_0)\,]. \end{aligned}$$

‡ 若 $a=b$, 則閉區間 $[a,b]$ 爲一單元集合, 稱爲**一退化區間** (degenerate interval).

此時稱 f 具**指數成長** (exponential growth). 而 k 則稱爲**成長常數** (growth constant). 若 $k<0$, 則令 $\lambda=-k>0$, 稱爲**衰變常數** (decay constant), 此時函數可表爲 $f(t)=C\,e^{-\lambda t}$.

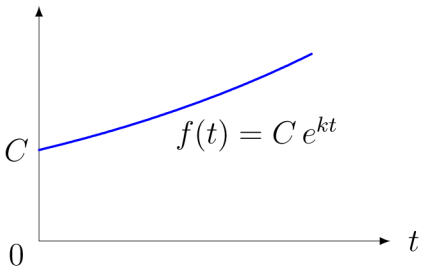


圖 3–23: 指數成長

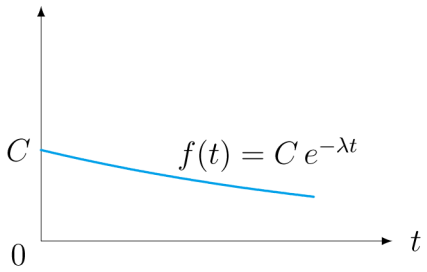


圖 3–24 指數衰變

註: **1.** 若資本額爲 100 萬元, 經營一年後變成 110 萬元, 則年成長率爲 10%, 即在時間 t 之年成長率$=\dfrac{f(t+1)-f(t)}{f(t)}$.

2. 若資本額爲 100 萬元, 經營半年後變成 106 萬元, 則這段期間之年成長率爲 12%, 即在時間 t 之 (這半年中之) 年成長率 $=\dfrac{f(t+0.5)-f(t)}{0.5\,f(t)}$. 推而廣之, 若 f 在點 t 爲可微, 令

$$r(t)=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h\,f(t)}=\frac{f'(t)}{f(t)},$$

並稱其爲 f 在時間 t 之 (瞬間) **年成長率**. (時間單位當然可依需要改爲『月』、『日』或『時』等). 是以

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=k,\ \forall t\in I,$$

乃表示函數 f 之瞬間 (年) 成長率爲一常數.

例 1. 設 $P(t)$ 表某細菌培養在時間 t (單位 : 小時) 之數量, 若其繁殖率 $P'(t)$ 與 $P(t)$ 成正比, 已知 $t=0$ 時數量爲 30,000, 4 小時後數量爲 600,000. 試求 $P(t)$.

【解】由原設應有,

$$\begin{aligned}
P'(t)=kP(t) &\Rightarrow P(t)=P_0\,e^{kt},\ (\text{其中 } P_0=P(0)=30,000)\\
&\Rightarrow P(4)=P_0\,e^{4k},\ (\text{令 } t=4)\\
&\Rightarrow 600,000=30,000\,e^{4k}\\
&\Rightarrow e^{4k}=20\\
&\Rightarrow 4k=\ln(20)\\
&\Rightarrow k=\frac{\ln(20)}{4}\approx 0.7489.
\end{aligned}$$

得 $P(t)=30,000\,e^{0.7489t}$. □

例 2. 設一群蚊子的繁殖是依據指數成長 $P(t) = P(0)\,e^{kt}$ (時間單位：天). 若 10 天後蚊子數增加一倍. 求其成長常數 k.

【解】設 $t = 0$ 時蚊子數量爲 $P_0 = P(0)$, 第 t 天之數量爲 $P(t)$, 成長常數爲 k. 應有

$$\begin{aligned} P(t) = P_0\,e^{kt} &\Rightarrow P(10) = P_0\,e^{10k},\ (\text{令 } t = 10) \\ &\Rightarrow 2P_0 = P_0\,e^{10k},\ (\text{原設}) \\ &\Rightarrow e^{10k} = 2 \\ &\Rightarrow k = \frac{\ln 2}{10} \approx 0.0693. \end{aligned}$$ □

(2) ^{14}C 的衰變 (decay) 在社會科學的領域裡, 人們常希望能估計出土的古代文物之年代, 由於 ^{14}C 計年法 (Carbon dating) 的發明, 使得此一夢想得以實現, 1947 年美國芝加哥大學 W. F. Libby 及其研究伙伴創立了這種方法, 也因此在 1960 年榮獲諾貝爾化學獎. 過去數萬年中 ^{14}C 和 ^{12}C 之比例一直保持在一定的比例 (大約是 $1 : 10^{12}$), 地球的大氣層經由宇宙射線中的中子之撞擊而形成 $^{14}CO_2$, 經由光合作用被植物吸收, 再被其他生物吸收而存在於所有生物之中, 生物一旦死亡, 其內的 ^{14}C 就不再增加而開始衰減, 其半衰期 (half-life) 爲 5730 年. 其它放射性物質也有相同的性質, 但半衰期則均不相同.

令 h 爲放射性物質之半衰期 (時間單位：年、月或日皆可), 由於

$$\frac{1}{2}P_0 = P(h) = P_0\,e^{-\lambda h},$$

可解得

- 衰變常數： $\lambda = \dfrac{\ln 2}{h}$, ①
- 衰變函數： $P(t) = P_0\,\exp\left(\dfrac{-t\,\ln 2}{h}\right) = P_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{t/h}$. ②

例 3. 放射性 ^{14}C 的半衰期約爲 5730 年. 試求其衰變常數 λ 及衰變函數.

【解】由上面 ① 式知, $\lambda = \dfrac{\ln 2}{5730} \approx 0.000121$, 而衰變函數爲

$$\begin{aligned} P(t) &= P_0\,\exp\left(\frac{-t\,\ln 2}{5730}\right) = P_0\,\exp\left(\ln 2^{-t/5730}\right) \\ &= P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730} \text{ 或 } P_0\,e^{-0.000121\,t}. \end{aligned}$$ □

例 4. 在中東, 某張記載古文字的羊皮紙碎片被發現時, 含 ^{14}C 之量爲今日生物所含 ^{14}C 量的 79 %. 試估計此羊皮紙之年代.

【解】設羊皮紙原來含 $^{14}\mathrm{C}$ 之量與現今生物含 $^{14}\mathrm{C}$ 之量相同. 今其含量爲原來的 79 %. 設 t 年後 $^{14}\mathrm{C}$ 之量爲 $P(t)$ 時, 由 ② 式知

$$P(t) = P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730}.$$

內 P_0 表原來 $^{14}\mathrm{C}$ 之含量. 由題意知

$$\begin{aligned} P(t) = 0.79P_0 \;&\Rightarrow\; P_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730} = 0.79P_0 \\ &\Rightarrow\; \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730} = 0.79 \\ &\Rightarrow\; \frac{-t\,\ln 2}{5730} = \ln(0.79),\ (\text{左右兩端取 } \ln) \\ &\Rightarrow\; t = \frac{-\ln(0.79)\cdot 5730}{\ln 2} \approx 1948.6 \text{ 年}. \end{aligned}$$ □

(3) 複利 (compound interest).

銀行給付利息的方式通常是採複利, 設 P 表本金 (principal), r 表年利率 (interest rate), n 表年數, A 表本利和 (amount), 則應有

$$A = P(1+r)^n.$$

然而這是每年一次計息方式, 最常見的則是每月複利計息 (monthly compound interest), 此時本利和應爲 $A = P\big(1+\frac{r}{12}\big)^{12n}$, 如果將此一概念予以推廣, 每年分 m 期計息, 則

$$A = P\Big(1+\frac{r}{m}\Big)^{nm}.$$

於是有人令 m 趨近於 $+\infty$, 而得所謂『連續複利計息法』(continuously compound interest), 此時,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{m\to+\infty} P\Big(1+\frac{r}{m}\Big)^{nm} \\ &= P\lim_{h\to 0^+}(1+h)^{nr/h},\ (\text{令 } h = r/m) \\ &= P\lim_{h\to 0^+}\exp\Big(nr\frac{\ln(1+h)}{h}\Big) \\ &= P\exp\Big(nr\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)}{h}\Big) \\ &= P\,e^{nr},\ \Big(\because \lim_{h\to 0^+}\frac{\ln(1+h)}{h} = \ln' 1 = 1.\Big) \end{aligned}$$

提醒讀者注意：上式中之 n 未必爲一整數.

例 5. 設某君存款一萬元, 年利率 2%, 以連續複利計算, 問存款多久其本利和爲二萬元.

【解】已知 $r = 2\% = 0.02$, 由原設

$$\begin{aligned} 20000 = 10000e^{0.02\,t} &\Rightarrow\ e^{0.02\,t} = 2 \\ &\Rightarrow\ 0.02\,t = \ln 2 \\ &\Rightarrow\ t = \frac{\ln 2}{0.02} \approx 34.66 \text{ 年}. \end{aligned}$$ □

例 6. 設甲銀行以 2% 之年利率每月計息, 乙銀行欲以 r 之年利率連續計息且使一年到期之本利和與甲銀行相同, 試問 r =?

【解】由於一年後,

$$\text{甲銀行之本利和爲 } A_1 = P\Big(1 + \frac{0.02}{12}\Big)^{12},$$

$$\text{乙銀行之本利和爲 } A_2 = P \cdot e^{r}.$$

故

$$\begin{aligned} A_1 = A_2 &\Leftrightarrow \Big(1 + \frac{0.02}{12}\Big)^{12} = e^{r} \\ &\Leftrightarrow\ r = 12\ln\Big(1 + \frac{0.02}{12}\Big) = 0.0199834. \end{aligned}$$ □

複利觀念亦可應用於投資理財, 設某項投資 n 年後之總收入 (即本利和 (amount)) 爲 A, 以年利率 r 之連續計息方式, 則此一款項之現值 (present value) P 應爲若干 ?

由於 $A = P\,e^{nr}$, 是以 $P = A\,e^{-nr}$.

例 7. 設年利率 3%, 以連續複利計息, 若希望 4 年後得 10,000 元. 問現在應存入多少 ?

【解】因 $A = 10,000,\ r = 0.03,\ t = 4$, 是以

$$P = 10,000\,e^{-0.03\times 4} = 10,000\,e^{-0.12} \approx 10,000 \cdot 0.88692 = 8,869.2 \text{ (元)}.$$ □

例 8. 設某商行在 t 年時之存款數約爲 $f(t) = 750000\,e^{0.6\sqrt{t}}$. 試求第 5 年底存款的年成長率.

【解】因

$$\begin{aligned} \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d}{dt}\ln f(t) &= \frac{d}{dt}(\ln 750000 + \ln\ e^{0.6\sqrt{t}}) \\ &= \frac{d}{dt}(\ln 750000 + 0.6\sqrt{t}) = 0.6(\frac{1}{2})t^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{0.3}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

以 5 代 t 得, $\dfrac{f'(5)}{f(5)} = \dfrac{0.3}{\sqrt{5}} \approx 0.1345 = 13.4\%$, 亦即 $t = 5$ 年時, 存款的年成長率爲 13.4%. □

§ 3.9 對數微分法

在微積分發展的過程中, 指數函數未被廣泛使用之前, 對於函數 $y = f(x)^{g(x)}$ 之微分, 常以『取對數』之方法解之, 此種方法稱爲**對數微分法**, 係瑞士數學家 Johann Bernoulli 所創. 其步驟如下 :

1° $y = f(x)^{g(x)}$ 之兩端分別取自然對數.

2° $\ln y = g(x)\ln(f(x))$ 之兩端分別對 x 微分之, 得 $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{d}{dx}(g(x)\ln(f(x))) = \cdots$.

3° 移項之得 $y' = y\dfrac{d}{dx}(g(x)\ln(f(x)))$.

例 1. 試微分 $y = x^{x^2}$.

【解】此函數之定義域顯然爲 $(0, +\infty)$.

法一 : $\forall\, x > 0,\ y = x^{x^2} = \exp(x^2 \ln x)$, 是以

$$y' = \exp(x^2\ln x)\cdot(2x\ln x + x) = x^{x^2}(x + 2x\ln x).$$

法二 : 利用對數微分法,

$$\begin{aligned} y = x^{x^2} &\Rightarrow \ln y = x^2 \ln x \\ &\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x\ln x + x, \ (\text{兩端微分}) \\ &\Rightarrow y' = y(2x\ln x + x) = x^{x^2}(x + 2x\ln x). \end{aligned}$$ □

對於某些較爲複雜之分式, 利用對數微分法具有簡化計算之效果, 若函數有負值之可能時, 則應先取絕對值再取自然對數; 我們舉一例以說明之.

例 2. 試求 $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}(3x+2)^3}{\sqrt[5]{x^2(x+1)}}$ 之導函數.

【解】本題可利用函數和、差、積、商及合成之微分定理解之, 但相當麻煩. 我們將利用對數微分法解之. 由於 $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0, -1\}$,

- 當 $x \in D_f \setminus \{-2/3\}$ 時,

$$\begin{aligned} f(x) = &\frac{\sqrt{1+x^2}(3x+2)^3}{\sqrt[5]{x^2(x+1)}} \\ &\Rightarrow \ln|f(x)| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 3\ln|3x+2| - \frac{2}{5}\ln|x| - \frac{1}{5}\ln|x+1| \\ &\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x}{1+x^2} + \frac{9}{3x+2} - \frac{2}{5x} - \frac{1}{5(x+1)} \\ &\Rightarrow f'(x) = f(x)\Big(\frac{x}{1+x^2} + \frac{9}{3x+2} - \frac{2}{5x} - \frac{1}{5(x+1)}\Big). \end{aligned}$$

- 當 $x=-2/3$ 時, 因 $\lim\limits_{x\to -2/3} f'(x)=0$, 是以 $f'(-2/3)=0$.
- 結論：f 之導函數爲 $f'\colon D_f\to\mathbb{R}$：

$$f'(x)=\begin{cases} f(x)\Big(\dfrac{x}{1+x^2}+\dfrac{9}{3x+2}-\dfrac{2}{5x}-\dfrac{1}{5(x+1)}\Big), & \text{若 } x\neq -\dfrac{2}{3},\\ 0, & \text{若 } x=-\dfrac{2}{3}. \end{cases}$$ □

§ 3.10 雙曲函數

指數函數 exp 在自然科學以及應用科學上之應用頗廣, 它有一些特殊組合在力學方面十分重要, 由於這些組合之某些性質與三角函數相近 ¶, 故在取名時也參照三角函數. 同時, 表示法也借用三角函數的符號. 不過這類函數皆不具週期性, 此乃與三角函數最大的差異.

定義 3.34

函數

(1) $\sinh\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}:\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, 稱爲**雙曲正弦函數** (hyperbolic sine function).

(2) $\cosh\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}:\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, 稱爲**雙曲餘弦函數** (hyperbolic cosine function).

(3) $\tanh\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}:\tanh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, 稱爲**雙曲正切函數** (hyperbolic tangent function).

(4) $\coth\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}:\coth x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$, 稱爲**雙曲餘切函數** (hyperbolic cotangent function).

(5) $\operatorname{sech}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}:\operatorname{sech} x=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$, 稱爲**雙曲正割函數** (hyperbolic secant function).

(6) $\operatorname{csch}\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}:\operatorname{csch} x=\dfrac{2}{e^x-e^{-x}}$, 稱爲**雙曲餘割函數** (hyperbolic cosecant function).

以上六函數統稱爲**雙曲函數** (hyperbolic functions).

雙曲餘弦函數形如一懸索 (hanging cable), 故又名**懸索線** (catenary).

¶ 參閱附錄三.

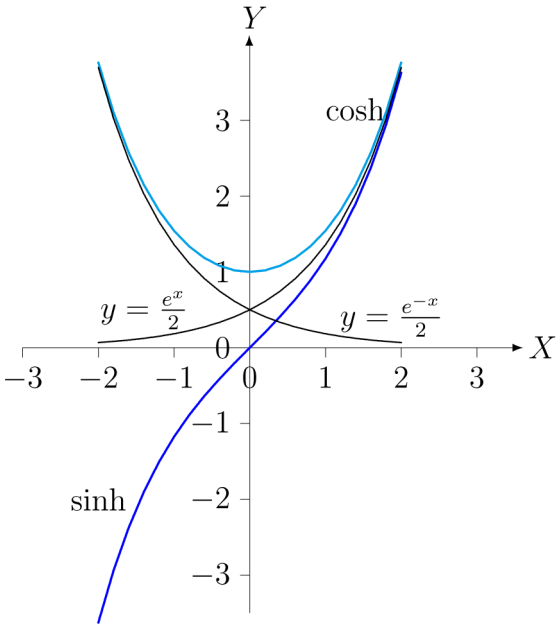


圖 3–25

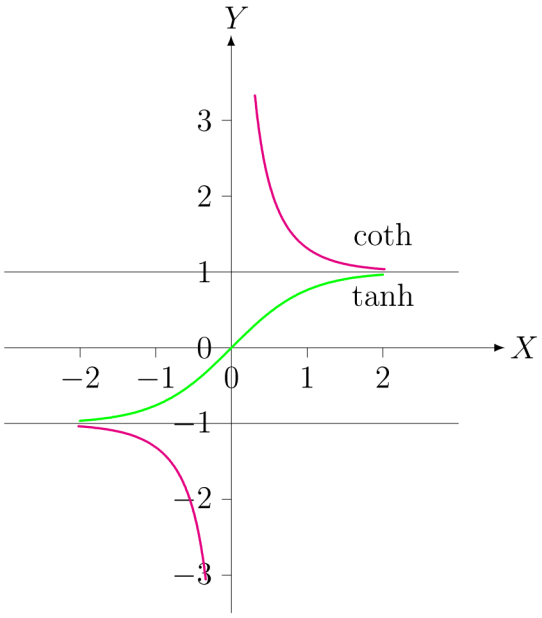


圖 3–26

由上述定義知, sinh 與 cosh 係由 $y = \dfrac{e^x}{2}$ 與 $y = \dfrac{e^{-x}}{2}$ 二函數相減與相加而成, 故其圖形如圖 3–25, tanh 與 coth 之圖形則參閱圖 3–26, 至於 sech 與 csch 之圖形則參閱圖 3–27 及圖 3–28.

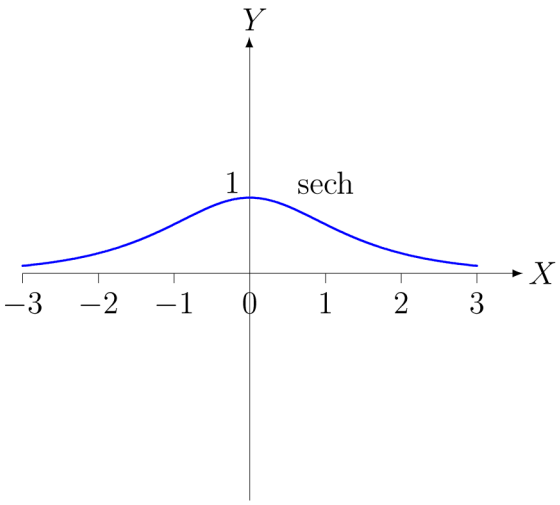


圖 3–27

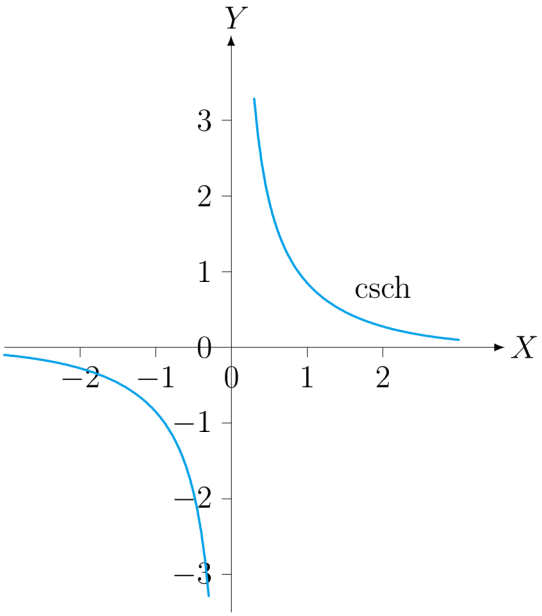


圖 3–28

由於我們對於指數函數 exp 之性質已有相當的了解, 而雙曲函數又是由 exp 組合而成, 所以不難證得以下幾個基本性質.

定理 3.35

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;

(2) $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$;

(3) $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x$.

【證】(1) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2\right) \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1.\end{aligned}$$

(2) $1 - \tanh^2 x = 1 - \dfrac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \dfrac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x.$

(3) 仿 (2) 讀者自證之. □

定理 3.36

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, 應有

(1) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$;

(2) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$;

(3) $\tanh(x + y) = \dfrac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$;

(4) $\sinh(-x) = -\sinh x$;

(5) $\cosh(-x) = \cosh x$;

(6) $\tanh(-x) = -\tanh x$.

【證】利用定義 3.24 即可證得. □

定理 3.37

六個雙曲函數均爲可微分, 且導函數分別如下 :

(1) $D \sinh x = \cosh x$;

(2) $D \cosh x = \sinh x$;

(3) $D \tanh x = \operatorname{sech}^2 x$;

(4) $D \coth x = -\operatorname{csch}^2 x$;

(5) $D \operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$;

(6) $D \operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$.

【證】茲僅就 (1) 與 (3) 證之, 其餘讀者自證之.

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$D\sinh x = D\Big(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\Big) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x.$$

(3) $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$D\tanh x = D\Big(\frac{\sinh x}{\cosh x}\Big) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \operatorname{sech}^2 x. \qquad \square$$

例 1. 試求 $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh\Big(\dfrac{[x]}{x}\Big) =?$ 並問上述極限是否大於 1?

【解】由於 sinh 爲連續, 是以

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh\Big(\frac{[x]}{x}\Big) = \sinh\Big(\lim_{x\to-\infty} \frac{[x]}{x}\Big) = \sinh 1.$$

其次, 由均值定理知, 存在 $p \in (0,1)$ 使得

$$\sinh 1 = \frac{\sinh 1 - \sinh 0}{1-0} = \sinh' p = \cosh p > \cosh 0 = 1. \qquad \square$$

§ 3.11 反雙曲函數

由於 $\forall\, x \in \mathbb{R}, D\sinh x = \cosh x > 0$, 故 sinh 爲一嵌射, 又由

$$\lim_{x\to+\infty} \sinh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = +\infty,$$

及

$$\lim_{x\to-\infty} \sinh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = -\infty,$$

知 sinh 爲一蓋射, 故爲一可逆函數, sinh 之反函數稱爲**反雙曲正弦函數** † (inverse hyperbolic sine function). 亦即

$$\sinh^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \sinh^{-1} x = y \;\Leftrightarrow\; \sinh y = x.$$

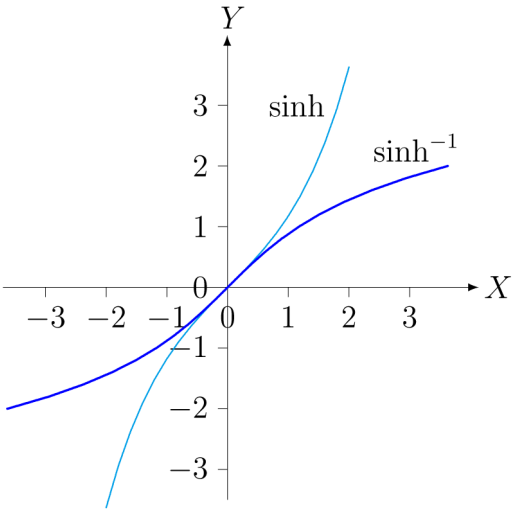


圖 3–29

† 有些學者以 arcsinh 或 argsinh 表反雙曲正弦函數, 其他五個反雙曲函數亦同.

定理 3.38

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$;

(2) $\sinh^{-1}$ 爲可微分函數, 且 $\forall\, x \in \mathbb{R},\ D\sinh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

【證】(1) 設 $y = \sinh^{-1} x$, 則

$$\begin{aligned} y = \sinh^{-1} x \ &\Rightarrow\ x = \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) \\ &\Rightarrow\ (e^y)^2 - 2x \cdot e^y - 1 = 0 \\ &\Rightarrow\ e^y = x \pm \sqrt{x^2+1},\ (\text{解 } e^y \text{ 之二次方程式}) \\ &\Rightarrow\ e^y = x + \sqrt{x^2+1},\ (\text{因 } e^y > 0) \\ &\Rightarrow\ y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \end{aligned}$$

(2) $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$D\sinh^{-1} x = D\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

□

cosh 爲一偶函數, 其圖形對於 Y 軸, 不爲嵌射, 必須予以制限. 由於

$$\cosh|_{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty)$$

爲一對射, (讀者自證), 故爲可逆, 其反函數稱爲**反雙曲餘弦函數** (inverse hyperbolic cosine function), 亦即

$$\cosh^{-1} = (\cosh|_{\mathbb{R}_+})^{-1} : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+ :$$
$$\cosh^{-1}(x) = y \ \Leftrightarrow\ \cosh|_{\mathbb{R}_+}(y) = x.$$

參見圖 3–30.

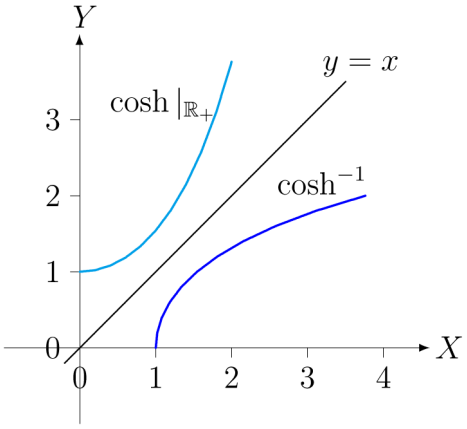


圖 3–30

定理 3.39

(1) $\forall\, x \in [1, +\infty),\ \cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$;

(2) $\cosh^{-1}$ 於 $(1, +\infty)$ 爲可微分函數, 且 $\forall\, x \in (1, +\infty)$,

$$D\cosh^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

【證】仿定理 3.38 證明, 讀者自證之. □

由於 $\forall\, x \in \mathbb{R}, D\tanh x = \operatorname{sech}^2 x > 0$, 故 tanh 爲一嵌射, 又由

$$\lim_{x\to+\infty} \tanh x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1,$$
$$\lim_{x\to-\infty} \tanh x = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1,$$

知 tanh 之值域爲 $(-1, 1)$, 故函數 $\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1, 1)$ 爲可逆, 其反函數稱爲**反雙曲正切函數** (inverse hyperbolic tangent function); 亦即

$$\tanh^{-1}\colon (-1, 1) \to \mathbb{R} : \tanh^{-1} x = y \;\Leftrightarrow\; \tanh y = x.$$

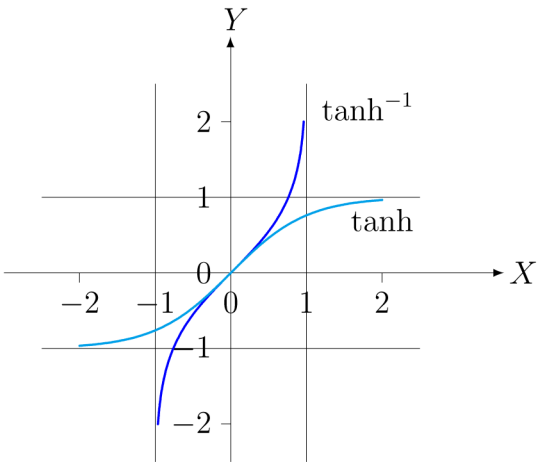


圖 3–31

定理 3.40

(1) $\forall\, x \in (-1, 1),\ \tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$;

(2) $\tanh^{-1}$ 爲可微分函數, 且 $\forall\, x \in (-1, 1),\ D\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{1-x^2}$.

【證】(1) 設 $y = \tanh^{-1} x$, 則

$$\begin{aligned} x = \tanh y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} &\Rightarrow\ xe^y + xe^{-y} = e^y - e^{-y} \\ &\Rightarrow\ e^y(1-x) = e^{-y}(1+x) \\ &\Rightarrow\ e^{2y} = \frac{1+x}{1-x} \\ &\Rightarrow\ 2y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &\Rightarrow\ y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

是以 $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

(2) $\forall x \in (-1,1)$,

$$D\tanh^{-1}x = D\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}D\ln(1+x) - \frac{1}{2}D\ln(1-x)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}. \qquad \square$$

利用對稱原理, 讀者可參閱本節稍早之 coth, sech 及 csch 之圖形而繪出 $\coth^{-1}$, sech^{-1} 及 csch^{-1} 之圖. 唯其中 sech 需要加以制限, 由於用途較少, 我們不予討論. 有興趣讀者不妨自行研究之.

§ 3.12 隱微分法

在預篇中我們曾將函數 $f\colon A \to B$ 界定爲一序對集合 $f \subset A \times B$, 滿足條件 "$\forall x \in A$, $\exists!\, y \in B$ 使得 $(x, y) \in f$" 者. 今設有一含 x 與 y 之方程式 $F(x, y) = 0$, 則以 $F(x, y) = 0$ 所界定的序對集合 $\{(x, y) \mid F(x,y) = 0\}$ 有些是函數, 有些則不是.

1° 若序對集合 $\{(x, y) \mid F(x,y) = 0\}$ 爲一函數：例如 $F(x, y) = x^2 - y - 1 = 0$ 所界定的序對集合 $\{(x, y) \mid x^2 - y - 1 = 0\}$ 滿足函數之條件, 乃爲一函數, (參見圖 3–32), 而該函數之一般表示法爲：

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y = f(x) = x^2 - 1.$$

我們稱此函數爲方程式 $F(x,y) = 0$ 所界定之**隱函數** (implicit function).

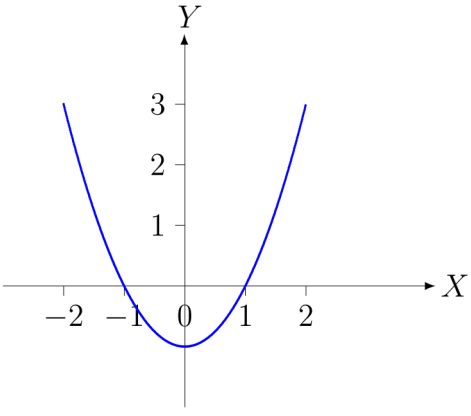


圖 3–32

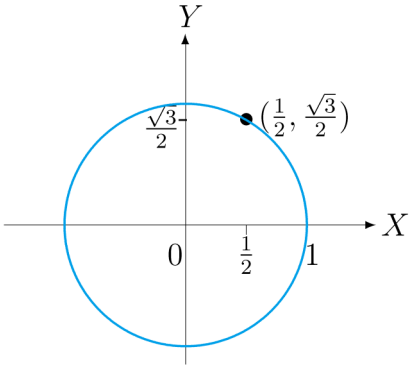


圖 3–33

2° 若序對集合 $\{(x, y) \mid F(x,y) = 0\}$ 不爲一函數：例如方程式

$$F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

所界定之序對集合 $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ 並非一函數, (參見圖 3–33). 上述之集合 C 雖不爲一函數, 但我們對 C 中之一點如 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 加以觀察: 由圖中顯然可取得點 $\frac{1}{2}$ 之一鄰近 $N(\frac{1}{2})$ 及點 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 之一鄰近 $N(\frac{\sqrt{3}}{2})$, 而有

$$\forall\, x\in N\Big(\frac{1}{2}\Big),\ \exists! y\in N\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\ \text{使得}\ (x,\,y)\in C.$$

故 C 雖不爲一函數, 但 C 卻在 $N(\frac{1}{2})$ 上可以界定一函數 f, 而 f 之一般表示法爲 :

$$f\colon N\Big(\frac{1}{2}\Big)\to N\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)\colon y=f(x)=\sqrt{1-x^2}.$$

我們稱此函數 f 爲由方程式 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 在點 $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 之鄰近 (二維觀念, 詳見第九章第一節) 所界定之一隱函數.

在上述 C 中若取點 $(1,0)$, 情形就不同了, 因爲不論在點 1 取任一鄰近 $N(1)$, 而在點 0 取任一鄰近 $N(0)$ (在 Y 軸上), 當 $x\in N(1)$ 且 $x<1$ 時, 若有 $y\in N(0)$ 使 (x,y) 屬於 C, 則 $-y\in N(0)$ 亦可使 $(x,-y)\in C$. 故方程式 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ 在點 $(1,0)$ 鄰近並不能界定任何函數.

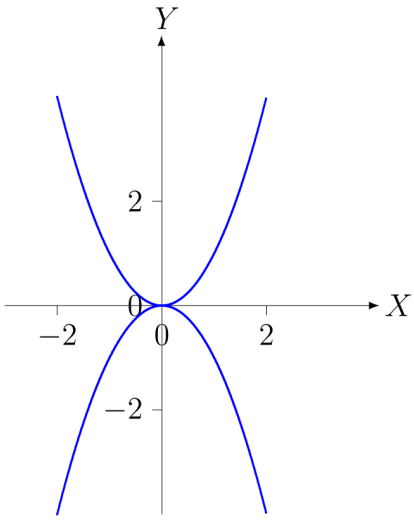


圖 3–34

又若方程式

$$F(x,y)=x^4-y^2=0$$

所界定之序對集合 $C=\{(x,y)\mid x^4-y^2=0\}$, 其圖形如右 : 除原點外, C 中之任一點皆可界定一隱函數.

綜觀上述之討論知, 有些方程式 $F(x,y)=0$ 所界定之集合 $\{(x,\,y)\mid F(x,y)=0\}$ 即爲一隱函數, 有些函數雖不能界定一隱函數, 但在某些點之鄰近可界定一隱函數, 在其他點則又不然. 至於何種方程式在何種點之鄰近可界定一隱函數之問題, 讀者可參考 Apostol [4], 定理 13.7 之隱函數定理.

若方程式 $F(x,y)=0$ 在點 (x_0,y_0) 之鄰近可界定一隱函數 $f\colon N(x_0)\to N(y_0)$, 而 f 在點 x_0 爲可微分時, 應如何求出導數 $f'(x_0)$? 其步驟如下:

(1) 方程式之左右兩端分別對 x 微分之, (視 y 爲 x 之函數).

(2) 移項後, 得 $y'=\cdots$.

(3) 以 (x_0,y_0) 代入其中之 (x,y) 即得所欲求.

例 1. 試求由方程式 $xy=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ 在點 $(2,0)$ 所界定之隱函數 f 於點 2 的導數 $f'(2)=?$.

【解】1° 方程式之左右兩端分別對 x 微分之, (視 $y=f(x)$ 爲 x 之函數). 則得

$$y+xy'=\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2},$$

2° 移項之得 $f'(x)=y'=\dfrac{y(1+x^2+y^2)}{x(1-x^2-y^2)}$.

3° 以 $(2,0)$ 代 (x,y) 於上式中, 則

$$f'(2)=\frac{0(1+2^2+0^2)}{2(1-2^2-0^2)}=0.$$ □

例 2. 若 $x^3-x\ln y+y^3=2x+5$, 試求此曲線在 $(2,1)$ 點的切線方程式.

【解】1° 方程式之左右兩端分別對 x 微分之, (視 y 爲 x 之函數), 則

$$3x^2-\ln y-\frac{xy'}{y}+3y^2y'=2.$$

2° 移項後, 得 $y'=\dfrac{2-3x^2+\ln y}{3y^2-\frac{x}{y}}$.

3° 將點 $(2,1)$ 代入 (x,y) 之中, 則

$$y'=\frac{2-3\cdot 4}{3\cdot 1-\frac{2}{1}}=-10,$$

4° 所求之切線方程式爲 $y-1=-10(x-2)$.

例 3. 設 $y=f(x)$ 爲由方程式 $x^3-3xy+y^3=-1$ 所界定之可微分函數, 試求 $f'(0)$ 與 $f''(0)$.

【解】先將 x 以 0 代入, 則原方程式變爲

$$0-0+y^3=-1.$$

得 $y=-1$, 換言之, 我們將討論過點 $(0,-1)$ 之隱函數之一、二階導數. 原方程式左右兩端分別對 x 微分之, 則

$$3x^2-3y-3xy'+3y^2y'=0. \qquad (*)$$

移項之, 得 $y'=\dfrac{y-x^2}{y^2-x}$, 以 $(0,-1)$ 代入, 得 $f'(0)=-1$. 其次, 再將 $(*)$ 之兩端對 x 微分之, 則

$$6x-3y'-3y'-3xy''+6y(y')^2+3y^2y''=0.$$

移項之, 得 $y''=\dfrac{-2x+2y'-2y(y')^2}{y^2-x}$, 以 $(0,-1)$ 代入 (x,y), -1 代 y' 得

$$f''(0)=\frac{0-2+2\cdot 1}{1}=0.$$ □

註： 本題另一解法: 由於 $x^3-3xy+y^3+1=(x+y+1)(x^2-xy+y^2-x-y+1)$, (不容易也), 又當 $|x|$ 甚小時, $x^2-xy+y^2-x-y+1\approx y^2-y+1>0$, 故

$$x^3-3xy+y^3=-1 \;\Rightarrow\; x+y+1=0,$$

亦即 $y=-x-1$, 亦可解得 $f'(0)=-1,\ f''(0)=0$.

§ 3.13 參數方程微分法

所謂**參數方程式** (parametric equations)

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \end{cases} \quad t\in S, \quad (S \text{ 爲 } \mathbb{R} \text{ 之一非空子集}).$$

乃向量函數 $\mathbf{F}\colon S\to\mathbb{R}^2:\mathbf{F}(t)=(f(t),\,g(t))$ 之簡寫, 內 f 與 g 爲定義於集合 S 上之二實值函數; 變數 t 常被稱爲**參數** (parameter). 而 $\mathbf{F}$ 之值域表在 $\mathbb{R}^2$ 平面上之圖形則被稱爲此參數方程式所決定之**參數曲線** (parametric curve). 本節之目的在於研究一些參數曲線之繪製, 並利用微分方法以探討曲線上某點之傾斜程度, 藉以增加對參數曲線之了解.

例 1. 試繪製參數曲線 $\begin{cases} x=1+t, \\ y=2t-3, \end{cases}\quad t\in\mathbb{R}.$

【解】如果我們將上述二式之參數消去, 可得 $2x-y=5$, 亦即 $y=2x-5$, 表爲向量函數時則爲 $\mathbf{F}\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2:\mathbf{F}(t)=(1+t,\,2t-3)$.

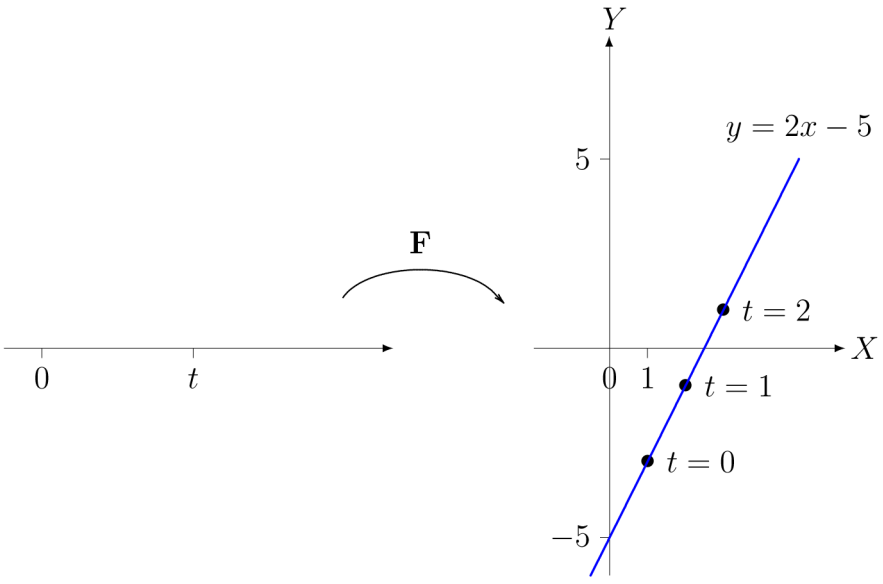


圖 3–35 註: 右圖中 $t=0$ 表當 $t=0$ 時 $\mathbf{F}(t)$ 之位置

例 2. 試繪製參數曲線 $\begin{cases} x = t^{-2}, \\ y = 2\,t^{-1}, \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}^*$.

【解】消去參數 t, 可得 $y^2 = 4x$, 但顯然 $(x, y) \neq (0, 0)$, 故應爲 $y^2 = 4x \neq 0$, 表爲向量函數時則爲 $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{F}(t) = (t^{-2},\, 2\,t^{-1})$. (參閱圖 3–36).

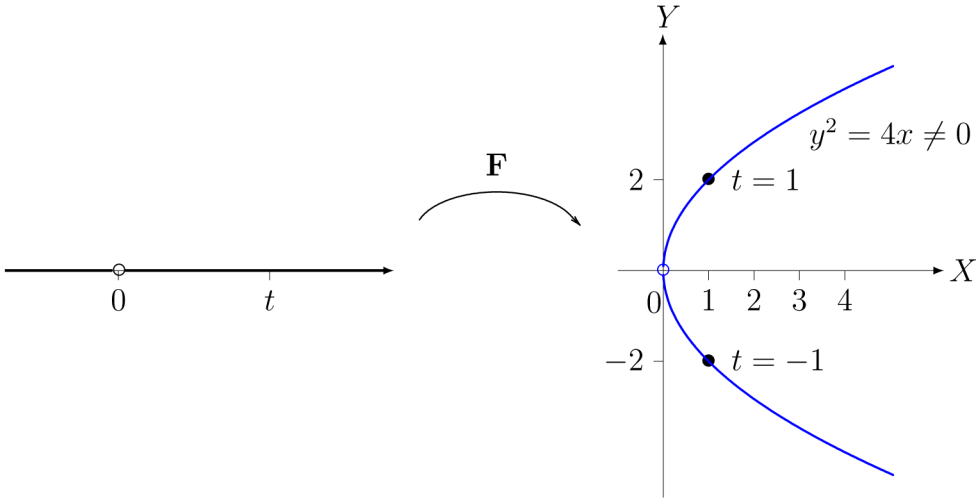


圖 3–36

例 3. 試繪製參數曲線 $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t}, \\ y = t - \dfrac{1}{t}, \end{cases}$ $t \in (0, +\infty)$.

【解】1° 由上述二方程式顯然可得,

$$x + y = 2t,$$

$$x - y = 2/t,$$

是以 $x^2 - y^2 = 4$, 亦即參數曲線之點均在雙曲線 $x^2 - y^2 = 4$ 之上.

2° 反之, 若點 (x, y) 爲雙曲線 $x^2 - y^2 = 4$ 右葉上之任意點, (即 $x > 0$). 由原設 $y = t - \dfrac{1}{t}$ 可解得 $t = \dfrac{y + \sqrt{y^2 + 4}}{2}$ ($\because t > 0$), 則

$$\frac{1}{t} = \frac{\sqrt{y^2 + 4} - y}{2} \text{ 且 } x = t + \frac{1}{t},\quad y = t - \frac{1}{t}.$$

綜合以上二點知原參數方程式所決定之曲線實乃雙曲線 $x^2 - y^2 = 4$ 之右葉. 表爲向量函數時則爲

$$\mathbf{F}\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{F}(t) = \left(t + \frac{1}{t},\, t - \frac{1}{t}\right).$$

(參閱圖 3–37).

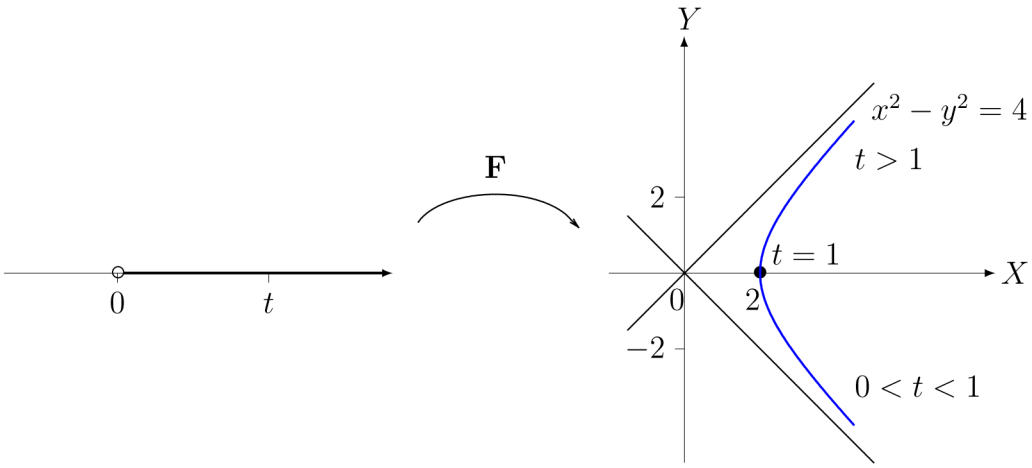


圖 3–37

其次, 我們將探討參數方程式

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases} \quad t \in S,$$

所決定之曲線上某一點 (x_0, y_0) 之切線斜率, 內 $x_0 = f(t_0),\ y_0 = g(t_0)$. 設 f 與 g 在點 t_0 皆爲可微.

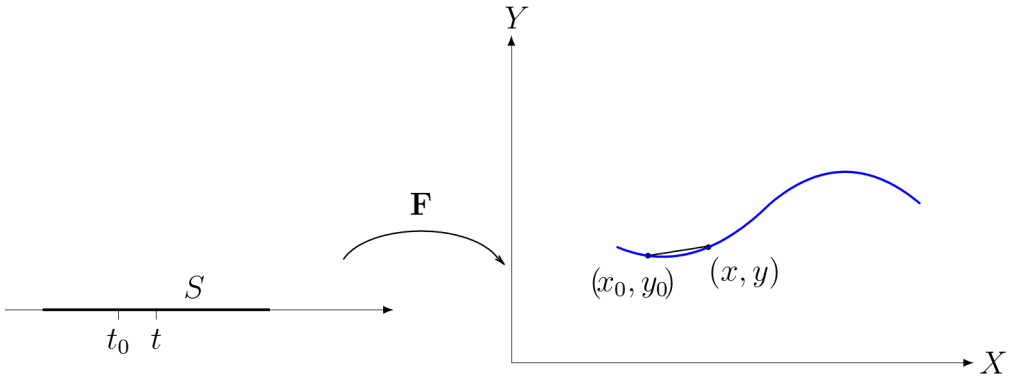


圖 3–38： $\mathbf{F} = (f, g)$

一. 若 $f'(t_0) \neq 0$, 亦即 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t_0} \neq 0$, 設 $x = f(t)$, $y = g(t)$, 則

$$\frac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)} \tag{1}$$

表示參數曲線上點 (x, y) 與 (x_0, y_0) 二點連線之斜率; 當 t 趨近於 t_0 時, (1) 式之極限 (若其存在) 乃所求之斜率, 即

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t_0} = \lim_{t \to t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{f(t) - f(t_0)} = \lim_{t \to t_0} \frac{\dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}}{\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}} = \frac{\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t_0}}{\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t_0}}. \tag{2}$$

如果 t_0 爲任意點, 上式更可簡爲

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}. \tag{3}$$

二. 若 $f'(t_0) = 0$ 時, 亦即 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t_0} = 0$.

(i) 若 $g'(t_0) \neq 0$, 則 (1) 之絕對值之極限爲

$$\lim_{t\to t_0}\left|\frac{g(t)-g(t_0)}{f(t)-f(t_0)}\right| = \lim_{t\to t_0}\left|\frac{\dfrac{g(t)-g(t_0)}{t-t_0}}{\dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}}\right| = +\infty$$

(極限不存在), 即 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t_0}$ 不存在, 此時在點 (x_0, y_0) 有垂直切線.

(ii) 若 $g'(t_0) = 0$, 則利用導數之極限定理.

- 如果 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{dy}{dx}$ 存在, 則 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t_0} = \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{dy}{dx}$.
- 如果 $\lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{dy}{dx} = \pm\infty$, 則 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}$ 不存在.

註： 此外, 我們亦可利用消去法, 先解得含 x 與 y 之方程式, 再以隱函數方法求其導數.

例 4. 設曲線 $\begin{cases} x = t + \dfrac{1}{t}, \\ y = t - \dfrac{1}{t}, \end{cases}$ $t \neq 0$, 試求切於此曲線而斜率爲 2 之直線.

【解】由於 $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{dx}{dt} = 1 - t^{-2}$, $\dfrac{dy}{dt} = 1 + t^{-2}$, 是以當 $|t| \neq 1$ 時,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1+t^{-2}}{1-t^{-2}} = \frac{t^2+1}{t^2-1}.$$

依題意

$$\begin{aligned} \text{此曲線之切線斜率爲 } 2 &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \\ &\Leftrightarrow \frac{t^2+1}{t^2-1} = 2 \\ &\Leftrightarrow t^2+1 = 2(t^2-1) \\ &\Leftrightarrow t^2 = 3 \\ &\Leftrightarrow t \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

1° 若 $t=-\sqrt{3}$, 則切點之坐標爲 (x,y) 其中

$$\begin{cases} x=-\sqrt{3}+\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{4}{\sqrt{3}}, \\ y=-\sqrt{3}-\dfrac{-1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

是以切線爲 $y=2\Big(x+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Big)-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

2° 若 $t=\sqrt{3}$, 則切點之坐標爲 (x,y) 其中

$$\begin{cases} x=\sqrt{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}, \\ y=\sqrt{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \end{cases}$$

是以切線爲 $y=2\Big(x-\dfrac{4}{\sqrt{3}}\Big)+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. □

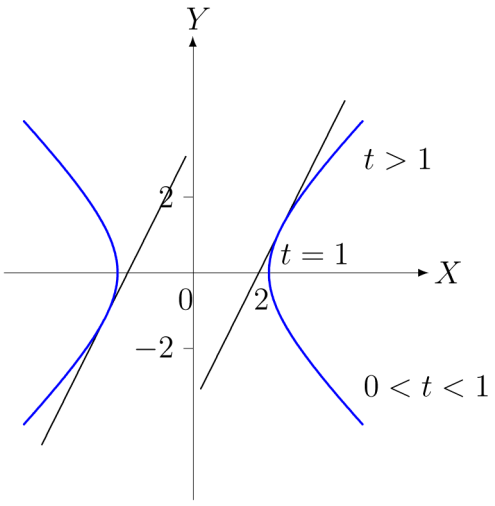


圖 3–39

例 5. 設 $\begin{cases} x=4\cos t, \\ y=t^2, \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$,

試求上述參數方程式在點 t 之導數 $\dfrac{dy}{dx}$, 並求 $t=0$ 時此曲線之切線方程式.

【解】 1° 由於

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-4\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt}=2t, \end{cases}$$

是以當 $t\notin\{0,\pi,2\pi\}$ 時, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{t}{2\sin t}$.

2° 當 $t=\pi$ 時, 由於

$$\lim_{t\to\pi}\left|\frac{dy}{dx}\right|=\lim_{t\to\pi}\left|-\frac{t}{2\sin t}\right|=+\infty,$$

知 $\dfrac{dy}{dx}$ 不存在, 同理 $t=2\pi$ 時, 亦不存在.

3° 當 $t=0$ 時,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\lim_{t\to0^+}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to0^+}-\frac{t}{2\sin t}=-\frac{1}{2};$$

而切點爲 $(x,y)=(4,0)$, 故此曲線之切線方程式爲 $y=-\dfrac{1}{2}(x-4)$.

(參閱圖 3–40).

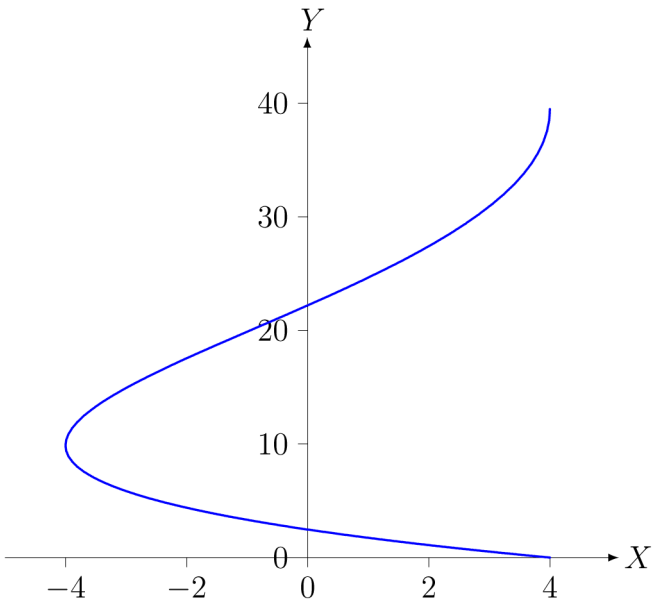


圖 3–40 （註：二軸之單位不同）

例 6. 擺線 (cycloid)

設有一半徑爲 a 之圓, 於 X 軸上向右滾動, 則圓上一固定點 P 之軌跡稱爲一擺線.

(1) 設 P 開始時在原點, 試求 P 之軌跡;

(2) 當 $0 \le t \le 2\pi$ 時, 試求 $\dfrac{dy}{dx}$.

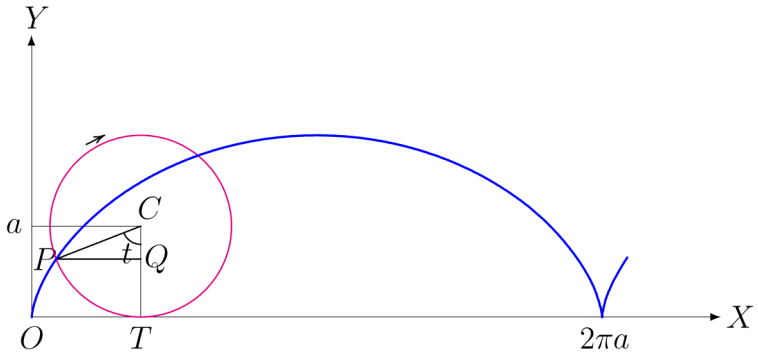


圖 3–41

【解】(1) 當圓旋轉角度爲 t, $(0 < t < 2\pi)$ 時, 點 P 之坐標爲 $(x(t), y(t))$. 先考慮 t 爲銳角之情形, ($t \ge \pi/2$ 同理), 由於 $\triangle CPQ$ 爲一直角三角形且 $\angle PCQ = t$, 顯然

$$PQ = a\sin t,\ QC = a\cos t,\ OT = \overset{\frown}{PT} = at,$$

是以

$$at - x(t) = a\sin t,\ a - y(t) = a\cos t,$$

移項之, 得, $\begin{cases} x(t) = a(t - \sin t), \\ y(t) = a(1 - \cos t). \end{cases}$

(2) 由於 $\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = a(1-\cos t), \\ \dfrac{dy(t)}{dt} = a\sin t, \end{cases}$ 故當 $0 < t < 2\pi$ 時,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy(t)/dt}{dx(t)/dt} = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

而當 $t \in \{0, 2\pi\}$ 時, 因

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = +\infty, \\ \lim\limits_{t\to 2\pi^-} \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{t\to 2\pi^-} \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = \lim\limits_{t\to 2\pi^-} \dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \lim\limits_{t\to 2\pi^-} \dfrac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} = -\infty, \end{cases}$$

是以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$ 及 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=2\pi}$ 皆不存在. □

例 7. 內擺線 (hypocycloid or Astroid)

設有一圓心爲原點, 半徑爲 a 之圓內切一半徑爲 $a/4$ 之小圓於點 $A(a,0)$, 今小圓緊貼於大圓以順時針方向旋轉.

(1) 試求小圓圓周上之固定點 P (開始時在$A(a,0)$) 之軌跡.

(2) 當 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ 時, 試求 $\dfrac{dy}{dx}$ 及 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 當 $\theta \in \left\{0, \dfrac{\pi}{2}\right\}$ 時, 試問 $\dfrac{dy}{dx}$ 是否存在?

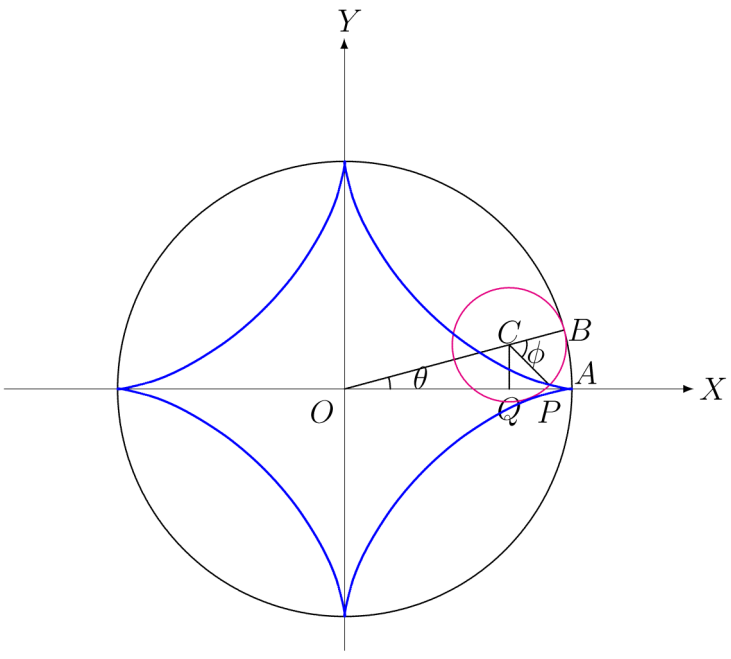


圖 3–42

【解】(1) 設小圓之圓心爲 C, 點 Q 爲點 C 之垂足, $\theta = \angle AOC$, $\phi = \angle BCP$. 則因

$$a\theta = \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{PB} = \frac{a}{4} \cdot \phi,$$

是以 $\phi = 4\theta$, 故得

$$\angle PCQ = \pi - \phi - \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\pi}{2} - 3\theta.$$

若點 P 之坐標爲 (x, y), 則因點 C 位於 $\left(\frac{3a}{4}\cos\theta,\ \frac{3a}{4}\sin\theta\right)$, 故

$$\begin{aligned} x &= \frac{3a}{4}\cos\theta + \frac{a}{4}\sin(\angle PCQ) = \frac{3a}{4}\cos\theta + \frac{a}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) \\ &= \frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta) = a\cos^3\theta, \\ y &= \frac{3a}{4}\sin\theta - \frac{a}{4}\cos(\angle PCQ) = \frac{3a}{4}\sin\theta - \frac{a}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) \\ &= \frac{a}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = a\sin^3\theta. \end{aligned}$$

故得點 P 之軌跡爲 $\begin{cases} x = a\cos^3\theta, \\ y = a\sin^3\theta, \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$. 消去 θ, 則得

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

(2) 由於

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\theta} = -3a\cos^2\theta\sin\theta, \\ \dfrac{dy}{d\theta} = 3a\sin^2\theta\cos\theta, \end{cases}$$

故當 $0 < \theta < \pi/2$,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{d}{d\theta}(dy/dx)}{dx/d\theta} = \frac{-\sec^2\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta} = \frac{1}{3a}\sec^4\theta\csc\theta. \end{aligned}$$

(3) 利用導數之極限定理,

- 因 $\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\theta\to 0^+} -\tan\theta = 0$, 故知 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=0} = 0$;
- 因 $\lim\limits_{\theta\to \pi/2^-}\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\theta\to \pi/2^-} -\tan\theta = -\infty$, 是以 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\theta=\pi/2}$ 不存在. □

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

第 三 章 習 題

注意：本習題中, $[\cdot]$ 乃最大整數函數.

特殊函數之基本運算

3-1 試求下各極限：

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sqrt{2}\cdot x)}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{[x]}{x-1}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-[x]}{a^{[x]}}$, 內$a>1$.

3-2 先求下列各函數之定義域、再求其導函數：

(a) $f(x)=[x]-\sin x$;

(b) $f(x)=\csc^{-1}\sqrt{x+1}$;

(c) $f(x)=\ln(x^2-x)-x\cdot\tan^{-1}(x/2)$;

(d) $f(x)=x^{\sqrt{x-1}}$.

3-3 設 $f(x)=e^x\sin x,\ n\in\mathbb{N}$, 試證：$f^{(n)}(x)=(\sqrt{2})^n e^x\sin(x+\dfrac{n\pi}{4})$.

3-4 設函數

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=\begin{cases}\cos(1/x), & \text{若 } x\neq 0,\\ 0, & \text{若 } x=0;\end{cases}$$

$$g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}:g(x)=x\cdot f(x);$$

$$h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}:h(x)=x\cdot g(x);$$

試討論上述三函數是否爲連續? 是否爲可微?

3-5 設函數 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{若 } x\neq 0,\\ 0, & \text{若 } x=0,\end{cases}$ 試證 f 可微, 但不爲連續可微.

3-6 設 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=a\cdot e^x-b\cdot e^{-x}$, 其中 a 與 b 均爲大於零之常數. 試證：f 爲對射, 並試求 f^{-1} 及其導函數.

[提示] $\lim\limits_{x\to+\infty}\exp x=+\infty$ 視爲已知.

特殊函數與均值定理及極值問題

3-7 若 $x,y>0$ 且 $x+y=2$, 試利用微積分方法證明：$4\le 2^x+2^y<5$.

3-8 試利用均值定理證明：

(a) $\forall\, a \in (0,1], \forall\, x > 0, \sin x < x^a$;
[提示] 先證 $\forall\, x \in (0,1],\ \sin x < x$.

(b) $x, y \in [-\pi/2, \pi/2],\ x > y$, 則 $\sin x - \sin y < x - y$;
[提示] 應分 $0 < y < x, y < x < 0, y < 0 < x$ 討論.

(c) 若 $0 < a < b$, 則
$$\frac{b-a}{1+b^2} < \tan^{-1} b - \tan^{-1} a < \frac{b-a}{1+a^2};$$

(d) $\forall\, x \in (0, +\infty),\ \sinh^{-1} x < x$;

(e) $10 + \dfrac{17}{20} > \sqrt{117} > 10 + \dfrac{17}{22}$.

3-9 試證 : $\forall\, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right),\ \dfrac{2}{\pi} < \dfrac{\sin x}{x} < 1$.

3-10 已知 $\exp_a(x+y) = \exp_a(x) \cdot \exp_a(y)$, 內 $a > 1$. 試證 :

$$\forall\, x \in \mathbb{Q},\quad a^x = \exp_a(x).$$

3-11 設 f 在 $\mathbb{R}$ 上爲可微分函數, 且滿足

$$f(x+y) = f(x)f(y), x, y \in \mathbb{R}.$$

試證 : $f = 0$ 或存在 $\alpha \in \mathbb{R}$, 以使 $f(x) = e^{\alpha x}$.

3-12 試求曲線 $y = \dfrac{8}{1 + 3 \cdot e^{-x}}$ 之切線的最大可能斜率.

3-13 光線自點 A 經一平面鏡反射至點 B. 利用導數方法, 試證 : 爲使光行進之時間爲最短, 則入射角應等於反射角.

3-14 試利用不等式: $\ln x \le x - 1,\ \forall\, x > 0$, 證明**算幾不等式** (arithmetic-geometric-mean inequality), (n 個正數之幾何平均恆小於或等於其算術平均), 即

$$\forall\, x_1, \ldots, x_n > 0,\quad (x_1 \cdots x_n)^{1/n} \le \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

參數方程式及隱微分法

3-15 試求下列方程式所界定之隱函數的導函數 y':

(a) $3^{xy} = \cot x + y$;

(b) $x \cosh y + \sqrt{xy} = 7$;

(c) $a^x + b^y = a^2 b^2$, (內 $a, b > 0$), 並求 y''.

3-16 試求曲線 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ 在點 $(2,2)$ 之切線方程式, 並繪出 f 及此切線之圖形.

3-17 試求參數方程式 $\begin{cases} x=t-t^2, \\ y=t-t^3, \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$ 之一、二階導數 $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

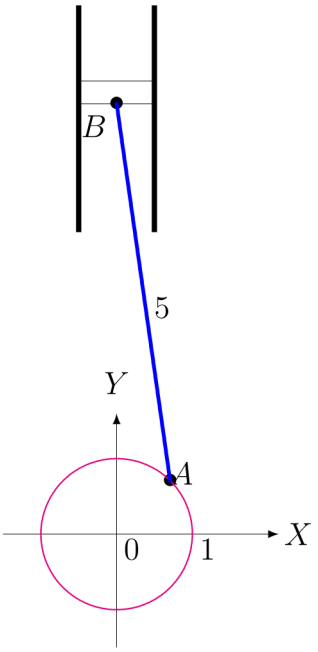
3-18 設 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\cos 4t, \end{cases}$ $t\in[0,\pi/2]$.

(a) 試求上述參數方程式在點 t 之導數 $\dfrac{dy}{dx}$.

(b) 設此曲線與 X 軸相交之點爲切點, 試求這些切線.

應用題

3-19 設一壓縮機之曲軸軸心在原點, 半徑爲 1 呎, 並以反時針方向每秒鐘旋轉 1 弪, 連桿之長度爲 5 呎, 曲軸與連桿之連接點爲 A, 連桿之上方端點 (與活塞之接點) 爲 B, 時間 $t=0$ 時, 點 A 在坐標 $(1,0)$, 如圖所示,



(a) 試求在 t 秒時, 點 A 及 點 B 之坐標 ;

(b) 試求在 $t=3\pi/4$ 秒時, 點 B 之速度 ;

(c) 若轉速變爲每分鐘旋轉 60 次, 試求在 t 秒時, 點 B 之速度.

3-20 設點 P 爲 sin 與 cos 二函數最接近原點之交點, 試求二曲線過點 P 之切線的夾角 θ ($\in[0°,90°]$).

[註] 先求交點之坐標及二切線之導數.

3-21 設某君存款 M 元, 年利率 7%, 以連續複利計算, 問存款多久其本利和爲 $3M$.

3-22 設甲銀行定期存款以年利率 7% 連續複利計息, 乙銀行欲以年利率 r 每月複利計息且使一年到期之本利和與甲銀行相同, 試問 $r=?$ (應計算至小數第五位).

3-23 在一實驗中, 一開始培養了 10^5 的細菌, 5 小時後細菌增爲 10^6, 試將細菌數目 $n(t)$ 表爲時間 t 之函數.

3-24 設定期存款之年利率 r 爲固定, 以每年 m 期複利計息, 試證 m 越大對於存款者越有利, 即 $m>k>0$ 時,

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m>\left(1+\frac{r}{k}\right)^k.$$

觀念題

3-25 以下各題各舉一例:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 爲嵌射 (injection) 而非單調;

(b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 爲遞增且其值域爲有界;

(c) $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 爲有界但無極值;

(d) 集合 A 爲 B 之眞子集, $f\colon A \to B$ 爲對射 (bijection);

(e) $f\colon [0,1] \to (2,4)$ 爲蓋射 (surjection).

Chapter 4

Taylor 定理與導數之應用

除了多項式與有理函數之外, 在第三章我們又介紹了一些最基本且最常用的函數, 並討論了它們的微分法. 在此, 我們要更進一步的研究函數之局部性質, 此乃微積分學第一主題 —— 微分學的最主要目的.

在我們所認識的函數中, 最易於掌握了解者當然首推多項式函數, 因爲計算其值時只需加減乘除四則運算, 而且它的微分法也最爲簡易. 然而三角函數、指數函數及對數函數也十分重要, 在物理、測量、土木、建築、機械 $\cdots$ 等學科之應用極廣, 它們的函數值又如何『求出』? 有人認爲電腦或計算器皆可求出, 其實電腦或計算器只能利用四則運算計算『數與數』之間之和、差、積或商. 本章的 Taylor 定理將證明凡是 n 階可微的函數, 在某點之鄰近就近似於一個 n 次多項式, 由於電腦的協助使得這些特殊函數之值可獲得極爲精確之近似值, 所以說 Taylor 定理爲微分學中最重要的定理並不爲過.

§ 4.1 優良近似函數與 Taylor 定理

如果 $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$, 則有

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ (\forall\,x)(0<|x-p|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)|<\epsilon|g(x)|).$$

我們常寫爲 $f(x)=o(g(x))$, (讀爲『小 o』(small-oh)). 例如 :

$$\sin x=o(1),\ (\text{當 } x\to 0 \text{ 時.})$$

又若分母之極限亦爲 0, 即 $\lim\limits_{x\to p}g(x)=0$, 我們說 : 當 x 趨近於 p 時, $f(x)$ 趨近於 0 較 $g(x)$ 趨近於 0 爲快, 例如 :

$$x^2=o(x),\ x^3=o(x^2),\ x=o(\sqrt{x}),\ (\text{當 } x \text{ 趨近於 } 0 \text{ 時.})$$

設 f 爲一函數, $p \in D_f$, 我們考慮, 在界定於點 p 之某一鄰近 $N(p)$ 上之諸多函數中, 應如何定出一標準, 以衡量其近似於 f 之程度的優劣, 當然, 對於所謂在 p 之鄰近 $N(p)$ 近似於 f 之函數 g, 我們至少有兩點要求 : (i) $g(p) = f(p)$; (ii) 當 $(x-p)$ 趨近於 0 (即 x 趨近於 p) 時, $(f(x) - g(x))$ 之極限爲 0. 由於滿足此二條件之函數甚多, (如圖 4–1 所示) 若 f 於點 p 爲連續, 凡過點 $(p, f(p))$ 之任何連續函數皆可, 在第二章定理 2.21 中我們知道, 若 f 在點 p 爲可微分, 則

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - (f'(p)(x-p) + f(p))}{x-p} = 0,$$

說明過點 $(p, f(p))$ 之切線 $y = f'(p)(x-p) + f(p)$ 與 $f(x)$ 之差是 $o(x-p)$, 我們自然會聯想到是否存在函數 (多項式), 它與 $f(x)$ 之差更小, 是 $o((x-p)^2)$ 甚至於是 $o((x-p)^n)$, 我們將以此種條件來界定所謂的優良近似函數 :

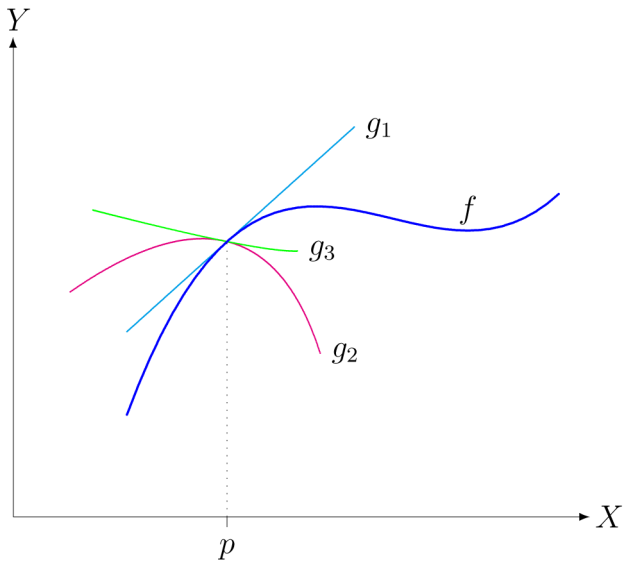


圖 4–1

定義 4.1

設 f 與 g 爲二函數, 若

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - g(x)}{(x-p)^n} = 0,$$

則稱 g 爲 f 在點 p 之一 n **階優良近似函數** (good approximation of n-th order).

然而標準人人會訂, 重點是能否不太費力找到, 而且是易於掌握的優良近似函數, (多項式當然最好), 所幸以下之 Taylor 定理提供我們一個簡單而有效的方法, 以求得一 n 次多項式, 使其爲 f 在點 p 之一 n 階優良近似函數.

本章中多次提到『區間』, 若無特別聲明, 皆指 非退化區間.

定理 4.2 （**Taylor 定理**）

設區間 $[a,b]\subset D_f$, $n\in\mathbb{N}$, 若

(1) $f^{(n-1)}$ 在 $[a,b]$ 爲連續 ;

(2) $f^{(n-1)}$ 在 (a,b) 爲可微 .

則存在 $c\in(a,\,b)$ 使得

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n. \qquad (*)$$

【證】令 $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$:

$$g(x)=f(b)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k-R_n\cdot\frac{(b-x)^n}{(b-a)^n}, \qquad ①$$

其中 R_n 爲一常數滿足 $g(a)=0$. 則

- g 在區間 $[a,b]$ 上爲連續 ;
- g 在區間 (a,b) 上爲可微且 $\forall x\in(a,b)$,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}+R_n\cdot\frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}\\&=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+R_n\cdot\frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}\\&=-\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}+R_n\cdot\frac{n(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n}. \qquad ②\end{aligned}$$

- $g(a)=g(b)=0$.

利用 Rolle 定理知, 存在 $c\in(a,b)$ 使得 $g'(c)=0$, 由 ② 式應有,

$$0=-\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}+R_n\cdot\frac{n(b-c)^{n-1}}{(b-a)^n}.$$

是以 $R_n=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$. 其次, 在 ① 式中以 a 代 x, 並將 R_n 之值代入, 則得

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n. \qquad \square$$

註 : 若 $n=1$, 則 Taylor 定理乃爲微分均值定理.

上述定理之主要目的 : 「以區間 $[a,b]$ 之左端點 a 之各階導數以推斷右端點 b 之值」, 當然我們可利用左右互換之對偶性觀念, 以右端點之各階導數以推斷左端點之值, 而得以下之定理.

定理 4.3 （**Taylor** 定理之對偶定理）

設區間 $[a,b]\subset D_f$, $n\in\mathbb{N}$, 若

(1) $f^{(n-1)}$ 在 $[a,b]$ 爲連續；

(2) $f^{(n-1)}$ 在 (a,b) 爲可微；

則存在 $c\in(a,\,b)$ 使得

$$f(a)=f(b)+f'(b)(a-b)+\frac{f''(b)}{2!}(a-b)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}(a-b)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(a-b)^n. \qquad (**)$$

【證】仿 4.2 之證. □

系 4.4

設 I 爲一區間, $p\in I$, f 於 I 上爲 n 階可微, 則 $\forall x\in I\setminus\{p\}$, 存在 c 介於 p 與 x 之間, 使得

$$f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n. \qquad (\overset{*}{**})$$

【證】由上述二定理立可得證. □

定義 4.5

(1) 在上述定理及系中之 $(*)$, $(**)$, $(\overset{*}{**})$ 式皆稱爲 n **階 Taylor 展開式** (Taylor's expansion of nth order) 或 n **階 Taylor 公式** (Taylor's formula).

(2) $(\overset{*}{**})$ 之 Taylor 展開式的最後一項 $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n$ 稱爲此展開式之**餘項** (remainder), 並記爲 $R_n(x)$.

(3) 若 f 在點 p 爲 n 階可微分, 則稱多項式

$$P_n(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j,$$

爲 n **次 Taylor 多項式**(nth degree Taylor's polynomial).

(4) 若 p 爲原點 0, 則 Taylor 展開式 (公式)、Taylor 多項式分別稱爲 **Maclaurin 展開式 (公式)** 及**Maclaurin 多項式**.

應用廣泛的特殊函數, 尋求其 n 階優良近似多項式的工作, 在 Taylor 定理的協助下, 終於有了如下之成果, 爲了方便以後的說明, 我們先證明以下之引理.

引理 4.6

設 I 爲一區間, $p \in I$, f 於 I 上爲 n 階可微, 則 $\lim\limits_{x\to p} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(p)$. 其中 c 爲滿足系 4.4 之 (⁂) 式者. (注意 : c 介於 p 與 x 之間, 因 x 而變.)

【證】若 f 於 I 上爲『 n 階連續可微』, 則本系之結論至爲顯然, 但若僅知其爲『n 階可微』, 證明參閱附錄五. □

定理 4.7

設 I 爲一區間, $p \in I$, f 於 I 上爲 n 階可微, 則 $P_n(x)$ 爲 f 在點 p 之一 n 階優良近似函數, 即

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-p)^n} = 0.$$

【證】由 Taylor 定理及 P_n 之定義,

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n,$$
$$P_n(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n.$$

由引理得,

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-p)^n} = \lim_{x\to p} \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(p)}{n!} = 0.$$ □

例 1. 設 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \exp x$.

(1) 試求 f 之 n 階 Maclaurin 展開式 ;

(2) 試求 f 之 n 階 優良近似多項式 ;

(3) 試繪出 f, P_1, P_2, P_3 之圖.

【解】(1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists c \in (0,x)$ or $(x,0)$, 使得

$$\exp x = f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n.$$

(2) f 之 1, 2, 3 階優良近似多項式分別爲

$$P_1(x) = 1 + x,$$

$$P_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!},$$

$$P_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}.$$

(3) f, P_1, P_2, P_3 之圖形如圖 4–2. 讀者可注意觀察, 在原點附近 P_2 較 P_1 更爲接近 f, P_3 又更接近.

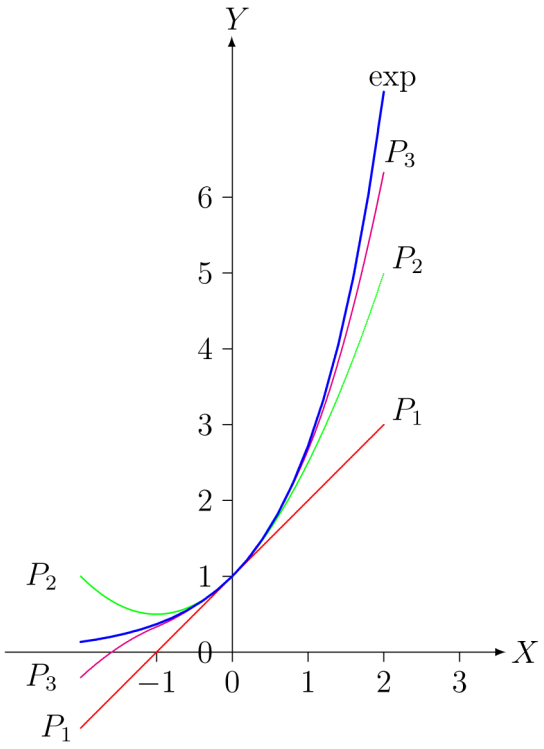


圖 4–2

例 2. 設 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \sin x$.

(1) 試求 f 之 n 階 Maclaurin 展開式 ;

(2) 試求 f 之 1, 3, 5, 6 階優良近似多項式 ;

(3) 試繪出 f, P_1, P_3, P_5 之圖.

【解】(1) 由於

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sin x, && f(0) = 0,\\
&f'(x) = \cos x, && f'(0) = 1,\\
&f''(x) = -\sin x, && f''(0) = 0,\\
&f'''(x) = -\cos x, && f'''(0) = -1,\\
&f^{(4)}(x) = \sin x, && f^{(4)}(0) = 0,\\
&\quad\vdots && \quad\vdots\\
&f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x,\\
&f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x,
\end{aligned}$$

顯然 sin 在點 0 之偶數階導數皆爲 0.

- 若 n 爲奇數, 令 $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$, 則 $\forall x\in\mathbb{R}^*, \exists\, c\in(0,x)$ or $(x,0)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1}+\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+R_{2k+1}(x)\\ &= \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+\frac{(-1)^k\cos c}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \end{aligned}$$

  此乃爲 $\sin x$ 之 $n=2k+1$ 階 Maclaurin 展開式.

- 若 n 爲偶數, 令 $n=2k, k\in\mathbb{N}$, 則 $\forall x\in\mathbb{R}^*,\ \exists\, c\in(0,\,x)$ or $(x,\,0)$ 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(2k-1)}(0)}{(2k-1)!}x^{2k-1}+R_{2k}(x)\\ &= \frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}+\frac{(-1)^k\sin c}{(2k)!}x^{2k}. \end{aligned}$$

  此乃爲 $\sin x$ 之 $n=2k$ 階 Maclaurin 展開式.

(2) f 之 1, 3, 5, 6 階優良近似多項式分別爲

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x,\\ P_3(x) &= x-\frac{x^3}{3!},\\ P_5(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!},\\ P_6(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+0=P_5(x). \end{aligned}$$

(3) $f,\ P_1,\ P_3,\ P_5$ 之圖:

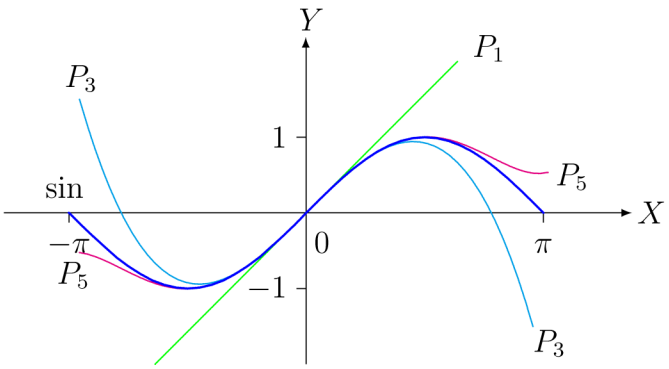


圖 4–3

從上圖中, 讀者是否發現次數越高之 Maclaurin 多項式, 在點 0 之鄰近之近似情況越佳. □

例 3. 試證 : $\exp(x-1)\geq 1+\ln x,\ \forall\, x>0.$

【解】令 $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}: f(x)=\exp(x-1)-\ln x$, 我們將證明 : $f(x)\geq 1,\ \forall\, x>0$.

1° 當 $x=1$ 時, 顯然 $f(1)=e^0-\ln 1=1$;

2° 當 $x\in(0,+\infty)\setminus\{1\}$ 時, 我們將利用 f 在點 1 之二階 Taylor 展開式以證明之, 由於

$$f'(x)=\exp(x-1)-\frac{1}{x},$$
$$f''(x)=\exp(x-1)+\frac{1}{x^2}>0,$$

$$f(x)=f(1)+\frac{f'(1)}{1!}(x-1)+\frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2,$$
(c 介於 1 與 x 之間.)
$$=f(1)+\frac{f''(c)}{2!}(x-1)^2$$
$$>f(1)=1.$$

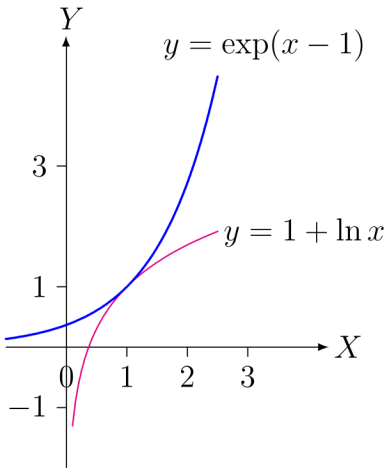


圖 4–4

註: 本題亦可利用極值方法, 證明 f 在點 1 有最小值.

例 4. 試求 $f(x)=\tan x$ 之四階 Maclaurin 展開式及四次 Maclaurin 多項式.

【解】由於

$$\begin{aligned}
&f(x)=\tan x, && f(0)=0,\\
&f'(x)=\sec^2 x, && f'(0)=1,\\
&f''(x)=2\sec^2 x\tan x, && f''(0)=0,\\
&f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x, && f'''(0)=2,\\
&f^{(4)}(x)=8\sec^2 x\tan^3 x+16\sec^4 x\tan x, && f^{(4)}(0)=0.
\end{aligned}$$

故 $\forall\, x\in(-\pi/2,\pi/2)\setminus\{0\},\ \exists\, c\in(0,\,x)$ or $(x,\,0)$ 使得

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+R_4(x)$$
$$=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+R_4(x),$$

此爲 f 之四階 Maclaurin 展開式, 其中餘項

$$R_4(x)=\frac{f^{(4)}(c)}{4!}x^4=\frac{8\sec^2 c\tan^3 c+16\sec^4 c\tan c}{4!}x^4.$$

而 f 之四次 Maclaurin 多項式則爲 $P_4(x)=\dfrac{x}{1}+\dfrac{x^3}{3}$. □

§ 4.2 極值

微分學部分, 應用最廣的可能要屬『極值問題』. 在第二章, 我們利用微分均值定理了解：在某區間上一函數之導數恆正或恆負時, 函數於此區間爲遞增或遞減, 並進而獲得判別極值點之一種方法. 然而, 該方法只使用一階導數而已, 本節中, 我們將進一步利用高階導數以解決極值問題.

定理 4.8

設 f 於 $N_\epsilon(p)$ 爲 n 階可微, 且

$$f'(p) = \cdots = f^{(n-1)}(p) = 0,\ f^{(n)}(p) \neq 0.$$

(1) 若 n 爲偶數且 $f^{(n)}(p) > 0$, 則 f 於點 p 有相對極小 ;

(2) 若 n 爲偶數且 $f^{(n)}(p) < 0$, 則 f 於點 p 有相對極大 ;

(3) 若 n 爲奇數, 則 f 於點 p 無極值 .

【證】由於 f 於 $N_\epsilon(p)$ 爲 n 階可微, 由系 4.6 知 Taylor 公式餘項中之 $f^{(n)}(c)$ 之極限爲 $f^{(n)}(p)$, 即

$$\lim_{x\to p} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(p). \quad (\text{註：}\ c \text{ 介於 } p \text{ 與 } x \text{ 之間})$$

利用極限之保號性質知, $\exists\,\delta,\ 0 < \delta < \epsilon$, 使得 $\forall\, x \in N^*_\delta(p),\ f^{(n)}(c)$ 與 $f^{(n)}(p)$ 同號.

(1) 若 n 爲偶數且 $f^{(n)}(p) > 0$, 則 $\forall\, x \in N^*_\delta(p)$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &= f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n \\ &= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n > 0. \end{aligned}$$

是以 f 於點 p 有相對極小, (參閱圖 4–5).

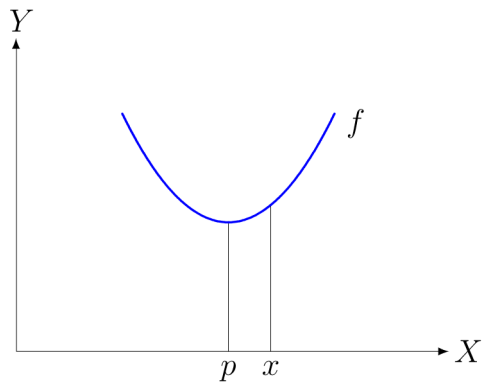


圖 4–5

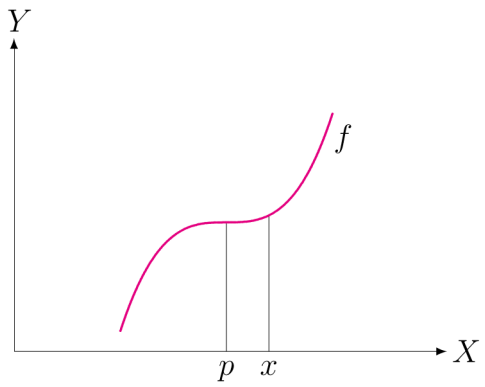


圖 4–6

(2) 仿 (1) 同理證之.

(3) 若 n 爲奇數,

- 當 $f^{(n)}(p) > 0$ 時, 則因 $\forall\, x \in N_\delta^*(p)$,

$$f(x) - f(p) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n \begin{cases} > 0, & \text{若 } x > p, \\ < 0, & \text{若 } x < p. \end{cases}$$

知 f 於點 p 無極值, (參閱圖 4–6).

- 當 $f^{(n)}(p) < 0$, 同理證之. □

系 4.9

設 f 於 $N_\epsilon(p)$ 爲二階可微, 且 $f'(p) = 0$.

(1) 若 $f''(p) > 0$, 則 f 於點 p 有相對極小 ;

(2) 若 $f''(p) < 0$, 則 f 於點 p 有相對極大 .

【證】易明. □

定理 4.10

設 D_f 爲一區間, 且 $f'(p) = 0$.

(1) 若 $\forall\, x \in D_f \setminus \{p\},\ f''(x) > 0$, 則 f 於點 p 有絕對極小 ;

(2) 若 $\forall\, x \in D_f \setminus \{p\},\ f''(x) < 0$, 則 f 於點 p 有絕對極大 .

【證】(1) $\forall\, x \in D_f \setminus \{p\}$,

$$\begin{aligned} f(x) - f(p) &= f'(p)(x-p) + \frac{f''(c)}{2!}(x-p)^2 \\ &= \frac{f''(c)}{2}(x-p)^2 > 0, \ (\because c \neq p) \end{aligned}$$

(2) 同理. □

求解極值問題之步驟

(1) 先瞭解題目是屬於計算題或是應用題. 如果是應用題必須先將題意轉換成計算題, 也就是將所考慮的“值”表爲“某變數”之函數. 這是解應用題最重要的關鍵.

(2) 求出臨界點集 $Z_{f'} \cup (D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f) \cup S_f$.

(3) 討論上述聯集之點有無極值 :

法一：繪表.

法二：如果題目只要求解出最大值與最小值, 且已知 f 連續於緊緻區間 D_f 上, 利用第一章之極值定理, 比較 臨界點集 內各點函數值之大小.

法三：利用二階以上導數, (即本節之各定理).

法四：利用配方法或不等式(如算幾不等式、Cauchy 不等式等).

例 1. 試求函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{3!}$ 之極值.

【解】1° 先證：函數 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \phi(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ 僅於點 0 有最小值 0. 因爲 $\forall\, x > 0,\ x > \sin x$, (見第三章第二節), 所以

$$\phi'(x) = -\sin x + x \begin{cases} < 0, & \text{若 } x < 0, \\ = 0, & \text{若 } x = 0, \\ > 0, & \text{若 } x > 0, \end{cases}$$

故知 ϕ 僅於點 0 有最小值 0. [註：我們省略了繪表, 由上述 ϕ' 之結果知, ϕ 在區間 $(-\infty, 0]$ 爲遞減, 而在區間 $[0, +\infty)$ 爲遞增.]

2° 次求 f 之各階導數. $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!}, \\ f''(x) &= -\sin x + x, \\ f'''(x) &= -\cos x + 1, \\ f^{(4)}(x) &= \sin x, \\ f^{(5)}(x) &= \cos x. \end{aligned}$$

其次, 由 1° 知,

$$f'(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0,$$

亦即 0 爲 f 之唯一臨界點, 又因爲

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = f^{(4)}(0),\ f^{(5)}(0) = 1.$$

是以知 f 於點 0 (及其他點) 並無相對極值. □

例 2. 若 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, 試求函數 $f(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + |x - a_3| + |x - a_4|$ 之最小值.

【解】先求 $|x-a_j|$ 之導函數,

$$D|x-a_j| = \begin{cases} -1, & \text{若 } x < a_j, \\ 1, & \text{若 } x > a_j. \end{cases}$$
$$= \operatorname{sgn}(x-a_j), \text{ 若 } x \neq a_j.$$

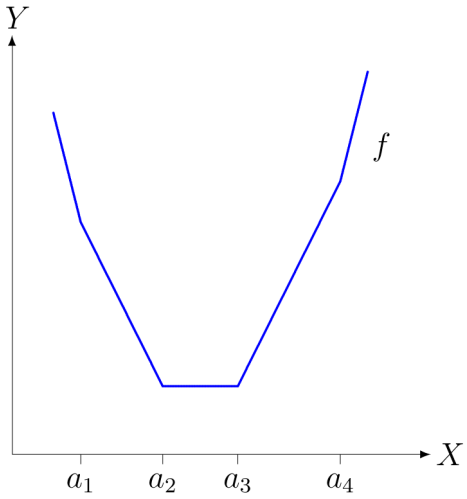


圖 4–7

其次, 若 $x \notin \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 則

$$f'(x) = D\sum_{j=1}^{4}|x-a_j| = \sum_{j=1}^{4}\operatorname{sgn}(x-a_j)$$
$$= \begin{cases} -4, & \text{若 } x < a_1, \\ -2, & \text{若 } a_1 < x < a_2, \\ 0, & \text{若 } a_2 < x < a_3, \\ 2, & \text{若 } a_3 < x < a_4, \\ 4, & \text{若 } a_4 < x. \end{cases}$$

故知 f 在 $(-\infty, a_2]$ 上爲遞減, 而於 $[a_3, +\infty)$ 上爲遞增, 在區間 $[a_2, a_3]$ 上爲常數, 是以 f 之最小值爲

$$f(a_2) = |a_2-a_1| + |a_2-a_2| + |a_2-a_3| + |a_2-a_4|$$
$$= a_3 + a_4 - (a_1 + a_2).$$ □

例 3. 一不動產公司處理 80 間公寓, 若每月租金爲 6000 元, 則全部都租出, 若每月租金每增加 200 元, 就增加一間租不出去, 此外, 已住人之公寓每月每間平均要付 600 元的服務費及維修費, (此項費用係由公司支付), 試問一間要租多少錢, 才能有最大收益?

【解】設每月租金增加 $200x$ 元, 則租不出去之房數爲 x, 租出之房數爲 $80-x$, 而每間之收益爲 $6000+200x-600$ 元, 依題意總收益爲

$$P\colon [0,80] \to \mathbb{R} : P(x) = (80-x)(6000+200x-600)$$
$$= 432000 + 10600x - 200x^2,$$

顯然

$$P'(x) = 10600 - 400x \begin{cases} > 0, & \text{若 } 0 \le x < 26.5, \\ = 0, & \text{若 } x = 26.5, \\ < 0, & \text{若 } 26.5 < x \le 80, \end{cases}$$

故知當 $x = 26.5$ 時, P 有最大值, 但房屋不能出租半間, 而 $P(26) = 1,836,000 = P(27)$, 換言之, 每間之租金爲 $6000+200\times 26 = 11,200$ 元或 $6000+200\times 27 = 11,400$ 元皆有最大收益. □

§ 4.3 函數凹凸性

在第二章我們業已討論過一階導數之幾何意義, 若函數在某區間上之一階導數爲正時, 不僅表示各切線之斜率爲正, 也說明了函數在該區間爲遞增. 至於二階導數, 我們所知有限, 本節我們將探討二階導數與函數圖形的關係.

界定在區間 $[a,c]$ 之函數 f, 其圖形 (參見圖 4–8) 在區間 $[a,b]$ 是凹向下的, 而在 $[b,c]$ 則是凹向上的. 當我們仔細觀察, f 在 $[a,b]$ 的圖形之所以說是凹向下, 乃是因爲連接圖形上任意二點 $(x_1,\, f(x_1))$, $(x_2,\, f(x_2))$ 之連線都在 f 圖形之下. 反之, 在 $[b,c]$ 上任意二點 $(x_3,\, f(x_3))$, $(x_4,\, f(x_4))$ 之連線都在 f 圖形之上.

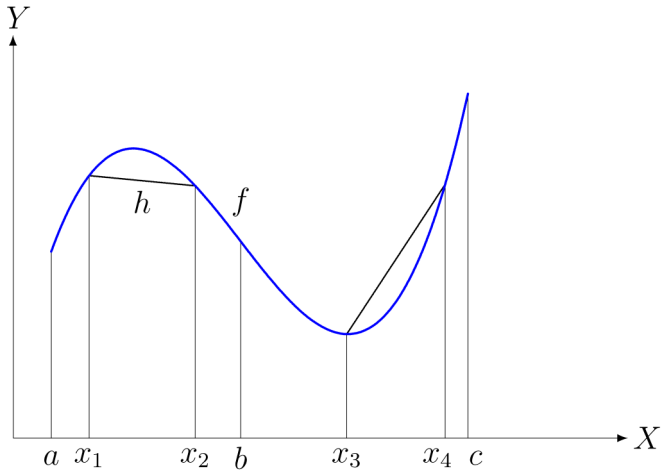


圖 4–8

基於以上之觀察與討論, 我們作如下之定義 :

定義 4.11

設 I 爲一區間, $f\colon I \to \mathbb{R}$,

f 爲一**凸函數** (convex) 或**凹向上** (concave upward)

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ (原始觀念) 割線 h 皆在曲線之上 (參閱圖 4–9)

$\Leftrightarrow\ \forall\, x_1,\ x_2 \in I,\ x_1 < x_2,\ \forall\, x \in (x_1,x_2),\ f(x) < h(x),$

$$\left(\text{其中 } h\colon (x_1,x_2) \to \mathbb{R} : h(x) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + f(x_1)\right)$$

$\Leftrightarrow\ \forall\, x_1,\ x_2 \in I,\ x_1 < x_2,\ \forall\, \alpha \in (0,1),$

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2). \qquad (\dagger)$$

(†) 設 $\alpha = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$, 應有

- $\alpha x_2 - \alpha x_1 = x_2 - x$, 是以 $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, $f(x) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2)$;
- $1 - \alpha = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, 是以

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \\ &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x_1)) + f(x_1) \\ &= (1-\alpha)(f(x_2) - f(x_1)) + f(x_1) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2). \end{aligned}$$

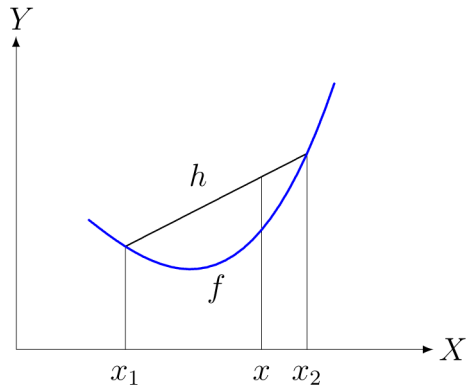


圖 4–9

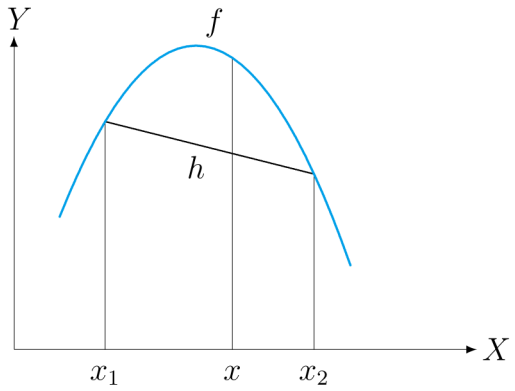


圖 4–10

與凸函數相對偶之觀念則爲凹函數, 仿照上述定義應有 :

定義 4.12

設 I 爲一區間, $f\colon I \to \mathbb{R}$,

f 爲一**凹函數** (concave) 或**凹向下** (concave downward)

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ (原始觀念) 割線 h 皆在曲線之下 (參閱圖 4–10)

$\Leftrightarrow \forall\, x_1,\ x_2 \in I,\ x_1 < x_2,\ \forall\, x \in (x_1, x_2),\ f(x) > h(x)$,

$\left(\text{其中 } h\colon (x_1, x_2) \to \mathbb{R} : h(x) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)\right)$

$\Leftrightarrow \forall\, x_1,\ x_2 \in I,\ x_1 < x_2,\ \forall\, \alpha \in (0,1)$,

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) > \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

由於凹函數與凸函數爲對偶觀念, 以下只討論凸函數之理論, 讀者只需稍加修改即可獲得凹函數之各定理.

引理 4.13

設 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 爲一凸函數, 則對區間 I 之任一內點 p, 所作差商函數

$$f_p^*\colon I \setminus \{p\} \to \mathbb{R} : f_p^*(x) = \frac{f(x)-f(p)}{x-p}.$$

爲遞增.

【證】1° 若 $p < x_1 < x_2$, (參閱圖 4–11), 令 $\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{x_2 - p}$, 則 $1-\alpha = \dfrac{x_1 - p}{x_2 - p}$,

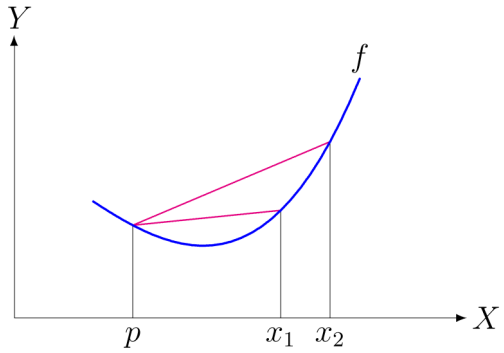


圖 4–11

$$\begin{aligned} f \text{ 爲凸函數} &\Rightarrow f(x_1) = f(\alpha p + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(p) + (1-\alpha) f(x_2) \\ &\Rightarrow f(x_1) - f(p) < (\alpha - 1) f(p) + (1-\alpha) f(x_2) \\ &\Rightarrow \frac{f(x_1)-f(p)}{x_1 - p} < \frac{(1-\alpha)f(x_2) - (1-\alpha)f(p)}{(1-\alpha)(x_2-p)} \\ &\Rightarrow f_p^*(x_1) < \frac{f(x_2)-f(p)}{x_2-p} = f_p^*(x_2). \end{aligned}$$

2° 若 $x_1 < p < x_2$, 或 $x_1 < x_2 < p$, 仿 1° 讀者自證之. □

定理 4.14

設 f 在區間 I 上爲可微分, 則 f 在 I 上爲凸函數之充要條件爲 f' 爲遞增.

【證】1° 若 f 爲一凸函數. 設 $x_1 < x_2$, x_3 爲二者之中點, 則

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= \lim_{x \to x_1} f_{x_1}^*(x) \\ &\le f_{x_1}^*(x_3), \quad (\text{引理}) \\ &< f_{x_1}^*(x_2), \quad (\text{引理}) \\ &= f_{x_2}^*(x_1) \\ &\le \lim_{x \to x_2} f_{x_2}^*(x) = f'(x_2). \end{aligned}$$

知 f' 爲遞增.

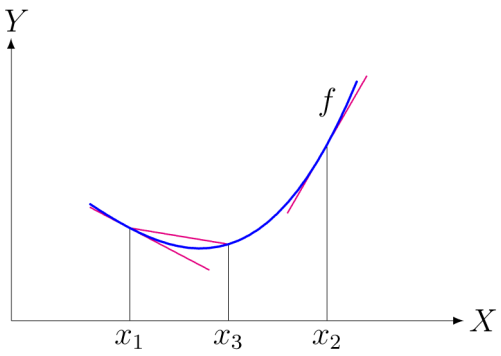


圖 4–12 三直線之斜率分別爲 $f'(x_1),\ f_{x_1}^*(x_3),\ f'(x_2)$

2° 若 f' 爲遞增. 設 x_1 與 x_2 爲 I 中之任意二點而且 $x_1 < x_2$, 而函數 h 表連接 $(x_1, f(x_1))$ 與 $(x_2, f(x_2))$ 之直線段. 今需證明 $\forall\, x \in (x_1, x_2),\ h(x) > f(x)$.

設 $g\colon [x_1, x_2] \to \mathbb{R} : g(x) = f(x) - h(x)$. 顯然 $g(x_1) = g(x_2) = 0$. 我們將利用矛盾證法以證明：$g(x) < 0,\ \forall\, x \in (x_1, x_2)$.

$\exists\, x_0 \in (x_1, x_2)$, 使得 $g(x_0) \geq 0$

$\Rightarrow\ \exists c \in (x_1, x_2)$, 使得 g 在點 c 有非負之最大值, $(\because g$ 爲連續 $)$

$\Rightarrow\ g'(c) = 0\ \wedge\ g(c) \geq 0$

$\Rightarrow\ g'(x) > g'(c) = 0,\ \forall\, x \in (c, x_2],\ (\because g' = f' - h'$ 爲遞增 $)$

$\Rightarrow\ g$ 在區間 $(c, x_2]$ 上爲遞增

$\Rightarrow\ 0 = g(x_2) > g(c) \geq 0.$

顯然矛盾, 是以知 $\forall\, x \in (x_1, x_2),\ g(x) < 0$, 亦即 $\forall\, x \in (x_1, x_2),\ h(x) > f(x)$. □

定理 4.15

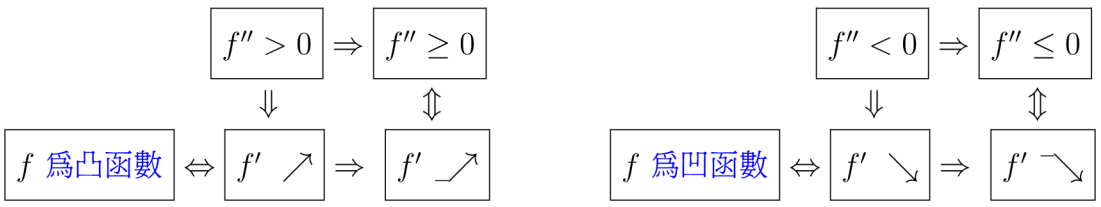
設 f 在區間 I 上爲二階可微, 則

(1) 若 $\forall\, x \in \overset{\circ}{I},\ f''(x) > 0$, 則 f 於 I 上爲凸函數.

(2) 若 f 於 I 上爲凸函數, 則 $\forall\, x \in I,\ f''(x) \geq 0$.

【證】以 f' 代微分均值定理之系三中之 f, 並利用定理 4.14 立即可得證. □

爲便於記憶, 我們以下列二關係圖, 表示函數之二階導數與函數凹凸性之關係：



註：上述關係圖中 f' ↗ 及 f' ↗ 分別表 f' 爲遞增及不減少.

定義 4.16

設 p 爲 D_f 之一內點, 若

(1) f 在點 p 爲連續；

(2) f 在點 p 之兩側之彎向相反. (兩側指區間 $(p-\epsilon,\ p)$ 及 $(p,\ p+\epsilon)$.)

則稱 $(p, f(p))$ 爲 f 圖形之一**反曲點** (point of inflection).

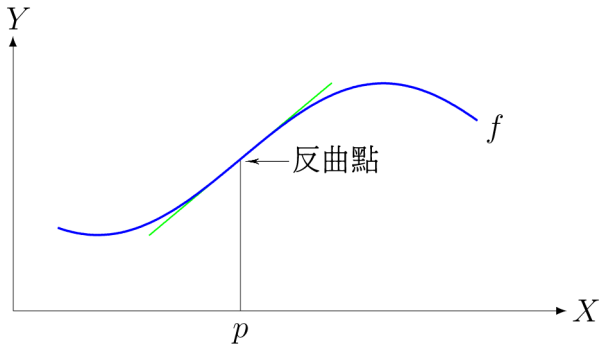


圖 4–13

例 1. 設 $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R} : f(x) = \cos x$, 則因 $f'(x) = -\sin x$, $f''(x) = -\cos x$, 顯然

$$f''(x) = 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

由於

x	0		$\pi/2$		$3\pi/2$		2π
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
說　明		⌒	反曲	⌣	反曲	⌒	

故知點 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 及點 $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ 皆爲 f 圖形之反曲點, (參閱圖 4–14).

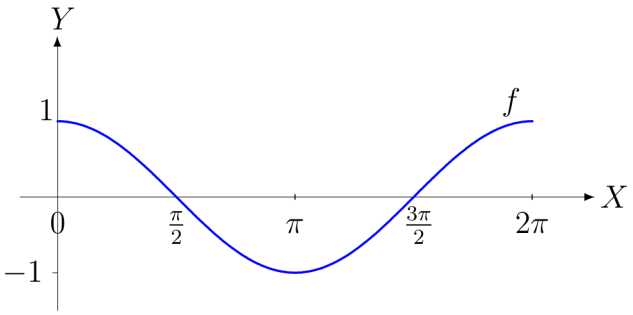


圖 4–14 □

註： 有人以爲 $f''(p) = 0$ 時必有反曲點, 這是錯的, 反例 : $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^4$, 顯然 $f''(0) = 0$, 但 $(0,0)$ 並非 f 之一反曲點.

下一節有關函數圖形之製作中, 將有一些反曲點之範例, 故本節中不再舉例.

§ 4.4 作圖

不論純粹數學、應用數學或是一般應用科學, 常需以圖形來了解函數之全貌, 若能將函數圖示出來, 則對於整個函數之動向便能瞭如指掌. 由於電腦軟體日新月異, 利用簡單指令即可繪製絕大部分之平面及立體圖形, 但若干較爲細膩之問題 (如極值、反曲點之正確位置) 仍需以數學分析方法解決之, 以下我們僅提供一些一般繪製單變數函數圖形之原則.

作圖問題之步驟

1° 定義域 D_f =?

2° 對稱性、週期性與連續性;

- 對稱性 : 若 f 爲偶函數, (即 $f(-x) = f(x),\ \forall\, x \in D_f$), 則其圖形對稱於 Y 軸. 若 f 爲奇函數, (即 $f(-x) = -f(x),\ \forall\, x \in D_f$), 則其圖形對稱於原點. 具對稱性之函數只需先繪出一半, 其餘部分則複製之.
- 週期性 : 若存在一正數 p 使得 $f(x+p) = f(x)$, 則稱 p 爲 f 之一**週期** (period). 具週期性之函數只需先繪出一週期之部分, 其餘部分只需複製之.
- 連續性 : 用以了解函數是否有斷點.

3° 漸近線 :

- 垂直漸近線 : 若 $\lim\limits_{x\to p} |f(x)| = +\infty$, 則稱直線 $x = p$ 爲 f 圖形之**垂直漸近線** (vertical asymptote). (參閱圖 4–15).

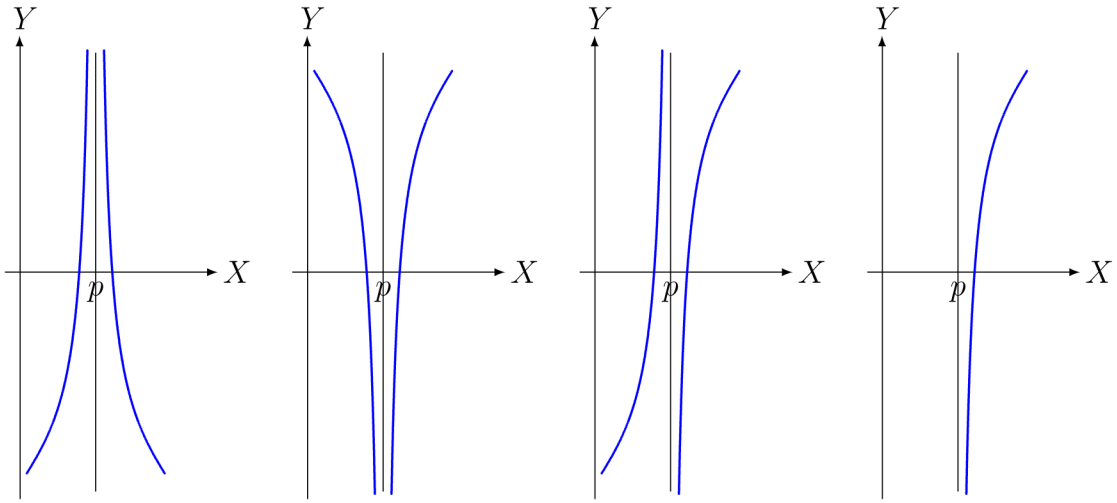


圖 4–15 : 垂直漸近線

- 非垂直漸近線：我們稱直線 $y=mx+b$ 爲 f 圖形之**非垂直漸近線** (non-vertical asymptote), 若其滿足

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(mx+b))=0.\ ^{\dagger}$$

其中

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx).$$

因爲

$$\begin{aligned}
&y=mx+b \text{ 爲 } f\text{之非垂直漸近線}\\
&\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\ \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx-b)=0\\
&\Leftrightarrow\ b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)\\
&\Rightarrow\ \lim_{x\to\pm\infty}\Big(\frac{f(x)}{x}-m\Big)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}(f(x)-mx)=0\\
&\Rightarrow\ m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}.
\end{aligned}$$

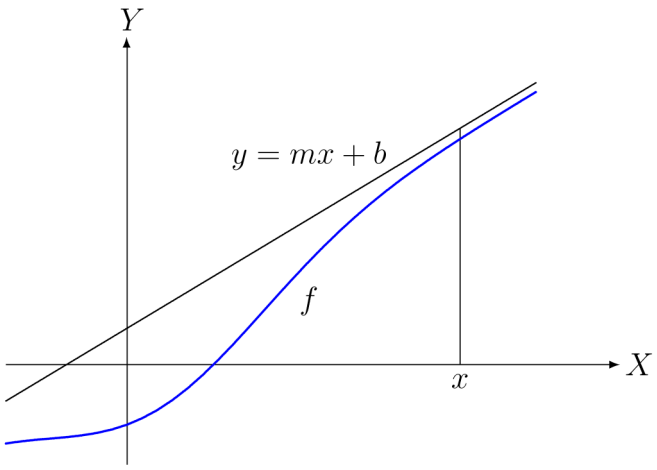


圖 4–15： 非垂直漸近線

4° 求一、二階導數、臨界點集及 $Z_{f''}$;

5° 製表：繪製一表以顯示函數在某區間之單調性及彎向, 並由其中觀察極值點及反曲點等.

6° 繪圖：利用上述討論將函數之圖形予以描繪.

例 1. 試討論並作函數 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 之圖形.

【解】 1° 顯然 $D_f=\mathbb{R}^*$.

2° 對稱性. 因 $f(-x)=-f(x)$, 故 f 之圖形對稱於原點.

3° 連續性. 函數 x 及 $1/x$ 顯然均爲連續, 故 f 亦爲連續函數.

---

† $\lim_{x\to\pm\infty}$ 係指 $\lim_{x\to+\infty}$ 或 $\lim_{x\to-\infty}$ 二者之一成立即可.

4° 漸近線. 由

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty,$$

說明 Y 軸爲 f 圖形之垂直漸近線. 又, 因

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = 0,$$

知 $y = mx + b = x$ 爲 f 圖形之非垂直漸近線.

5° 求一、二階導數及 $Z_{f'},\ Z_{f''}$. 由於 $\forall\, x \neq 0$,

$$f(x) = x + \frac{1}{x},\ f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2},\ f''(x) = 2x^{-3}.$$

是以方程式 $f'(x) = 0$ 之解集合爲 $\{-1, 1\}$. 其次, $\forall\, x \in D_f,\ f''(x) \neq 0$.

6° 製表及作圖 :

x	-1		0		1	
$f(x)$	$-$			$+$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$			$+$		
說 明	↗	max	↘	↘	min	↗
		⌒			⌣	

圖形如下 :

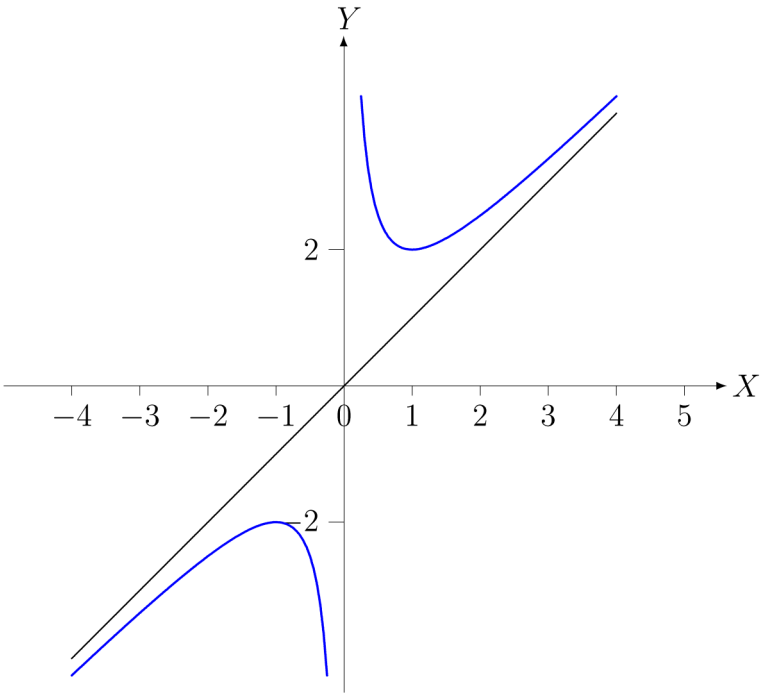


圖 4–17 □

例 2. 試討論並作函數 $f(x) = x^2e^{-x}$ 之圖形.

【解】 1° $D_f = \mathbb{R}$.

2° f 無對稱性, 因 f 顯然非奇函數或偶函數. 其次 f 爲連續但無週期性.

3° 漸近線 : 因 f 於 $\mathbb{R}$ 上爲連續, 故無垂直漸近線, 至於非垂直漸近線, 因

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0, \text{ (利用稍後之 l'Hospital 規則,)}$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0, \text{ (l'Hospital 規則,)}$$

故 $y = mx + b = 0$, 即 X 軸爲其非垂直漸近線.

4° f 之一、二階導函數爲

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = x(2-x)e^{-x},$$
$$f''(x) = (2 - 4x + x^2)e^{-x}.$$

是以

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ x = 0 \text{ or } x = 2\ ),$$
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (\ x = 2 - \sqrt{2} \text{ or } x = 2 + \sqrt{2}\ ).$$

5° 繪表 :

x		0	$2-\sqrt{2}$	2	$2+\sqrt{2}$	
$f(x)$	+	0		+		
$f'(x)$	−	0	+	0	−	
$f''(x)$		+	0	−	0	+
說 明	↘	⌣	↗	⌢	↘	⌣
		min	反曲	max	反曲	

f 在點 0 有極小, 在點 2 有極大. 而點 $(2-\sqrt{2}, f(2-\sqrt{2}))$ 以及點 $(2+\sqrt{2},\ f(2+\sqrt{2}))$ 皆爲反曲點.

6° 作圖 :

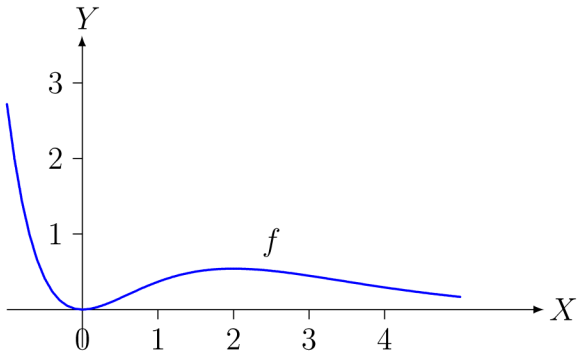


圖 4–18 □

例 3. 試討論並作函數

$$f(x)=\begin{cases}\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{x}\right), & \text{若 } x\neq 0,\\[2ex] -\dfrac{\pi}{2}, & \text{若 } x=0,\end{cases}$$

之圖形.

【解】1° $D_f=\mathbb{R}$.

2° $\forall\, x\neq 0,\ f(-x)=\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{-x}\right)=-\tan^{-1}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=-f(x),$ 是以除點 $(0,f(0))$ 外, f 之圖形對稱於原點. 此外, f 無週期性, 且於原點不爲連續.

3° 漸近線.

由於 $|f(x)|\leq\dfrac{\pi}{2}$, 故知 f 無垂直漸近線, 至於非垂直漸近線, 因

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,\ (\text{因分子爲有界})$$
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}\left(\frac{-1}{x}\right)=0.$$

知 $y=0$ (即 X 軸) 爲 f 圖形之漸近線.

4° 關鍵點及繪表 :

$$\forall\, x\neq 0,\ f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x^2}}{1+\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{1+x^2},$$

又因 f 在點 0 不爲連續, 故 f 在點 0 不爲可微. 其次,

$$\forall\, x\neq 0,\ f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

x		0		
$f(x)$		$+$	$-\pi/2$	$-$
$f'(x)$		$+$		$+$
$f''(x)$		$+$		$-$
說 明		↗	min	↗
		⌣		⌢

顯然 f 在點 0 有最小值 $-\dfrac{\pi}{2}$, 至於單調性及彎向上表已清楚示明.

5° 其圖形如下：

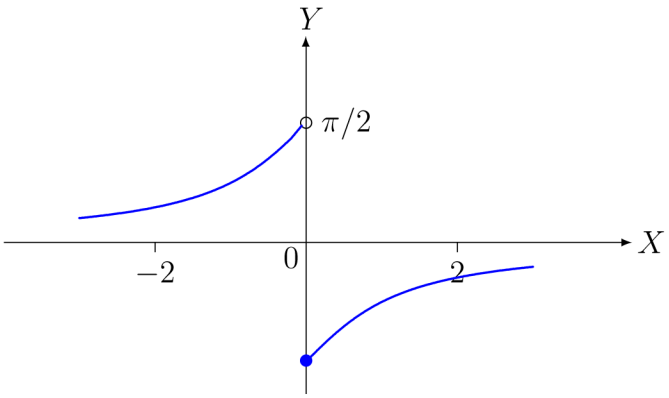


圖 4–19 □

§ 4.5 近似函數值

第一節定理 4.7 說明, 利用 Taylor 定理可求得某函數於一點之優良近似多項式. 在此我們將利用 Taylor 定理以求函數值之近似值.

設函數 f 於 $N_\delta(p)$ 爲 n 階可微, 則 $\forall\, x \in N_\delta^*(p),\ \exists\, c \in (p,x)$ 或 (x,p) 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) + \frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2 + \cdots \\ &\qquad + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n. \\ &= P_{n-1}(x) + R_n(x). \end{aligned}$$

本來我們稱 $P_{n-1}(x)$ 爲 f 在點 p 之 $(n-1)$ 次 Taylor 多項式, 而稱 $R_n(x)$ 爲 n 階餘項. 但應用於近似值時, 我們視 $P_{n-1}(x)$ 爲 $f(x)$ 之一近似值, 而視 $R_n(x)$ 爲其誤差.

例 1. 試求 e 之近似值使誤差之絕對值小於 10^{-6}.

【解】由本章第一節例一知, exp 之 Maclaurin 展開式爲

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^c}{n!}x^n. \qquad ①$$

其中 $x \in \mathbb{R}^*$, c 介於 0 與 x 之間.

1° 先證：$e < 3$ [‡]. ①式中令 $x = 1,\ n = 3$, 則

$$e = \exp 1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{e^c}{3!}\ ,$$

‡ 此乃第三章第四節之例 1 所欲證之結果：$2 < e < 3$.

其中 $c \in (0,1)$, 左右兩端各減去 $e/6$, 則

$$e - \frac{e}{6} = 2.5 + \frac{1}{6}(e^c - e) < 2.5, \ (\because \ e > e^c),$$

是以 $e < \dfrac{6}{5} \times 2.5 = 3$.

2° 其次, ①式中令 $R_n(x) = \dfrac{e^c x^n}{n!}$, 由原設誤差之絕對值小於 10^{-6}, 利用逆推法,

$$\begin{aligned} |R_n(1)| < 10^{-6} &\Leftrightarrow \frac{e^c}{n!} < 10^{-6} \\ &\Leftarrow \frac{3}{n!} < 10^{-6} \\ &\Leftarrow 3,000,000 < n! \\ &\Leftarrow n \geq 10, \ (\text{註}) \end{aligned}$$

(註 : 利用計算器 $2! = 2, \ 3! = 6, \ 4! = 24, \ \cdots$ 而得.)

是以 e 之近似值爲 $P_9(1) = 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{9!} = 2.71828\,1525.$ □

例 2. 試求 $\cos 35^\circ$ 之近似值至小數第四位.

【解】近似值至小數第四位乃是指誤差之絕對值小於 $0.0001/2 = 5 \times 10^{-5}$. 由於 $\cos x$ 之 Maclaurin 展開式爲

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x),$$

內 $R_{2n+1}(x) = \dfrac{\cos^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$, c 介於 0 與 x 之間. 我們將以 $P_{2n}(x)$ 做爲 $\cos 35^\circ$ 之近似值, 其中 35° 等於 $x = \dfrac{\pi}{180} \times 35 = 0.61087$ (弳), 由題意知,

$$\begin{aligned} |R_{2n+1}(x)| < 5 \times 10^{-5} &\Leftrightarrow \left| \frac{\cos^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| < 5 \times 10^{-5} \\ &\Leftarrow \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} < 5 \times 10^{-5} \\ &\Leftarrow \frac{10^5 \, x^{2n+1}}{5} < (2n+1)! \\ &\Leftarrow n \geq 3. \end{aligned}$$

取 $n = 3$, 則 $\cos 35^\circ$ 之近似值爲

$$P_6(0.61087) = 1 - \frac{(0.61087)^2}{2} + \frac{(0.61087)^4}{24} - \frac{(0.61087)^6}{720} = 0.81915.$$ □

§ 4.6 牛頓迭代法

由於電子計算機能以高速處理重複迭代計算工作, 在求解可微分函數方程式之問題, 牛頓迭代法乃爲最方便而有效的求近似值之方法.

設 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 爲一可微分函數, 其中 I 爲一區間, 吾人欲求方程式 $f(x)=0$ 之近似根. 首先, 若 $f(a)\cdot f(b)<0$, 由 Bolzano 定理知存在 $r\in(a,b)$ 使得 $f(r)=0$, 換言之, (a,b) 之內必有方程式之一根. 在區間 (a,b) 內取 r 附近之點 x_1, 並於曲線 f 上過點 $(x_1,f(x_1))$ 做切線, 交 X 軸於點 x_2, 顯然有

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

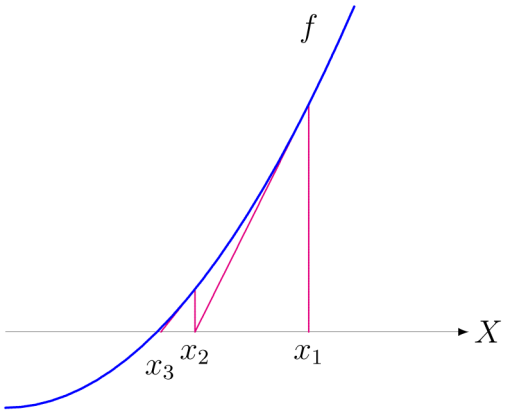


圖 4–20

其次過點 $(x_2,f(x_2))$ 做切線, 得 x_3, 如此繼續下去得 $x_4,\ x_5,\ \cdots$, 如果 x_1 離 r 甚近, 則這些點將越來越接近 r, 如圖 4–20 所示.

若欲解方程式 $f(x)=0$ 之一近似根至小數第 k 位.

1° 先求 $f'(x)$;

2° 令 $g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$;

3° 利用 Bolzano 定理或繪圖法, 估計欲求之根 r 的大略位置, 令之爲 x_1. 其次求

$$\begin{aligned} x_2 &= g(x_1),\ \text{至小數 } k+1 \text{ 位},\\ x_3 &= g(x_2),\ \text{至小數 } k+1 \text{ 位},\\ &\vdots\\ x_{n+1} &= g(x_n),\ \text{至小數 } k+1 \text{ 位}, \end{aligned}$$

直至 x_{n+1} 與 x_n 之前 $k+1$ 位小數相同時停止 .

4° 由上述 x_n 以四捨五入法求出 k 位小數之近似值 s .

5° 驗算: 令 $\epsilon = 10^{-k}/2$, 若 $f(s+\epsilon)$ 與 $f(s-\epsilon)$ 異號, 則 s 確爲吾人所需. 理由爲

$$s-\epsilon < r < s+\epsilon \;\Leftrightarrow\; -\epsilon < r-s < \epsilon \;\Leftrightarrow\; |r-s| < \epsilon = \frac{10^{-k}}{2}.$$

牛頓迭代法並非萬靈, 如果起始點 x_1 設定不當, 可能導致序列 $\{x_1, x_2, \ldots\}$ 不爲收斂, 因此我們需要一些理論以支持牛頓迭代法之有效執行.

定理 4.17 [**牛頓迭代法** (Newton's iteration)]

設

(i) r 爲方程式 $f(x)=0$ 之一解,

(ii) $f'(r) \neq 0$,

(iii) f'' 於點 r 爲連續,

則 $\forall \epsilon \in (0,1)$, $\exists\, \delta > 0$, 使得 $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|x_n - r| \le 2\epsilon^{n-1}\delta$. 其中

$$x_1 \in (r-\delta, r+\delta),\; x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

【證】參見附錄六. □

註: 本定理說明: 在定理之三前提下, 由牛頓迭代法所得之序列 $\{x_n\}_n$ 必將收斂於 $f(x)=0$ 之根 r, (有關序列及收斂觀念可參閱第八章第一節).

例 1. 試以 Newton 迭代法求方程式 $x\sin x + \cos x = 0$ 之最小正根之近似值至第四位小數.

【解】令 $f(x) = x\sin x + \cos x$. 在未開始解題之前, 我們先看看所求之根 r 之大略位置, 由於 f 之圖形不易繪出, 而 $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{N}\}$ 顯然不是方程式之一解, 故

$$x\sin x + \cos x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -\cot x,$$

是以所求之解爲曲線 $y = -\cot x$ 與 $y = x$ 最接近原點之交點的 x 坐標. 從圖 4–21 中我們可以看出, $r < \pi$ 且在 π 附近.

1° 首先, f 之導數爲: $f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$.

2° 令 $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} = x - \dfrac{x\sin x + \cos x}{x\cos x} = x - \tan x - \dfrac{1}{x}$.

3° 令 $x_1 = 3$ (參見圖 4–21), 利用計算器或電腦可求得

$$x_2 = g(x_1) = 2.80921,$$
$$x_3 = g(x_2) = 2.79843,$$
$$x_4 = g(x_3) = 2.79839,$$
$$x_5 = g(x_4) = 2.79839,$$

停止, 因 x_4 與 x_5 之前 5 位小數相同.

4° 上述 x_5 之小數第五位四捨五入得 $s = 2.7984$.

5° 驗算 : 因

$$\begin{cases} f(2.79835) = 9.499 \cdot 10^{-5} > 0, \\ f(2.79845) = -0.0001685 < 0, \end{cases}$$

故知 $s = 2.7984$ 爲 r 之四位小數之近似值. □

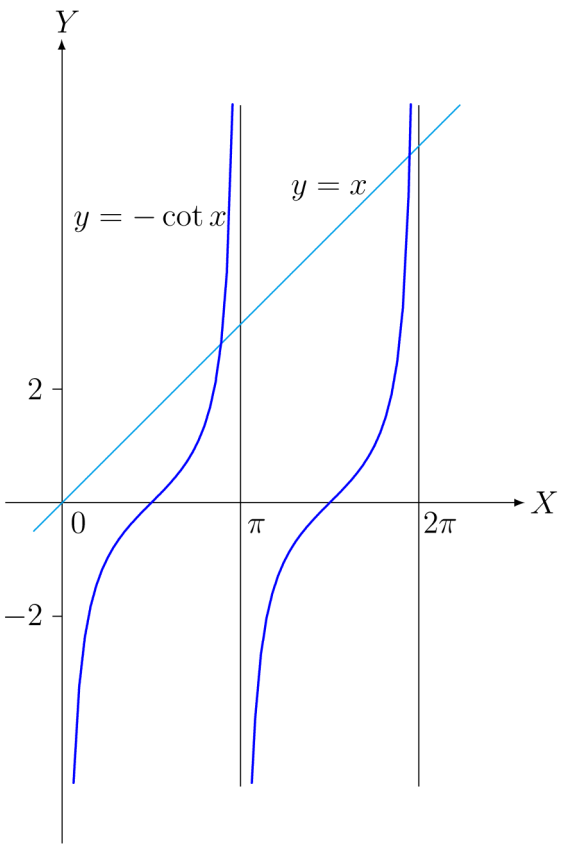


圖 4–21

例 2. 設曲線 $y = \sin x$ 與 $y = \exp(-x)$ 於最接近原點之交點爲 (x_0, y_0). 試求 x_0 之近似值至小數五位.

【解】二曲線 $y = \sin x$ 及 $y = \exp(-x)$ 之圖形如圖 4–22.

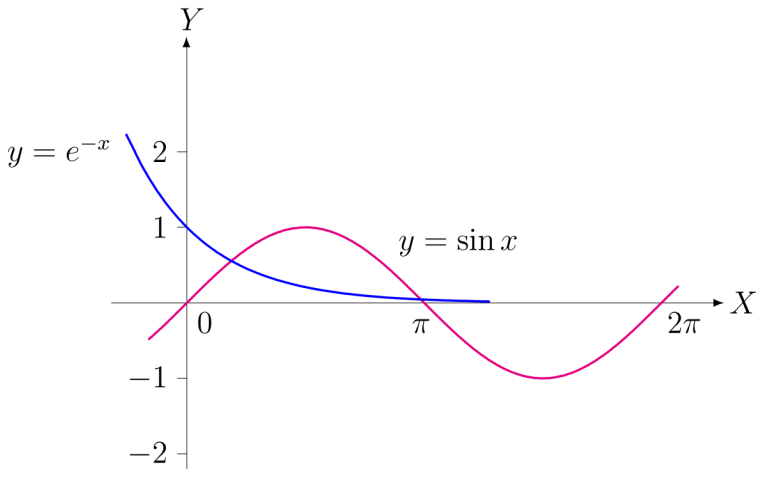


圖 4–22

1° 設 $f(x) = \sin x - e^{-x}$, 則 $f'(x) = \cos x + e^{-x}$.

2° 令

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\sin x - e^{-x}}{\cos x + e^{-x}}.$$

3° 由圖中我們可看出 $\sin x = e^{-x}$ 之最小正根 x_0 應在 0 與 1 之間, 取 $x_1 = 0.5$, 則

$$x_2 = g(x_1) = 0.585644,$$
$$x_3 = g(x_2) = 0.588529,$$
$$x_4 = g(x_3) = 0.588533,$$
$$x_5 = g(x_4) = 0.588533,$$

4° 上述 x_5 之小數第六位四捨五入得 $s = 0.58853$.

5° 驗算：因 $f(0.588525) < 0$, $f(0.588535) > 0$, 故知 x_0 之近似值爲 0.58853. □

利用 Newton 迭代法以求某方程式之近似根值, 在選擇起始近似值 x_1 宜小心處理, 否則可能造成 $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots\}$ 不會收斂或收斂於其他根值. 以下我們舉一個範例以說明之.

例 3. 設 $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+3}$, 顯然 $r = 0$ 爲方程式 $f(x) = 0$ 之唯一根. 令

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{\dfrac{4x}{x^2+3}}{\dfrac{4(x^2+3) - 8x^2}{(x^2+3)^2}} = x - \frac{x(x^2+3)}{3-x^2}.$$

(1) 若取 $x_1 = 1$, 則

$$x_2 = g(x_1) = -1,$$
$$x_3 = g(x_2) = 1,$$
$$x_4 = g(x_3) = -1,$$
$$\vdots$$
$$x_n = g(x_{n-1}) = (-1)^{n+1},$$

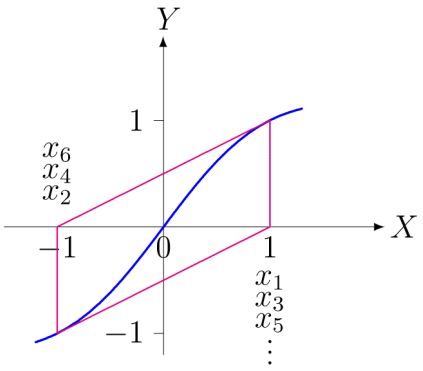


圖 4–23

顯然不會有結果, (參見圖 4–23).

(2) 若取 $x_1 = 1.1$, 則

$$x_2 = g(x_1) = -1.4872,$$
$$x_3 = g(x_2) = 8.3437,$$
$$x_4 = g(x_3) = 17.838,$$

顯然 x_n 離開眞正之根 0 越來越遠, (參見圖 4–24).

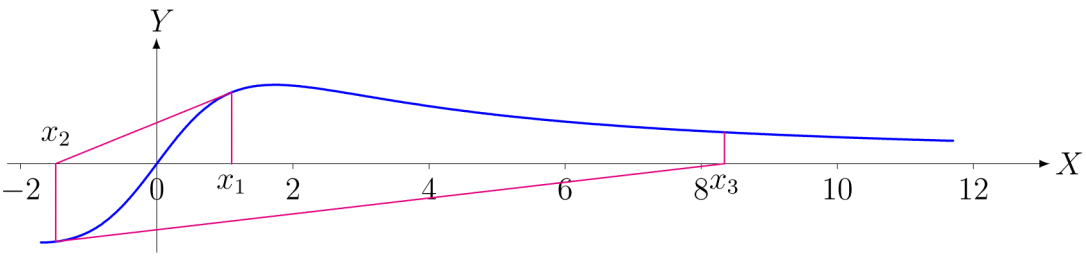


圖 4–24

§ 4.7 不定型之極限

雖然導數的概念是源自極限概念. 但對某些極限問題, 利用第一章之極限定理則難以解決, 例如 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\cot x}.$$

本節所要討論的定理 —— l'Hospital † 規則, 便是希望利用導數方法以彌補極限基本定理之不足. 原創始人 Johann Bernoulli 係 Guillaume de l'Hospital 之老師.

定理 4.18 [**l'Hospital 規則 I** (l'Hospital's rule I)]

若

(i) $\exists\,\delta>0$, 使得 $f,\ g$ 在 $(p,p+\delta)$ 爲可微且 $g(x)\neq 0,\ \forall\,x\in(p,p+\delta)$;

(ii) $\lim\limits_{x\to p^+}f(x)=\lim\limits_{x\to p^+}g(x)=0$;

(iii) $\lim\limits_{x\to p^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l,\ (\,l\in\overline{\mathbb{R}}\,)$.

則 $\lim\limits_{x\to p^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

【證】1° 若 $l\in\mathbb{R}$, 令

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x), & \text{若 } x\neq p,\\ 0, & \text{若 } x=p,\end{cases}$$
$$g_1(x)=\begin{cases}g(x), & \text{若 } x\neq p,\\ 0, & \text{若 } x=p,\end{cases}$$

則當 $x\in(p,p+\delta)$,

(1) $f_1,\ g_1$ 在區間 $[p,x]$ 上爲連續 ;

(2) $f_1,\ g_1$ 在區間 (p,x) 上爲可微 .

由 Cauchy 均值定理知, 存在 $c_x\in(p,x)$ 使得 $\dfrac{f_1(x)-f_1(p)}{g_1(x)-g_1(p)}=\dfrac{f_1'(c_x)}{g_1'(c_x)}$, 是以

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f_1(x)-f_1(p)}{g_1(x)-g_1(p)}=\frac{f_1'(c_x)}{g_1'(c_x)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}. \tag{1}$$

由於 $\lim\limits_{x\to p^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$, 應有

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\delta_0>0,\ (\forall\,x\in D_f)\Big(p<x<p+\delta_0\ \Rightarrow\ \Big|\frac{f'(x)}{g'(x)}-l\,\Big|<\epsilon\Big). \tag{2}$$

† l'Hospital 讀爲 [lopi′tal], 一譯爲羅畢達.

故

$$\begin{aligned} p<x<p+\delta_0 &\Rightarrow\ p<c_x<p+\delta_0 \\ &\Rightarrow\ \left|\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}-l\right|<\epsilon,\ [\text{由 (2)}] \\ &\Rightarrow\ \left|\frac{f(x)}{g(x)}-l\right|<\epsilon,\ [\text{由 (1)}]. \end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to p^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l.$

2° 若 $l=+\infty$, 仿之亦可證明, 唯上述證明中之 (2) 應改爲

$$\forall\,\beta>0,\ \exists\,\delta_0>0,\ (\forall\,x\in D_f)\Big(p<x<p+\delta_0\ \Rightarrow\ \frac{f'(x)}{g'(x)}>\beta\Big). \tag{2}$$

其餘稍加修改即可.

3° 若 $l=-\infty$, 同理證之. □

註： 上述定理中之 $(p,\,p+\delta)$ 改爲 $(p-\delta,\,p)$, p^+ 改爲 p^- 亦成立. 同理, 改爲雙側極限亦成立.

若考慮 x 趨近於 $+\infty$ (或 $-\infty$) 之情形, 上述定理亦成立, 我們詳細討論如下：

系 4.19

若

(i) $\exists\,\alpha>0$, 使得 $f,\ g$ 在 $(\alpha,+\infty)$ 爲可微且 $g(x)\neq 0,\ \forall\,x\in(\alpha,+\infty)$;

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$;

(iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l,\ (\,l\in\overline{\mathbb{R}}\,)$.

則 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

【證】令 $I=\Big(0,\dfrac{1}{\alpha}\Big)$,

$$\begin{cases} F\colon I\to\mathbb{R}:F(t)=f\Big(\dfrac{1}{t}\Big), \\ G\colon I\to\mathbb{R}:G(t)=g\Big(\dfrac{1}{t}\Big), \end{cases}$$

則

(i) $F,\ G$ 在 I 上爲可微且 $G(t)\neq 0,\ \forall\,t\in I$;

(ii) $\lim\limits_{t\to0^+}F(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0,\quad\lim\limits_{t\to0^+}G(t)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$;

(iii)

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{-1}{t^2}}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{-1}{t^2}}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad \left(\text{令 } x=\frac{1}{t}\right)\\ &= l,\end{aligned}$$

由定理 4.18 知, $\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)} = l$, 亦即 $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = l$. □

定理 4.20 [**l'Hospital 規則 II** (l'Hospital's rule II)]

若

(i) $\exists\delta > 0$, 使得 f, g 在 $(p, p+\delta)$ 爲可微;

(ii) $\lim_{x\to p^+}|f(x)| = \lim_{x\to p^+}|g(x)| = +\infty$;

(iii) $\lim_{x\to p^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, $(l\in\overline{\mathbb{R}})$.

則 $\lim_{x\to p^+}\frac{f(x)}{g(x)} = l$.

【證】參閱附錄七. □

註: 仿系 4.19 , 本定理亦可推廣爲 x 趨近於 $\pm\infty$ 之情形.

不定型極限問題共分以下七類: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, 我們將分別舉例以說明之.

例 1. ($\frac{0}{0}$ 型)

試求極限 $\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}$ =?

【解】利用 l'Hospital 規則,

$$\text{原題} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{-\cos x}{-2\sin 2x} = \lim_{x\to\pi/2}\frac{-1}{-4\sin x} = \frac{1}{4}.$$ □

並非所有不定型題目皆可利用 l'Hospital 規則, 以下我們舉一個範例.

例 2. 試求極限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\tan x}=?$

【解】1° 若分子分母分別予以微分, 則爲 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\sec^2 x}$, 此極限不存在, 理由如下：設 $g(x)=\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\sec^2 x}$, 次設集合

$$A=\left\{\frac{1}{2n\pi}\;\middle|\;n\in\mathbb{N}\right\},\quad B=\left\{\frac{1}{(2n-1)\pi}\;\middle|\;n\in\mathbb{N}\right\}.$$

則 $\lim\limits_{x\to 0}g|_A(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to 0}g|_B(x)=1.$

提醒讀者注意：我們不可據此以說明原題之極限不存在.

2° 由於 $\sin\dfrac{1}{x}$ 爲有界, 是以

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=0,$$

故

$$\begin{aligned}\text{原題}&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\cos x\cdot x\cdot\sin\frac{1}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right)=1\cdot 1\cdot 0=0.\end{aligned}$$ □

例 3. ($\frac{\infty}{\infty}$ 型)

試求極限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{10000}}{e^{0.0001x}}=?$

【解】方便計, 令 $a=10000,\ b=0.0001$, 則

$$\begin{aligned}\text{原題}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^{bx}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{a-1}}{be^{bx}},\quad(\text{l'Hospital 規則})\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{a(a-1)x^{a-2}}{b^2e^{bx}}=\cdots,\quad(a\text{ 次後})\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{a(a-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{b^ae^{bx}}=0.\end{aligned}$$ □

註： 本題若將分式之分母分子對調, 利用系 4.19 中 $l=+\infty$ 的部分：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{bx}}{x^a}&=\lim_{x\to+\infty}\frac{be^{bx}}{ax^{a-1}}\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{b^2e^{bx}}{a(a-1)x^{a-2}}=\cdots,\ (a\text{ 次後})\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{b^ae^{bx}}{a(a-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}=+\infty.\end{aligned}$$

例 4. ($\infty-\infty$ 型)
試求極限 $\lim\limits_{x\to1}\Big(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\Big)=?$

【解】此類題目應先通分, 化爲 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 再利用 l'Hospital 規則.

$$\begin{aligned}\text{原題}&=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}\\&=\lim_{x\to1}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ □

例 5. ($0\cdot\infty$ 型)
試求極限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)=?$

【解】利用 l'Hospital 規則,

$$\text{原題}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\dfrac{-1}{x^2}}{\dfrac{-1}{x^2}}=1.$$ □

遇到指數型態之不定型問題, 應先利用公式 $a^b=\exp(b\ln a)$, 再化爲 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 最後利用 l'Hospital 規則解決之.

例 6. (0^0 型)
試求極限 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}=?$

【解】利用 l'Hospital 規則,

$$\begin{aligned}\text{原題}&=\exp\Big(\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\csc x}\Big)=\exp\Big(\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\csc x\cot x}\Big)\\&=\exp\Big(\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x}{x}\cdot\tan x\Big)=e^0=1.\end{aligned}$$ □

例 7. (∞^0 型)
試求極限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{1/x}=?$

【解】利用 l'Hospital 規則,

$$\begin{aligned}\text{原題} &= \lim_{x\to+\infty} \exp\Big(\frac{\ln x}{x}\Big)\\ &= \exp\Big(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\Big), \quad (\text{因 exp 爲連續})\\ &= \exp\Big(\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}\Big) = e^0 = 1.\end{aligned}$$ □

例 8. (1^∞ 型)
試求極限 $\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{a}{x}\Big)^{bx} = ?$ 內 $a,\ b$ 爲非零常數.

【解】利用 l'Hospital 規則,

$$\begin{aligned}\text{原題} &= \lim_{x\to+\infty} \exp\Big(bx\ln(1+\frac{a}{x})\Big)\\ &= \exp\Big(b\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+\frac{a}{x})}{\frac{1}{x}}\Big), \quad (\text{因 exp 爲連續})\\ &= \exp\Big(b\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot\frac{-a}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}\Big)\\ &= e^{ab}.\end{aligned}$$

本例之結果十分重要, 它可輕易導得以下各項常用之結果 :

- $\lim_{x\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x = e\,;$
- $\lim_{x\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{x}\Big)^x = e^{-1}\,;$
- $\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = e, \quad (\text{內 } n\in\mathbb{N})\,;$
- $\lim_{n\to+\infty}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^n = e^{-1}, \quad (\text{內 } n\in\mathbb{N})\,.$ □

對於某些較爲複雜的問題, 有時可先將變數予以代換.

例 9. 試求極限 $\lim_{x\to+\infty} x\Big(\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^x - e\Big) = ?$

【解】令 $y=\dfrac{1}{x}$, 則

$$\begin{aligned}
\text{原題} &= \lim_{y\to 0^+}\frac{(1+y)^{1/y}-e}{y}\\
&= \lim_{y\to 0^+}\frac{\exp(\frac{1}{y}\ln(1+y))-e}{y}\\
&= \lim_{y\to 0^+}\exp\Big(\frac{1}{y}\ln(1+y)\Big)\cdot\frac{\dfrac{y}{1+y}-\ln(1+y)}{y^2}, \quad (\text{ l'Hospital 規則 })\\
&= e\cdot\lim_{y\to 0^+}\frac{\dfrac{y}{1+y}-\ln(1+y)}{y^2}, \quad (\text{ 因第一部分之極限爲 } e)\\
&= e\cdot\lim_{y\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{(1+y)^2}-\dfrac{1}{1+y}}{2y}, \quad (\text{ l'Hospital 規則 })\\
&= e\cdot\lim_{y\to 0^+}\frac{1-(1+y)}{2y(1+y)^2}\\
&= e\cdot\frac{-1}{2}=-\frac{e}{2}.
\end{aligned}$$

□

例 10. 試求 $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}\Big)=?$

【解】**法一**：利用 l'Hospital 規則可證得 $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\Big)=-\dfrac{1}{3}$, (習題 4-22), 是以

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\Big) &= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\Big)\\
&= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\Big)\\
&= \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}+1\Big)\\
&= 1+\lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\Big)\\
&= 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

法二：利用 Maclaurin 展開式. 由第一節例 4 知

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+R_4(x),$$

由引理 4.6 知

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_4(x)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(4)}(c)}{4!}=\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=0.$$

亦即

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+o(x^4). \qquad (*)$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o(x^4)}{x^4}=0.$

$$(*)\ \Rightarrow\ \tan^2 x=(x+\frac{x^3}{3}+o(x^4))^2=x^2+\frac{2x^4}{3}+o(x^5)$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases}\tan^2 x-x^2=\dfrac{2x^4}{3}+o(x^5),\\ x^2\tan^2 x=x^4+\dfrac{2x^6}{3}+x^2o(x^5),\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\frac{\frac{2x^4}{3}+o(x^5)}{x^4+\frac{2x^6}{3}+x^2o(x^5)}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{o(x^5)}{x^4}}{1+\frac{2x^2}{3}+\frac{o(x^5)}{x^2}}$$

$$\Rightarrow\ \text{原題}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}+\frac{o(x^5)}{x^4}}{1+\frac{2x^2}{3}+\frac{o(x^5)}{x^2}}=\frac{2}{3}.$$ □

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

第 四 章 習 題

Taylor 定理

4-1 試求下列函數之五階 Maclaurin 展開式及其在原點之五階優良近似多項式：

(a) $f(x) = a^x$, 內 $a \in (0, +\infty)$; (b) $g(x) = e^x \cdot \cos x$.

4-2 (a) 試證: $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh x \geq 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n}.$$

(b) 利用 (a) 題, 試證: $\forall\, \alpha \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\cosh x} = 0.$

4-3 試求下列各函數在點 $p = 1$ 之 n 階 Taylor 展開式及其在點 $p = 1$ 之 n 階優良近似多項式：

(a) $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = x^a$, 內 $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$;

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : g(x) = x \cdot e^x$.

4-4 試證 : $\forall\, x > 0, \quad x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} \cdot \dfrac{1}{1+x} < \ln(1+x) < x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

4-5 設 $f(x) = e^x + e^{-x} + 2\cos x$.

(a) 試求 f 之四階 Maclaurin 展開式;

(b) 利用 (a) 證明 f 在點 0 有最小值.

極值問題

4-6 試求下列各函數之極值, (須指出是何種極值) :

(a) $f(x) = x^{2/3}(x-1)^2$;

(b) $g\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R} : g(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x = 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{若 } x \neq 0. \end{cases}$

4-7 試利用極值方法證明：若 $|x| < 2$, 則 $|3x - x^3| \leq 2$.

4-8 試求常數 a 與 b 以使函數 $f(x)=\dfrac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ 於點 2 有相對極值 -1. 試問此時 f 在點 2 是否有極大或極小? 是絕對極值嗎?

4-9 設 $P(0,p)$, $Q(0,q)$ 爲 Y 軸上二固定點, 內 $0<p<q$. 試求 X 軸上 之點 $R(r,0)$, $r>0$, 以使 $\angle QRP$ 爲最大.

4-10 若 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足 $f''(x)>0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

(a) 試舉一反例以說明 : f 未必有之最小值.

(b) 若已知 $f'(p)=0$, 試證 : f 於點 p 有之最小值.

作圖與凹凸性

4-11 試討論並列表以繪製 $f(x)=\left|\dfrac{x}{x^2-4}\right|$ 之圖形.

4-12 試討論並列表以繪製 $f(x)=x+\tan^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$ 之圖形.

4-13 設函數 $f(x)=x-\exp(-x^2)$.

(a) 試問 f 有無漸近線? 有無反曲點? 若有則求之 .

(b) 試證 f 並無極值 .

(c) 利用 (a), (b) 繪表並畫出 f 之圖形, (圖中必須標明坐標).

4-14 試討論並列表以繪製 $f(x)=(x+2)^{2/3}-(x-2)^{2/3}$ 之圖形.

4-15 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=|x|^p$, 試問哪些 p 值可使 f 爲一凸狀函數 (即凹向上).
[提示] 繪圖有助解題.

4-16 設 f 在區間 I 上爲一凸函數, 試證 : 若 $x_1,\cdots,x_n$ 爲 $\overset{\circ}{I}$ 內相異元素, 則

$$\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))>f\Big(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\Big).$$

近似值

4-17 試求 $f(x)=\ln(1+x)$ 之 n 階 Maclaurin 公式之餘項 $R_n(x)$, 並求 $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(1)=?$

4-18 以 $\ln(1+x)$ 之 n 階 Maclaurin 公式求 $\ln 2$ 之近似值時,

(a) 若取 $n=6$, 試求整數 m 以使誤差之絕對值小於 $5\cdot 10^{-m}$.

(b) 爲使誤差之絕對值可小於 $5\cdot 10^{-5}$, 試問 n 至少應爲多少?

4-19 試以下列方法求 $\sqrt{3}$ 之近似值, 使誤差之絕對值小於 $5 \cdot 10^{-5}$.

(a) 以 Taylor 展開式求之;

(b) 以 Newton 迭代法求之.

4-20 試以 Newton 迭代法求方程式 $x = \exp(-x)$ 之近似根值至第四位小數.

4-21 某君於某年元旦起每月初存款 M 元於某銀行, 存入 12 次後於翌年元旦領回本利和, 假設利息係按月以複利計算.

(a) 設月利率爲 r, 試將本利和 A 表爲 r 與 M 之函數;

(b) 若 $M = 900,\ A = 12000$, 試利用 Newton 迭代法求 r 之近似值至小數第四位.

不定型

4-22 試求下列各極限 :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\cos x - 1)}{\sin x - x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to \pi/4} (\dfrac{\pi}{4} - x) \cdot \csc(\dfrac{\pi}{4} - x)$;

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$;

(d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x\cdot \ln(x)}$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{x\cdot \ln(x)}$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(e^{1/x}\right)^{\tan x}$;

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cos x - \exp(-x^2/2)}{x^4}$;

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$.

4-23 試舉一 $\frac{0}{0}$ 型之不定型而不能以 l'Hospital 規則求其極限者, 並設法以其他方法求其極限.

4-24 試證 : $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt[3]{(x+a)(x+b)(x+c)} - x) = \dfrac{a+b+c}{3}$.

4-25 試求 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$ =? 內 f 爲二階連續可微.

4-26 試求 $\lim\limits_{x\to 0^+} (x^{x^x} - x^x)$ =?

Chapter 5

不定積分

微分學主要是從局部性質一點一滴的串聯起來以了解函數的整個狀況. 積分學則是從另外一個角度, 去探討函數的大域性質 (global property), 前此, 當我們面對一個函數時, 考慮的是如何求得其導函數, 甚至高階的導函數, 並從而討論該函數的種種性質. 本章討論的方向正好相反, 對於函數 f, 我們將研究如何尋求一函數 F 以使 f 爲其導函數. 此種方法乃爲下一章微積分基本定理鋪路, 以使它能爲有用而又能用的定理.

§ 5.1 導函數與不定積分

爲了避免一些無關緊要的困擾, 本章中我們討論之函數均以非退化區間爲其定義域. 對於定義域不爲一區間之函數, 則僅於其定義域所包含之各區間分別討論之. 對於那些定義域不含任何區間之函數, 則不予討論.

定義 5.1

設 I 爲一區間, 若 $F, f\colon I \to \mathbb{R}$ 滿足 $F' = f$, 則稱 F 爲 f 之一**反導函數** (anti-derivative) 或**原函數** (primitive).

例 1. 設 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \sin x$, 則以下各函數顯然皆爲 f 之反導函數 :

$$
\begin{aligned}
&F_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F_1(x) = -\cos x,\\
&F_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F_2(x) = -\cos x + 1,\\
&F_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F_3(x) = -\cos x + \sqrt{2},\\
&F_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F_4(x) = -\cos x - 2,\\
&F_5\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F_5(x) = -\cos x - \pi,\\
&F_6\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F_6(x) = -\cos x - 10^9.
\end{aligned}
$$

□

定理 5.2

設 f, F, I 如定義 5.1, 則 f 之所有反導函數所成之集合爲

$$\mathfrak{F} = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

【證】設 Φ 爲 f 之所有反導函數所成之集合.

1° $\mathfrak{F} \subset \Phi$, 因爲

$$D(F(x) + C) = F'(x) = f(x), \ \forall x \in I.$$

2° $\Phi \subset \mathfrak{F}$, 因若 $G \in \Phi$, 應有 $G' = f = F'$, 利用第二章微分均值定理後之系 2.15 知, 存在常數 C 使得 $G = F + C$, 故 $G \in \mathfrak{F}$. □

例 2. 設 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$, 則 f 之所有反導函數所成之集合爲

$$\mathfrak{F} = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}, \text{ 內 } F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F(x) = \frac{x^3}{3}.$$

如下圖所示：

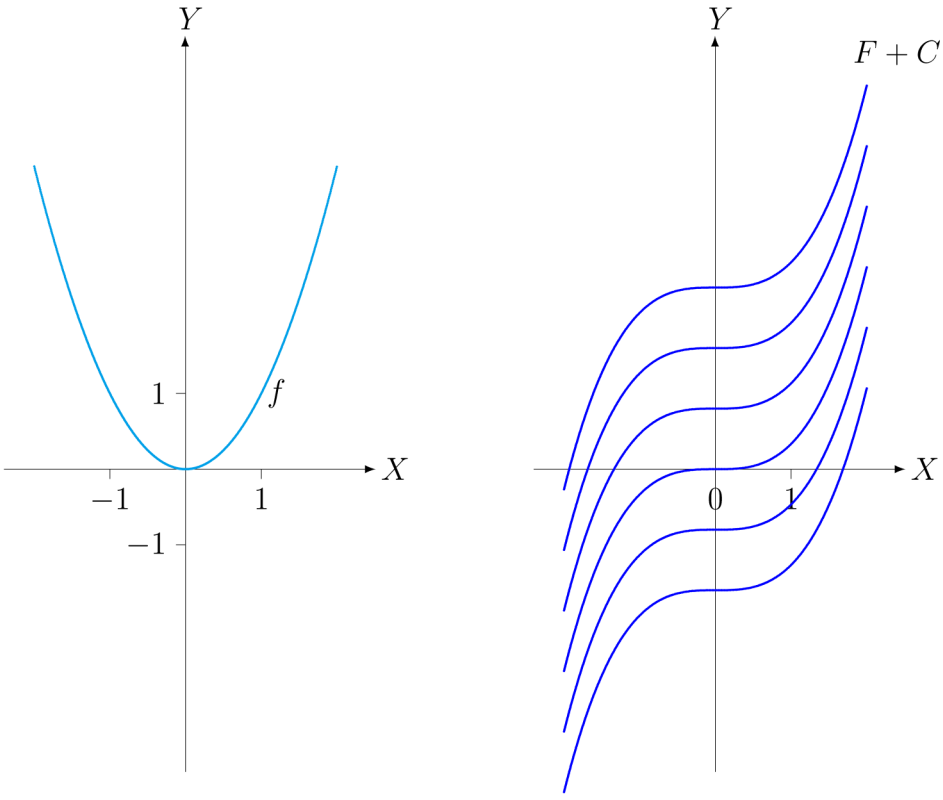


圖 5–1

定義 5.3

由於 f 之所有反導函數所成之集合爲 $\{F+C \mid C \in \mathbb{R}\}$, 我們稱其爲 f 之**不定積分** (indefinite integral), 並記爲 $\int f$ 或 $\int f(x)\,dx$, 即

$$\int f = \{F+C \mid C \in \mathbb{R}\}.$$

上式中我們稱 f **被積函數** (integrand), 而任意常數 C 則稱爲**積分常數** (integration constant).

不定積分之古典寫法爲

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \qquad (*)$$

讀者宜注意: $\int f$ 與 $\int f(x)\,dx$ 二者之意義完全相同, 由於古典寫法有其方便之處, 故至今仍然沿用, 只需右端函數 $F(x)$ 之導函數等於被積函數 $f(x)$, $(*)$ 式即成立.

利用下一章之微積分基本定理, 我們可證明任一定義於一區間之連續函數, 其不定積分必存在. 但若函數不爲連續, 則其不定積分未必存在, 以下兩個反例, 被積函數皆不爲連續, 其一是其不定積分不存在, 另一則是其不定積分存在.

例 3. (被積函數不爲連續, 其不定積分亦不存在.)

試證: 正負號函數 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=\operatorname{sgn}(x)$ 不具反導函數, (因而其不定積分不存在.)

【解】假定 $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 爲 f 之一反導函數, 因

$$F'(-2) = f(-2) = -1 < 0.5 < 1 = f(3) = F'(3),$$

利用第二章導函數介值定理知, 存在 $t\in(-2,3)$ 使得 $F'(t)=0.5$, 顯然不可能, 故知 f 不具反導函數. □

例 4. (被積函數不爲連續, 但其不定積分存在.)

設

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: F(x) = \begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & \text{若 } x\neq 0,\\ 0, & \text{若 } x=0. \end{cases}$$

次設 $f=F'$, 即

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & \text{若 } x\neq 0,\\ 0, & \text{若 } x=0. \end{cases}$$

利用制限方法 (仿第一章定理 1.16 之後的範例), 可證明 f 在點 0 不爲連續. 由於 $F' = f$, 故

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \qquad \square$$

既然我們將不定積分界定爲函數的集合, 自然免不了要涉及集合的運算問題, 因而有如下之定義及引理.

定義 5.4

設 S 與 T 爲二實值函數之集合, h 爲一實值函數, k 爲一實數, 則令

$$S + T = \{f + g \mid f \in S,\ g \in T\},$$
$$S - T = \{f - g \mid f \in S,\ g \in T\},$$
$$h + S = \{h + f \mid f \in S\},$$
$$kS = \{kf \mid f \in S\}.$$

定理 5.5

設 f 與 g 爲二實值函數, 且 $D_f = D_g$, 若

$$S = \{f + C \mid C \in \mathbb{R}\},$$
$$T = \{g + C \mid C \in \mathbb{R}\},$$
$$U = \{f + g + C \mid C \in \mathbb{R}\},$$

則

(1) $S + T = U$,

(2) $U - S = T$,

(3) $kS = \{kf + C \mid C \in \mathbb{R}\}$, 內常數 $k \neq 0$.

【證】(1) 易明 $S + T \subset U$. 其次, 若 $f + g + C \in U$, 只需取 $f \in S$, $g + C \in T$, 則 $f + g + C \in S + T$.

(2) 若 $h \in U - S$, 則存在 $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$ 使得

$$h = (f + g + C_1) - (f + C_2) = g + (C_1 - C_2) \in T.$$

反之, 若 $g + C \in T$, 則

$$g + C = (f + g + C) - f \in U - S.$$

(3) 易明. $\square$

§ 5.2 基本公式

在微積分中, "不定積分"部分最不具有理論味道, 其目的在於幫助此後各章中積分問題之迅速解出, 它不需要高深的極限做基礎 (至少沒有很直接的關係), 也用不著複雜的數字計算或邏輯推演, 所需要的工具只有兩大部分 :

第一部分 : 基本公式 (basic formulas).

第二部分 : 積分法 (integration).

1. 代換積分法 (integration by substitution).
   - 一般代換法 (general substitution);
   - 三角代換法 (integration by trigonometric substitution);
   - 雙曲代換法 (integration by hyperbolic substitution);
   - 半角代換法 (integration by half-angle substitution).
2. 分部積分法 (integration by parts).
3. 部分分式積分法 (integration by partial fractions).

我們將在本節中介紹基本公式, 而在稍後各節逐一介紹各種積分方法, 並舉例加以說明. 以下公式除公式 6 之外, 皆可由右端函數微分等於被積函數而證得.

公式 1. $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, 其中 $n \in \mathbb{Z}_+$. †

公式 2. $\displaystyle\int x^{-n}\,dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$, 其中 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

公式 3. $\displaystyle\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, 其中 $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

公式 4. $\displaystyle\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + C$.

公式 5. $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$.

公式 6. (線性性質)

(1) $\displaystyle\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

(2) 若 $\alpha \neq 0$, 則 $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$.

† 在本章中, 我們將多次遭遇 x^0; 儘管『$0^0 = ?$』一直是數學界爭論的問題, 在第三章中我們視其爲無意義, 但在本書中, 爲方便計我們視 x^0 爲常數函數 1, 即 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^0 = 1$. 故公式 1 中 $n = 0$ 時 $\int x^0\,dx = x + C$.

【證】 設 $F' = f,\ G' = g$, 利用引理 5.5,

$$(1)\quad \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = \{F + C \mid C \in \mathbb{R}\} + \{G + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{F + G + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$
$$= \int (f(x) + g(x))\,dx.$$

$$(2)\quad \alpha \int f(x)\,dx = \alpha\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\} = \{\alpha F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$
$$= \int \alpha f(x)\,dx.$$ □

公式 7. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, 其中 $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

公式 8. $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

公式 9. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

公式 10. $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$

公式 11. $\displaystyle\int \csc^2\,dx = -\cot x + C.$

公式 12. $\displaystyle\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C.$

公式 13. $\displaystyle\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C.$

公式 14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1} x + C.$

公式 15. $\displaystyle\int \frac{dx}{1 + x^2} = \tan^{-1} x + C.$

公式 16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = \sec^{-1} |x| + C.$

提醒讀者注意：公式 1, 2, 3 看似同一回事, 其實三者被積函數之定義域 (區間) 皆不相同, 公式 1 被積函數之定義域爲 $\mathbb{R}$, 公式 2 則爲 $(-\infty, 0)$ 或 $(0, +\infty)$, 公式 3 則爲 $(0, +\infty)$.

§ 5.3 代換積分法

定理 5.6 （代換積分法）

> 設 I 爲一區間, 若 $\forall\, x \in I,\ f(x) = g(u(x))u'(x),\ G'(x) = g(x)$, 則
> $$\int f(x)\,dx = \int g(u(x))u'(x)\,dx = G(u(x)) + C.$$

【證】因爲 $D(G(u(x)) = g(u(x))u'(x) = f(x)$. □

定理使用方法 :

1° 先將被積函數化爲 $u = u(x)$ 之函數及 u 之導數之積, 即 $f(x) = g(u(x))u'(x)$;

2° 則原題化爲 $\int f(x)\,dx = \int g(u)\,du$, 並視其內之 u 爲 自變數而求 g 之不定積分;

3° 最後以 $u(x)$ 代 u 即得所需之不定積分.

註 : 在第二章第六節中, 我們曾提及 : 若函數 $y = f(x)$ 爲可微, 有人將 $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ 拆爲 $dy = f'(x)dx$, 由於此一表示法中之 dx 不易明白界定, 而加以修正爲 $df(p,h) = f'(p)\cdot h$. 但在不定積分之積分代換時, 由 $u = u(x)$ 而得 $du = u'(x)\,dx$, 在計算上有其方便之處, 屬於『計算技術』的層次, 因此在今後之積分計算時, 我們保留這種古典的微分寫法.

例 1. 試求 $\displaystyle\int \frac{(1+\tan^{-1}x)^2}{1+x^2}\,dx.$

【解】令 $u = 1+\tan^{-1}x$, 則 $u'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\left(\text{或 } du = \dfrac{dx}{1+x^2}\right)$, 而得

$$\text{原題} = \int u^2\,du = \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{3}(1+\tan^{-1}x)^3 + C.$$ □

例 2. 試求 $\displaystyle\int \tan x\,dx.$

【解】令 $u = \cos x$, 則 $u' = -\sin x$, (或 $du = -\sin x\,dx$), 是以

$$\text{原題} = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C.$$ □

類題 : $\displaystyle\int \cot x\,dx$, 讀者自行完成之.

例 3. 試求 $\displaystyle\int \sec x\,dx.$

【解】本題之關鍵乃是被積函數之分子分母各乘以 $\sec x \tan x$, 則分子乃爲分母之導數. 爲方便計, 我們可以不將 u 寫出, 而視 $\tan x + \sec x$ 爲 u .

$$\begin{aligned}\int \sec x\, dx &= \int \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x}\, dx = \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\tan x + \sec x} \\ &= \ln|\tan x + \sec x| + C.\end{aligned}$$ □

類題 : $\int \csc x\, dx$, 讀者自行完成之.

例 4. 試求 $\int \sin^{2n+1} x\, dx$, 內 $n \in \mathbb{N}$.

【解】先將被積函數分解爲 $\sin^{2n} x \sin x$, 前者化爲 $u = \cos x$ 之函數, 後者則爲 u 之導數乘以 -1.

$$\begin{aligned}\int \sin^{2n+1} x\, dx &= \int \sin^{2n} x \cdot \sin x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)^n (-\sin x\, dx) \\ &= -\int (1-u^2)^n\, du, \ (\text{令 } u = \cos x) \\ &= -\int \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-u^2)^{n-k}\, du, \ [\star] \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1} \binom{n}{k} \int u^{2(n-k)}\, du\,, \quad (\text{線性性質}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1} \binom{n}{k} \frac{u^{2(n-k)+1}}{2(n-k)+1} + C \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k+1} \binom{n}{k} \frac{\cos^{2(n-k)+1} x}{2(n-k)+1} + C.\end{aligned}$$

[⋆] 二項式展開, 其中 $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, 亦常表爲 C_k^n. □

類題 : $\int \cos^{2n+1} x\, dx$, 讀者自行完成之.

例 5. 試求 $\int \tan^n x\, dx$, 內 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

【解】

$$\begin{aligned}\int \tan^n x\, dx &= \int \tan^{n-2} x \cdot \tan^2 x\, dx = \int \tan^{n-2} x(\sec^2 x - 1)\, dx \\ &= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x\, dx - \int \tan^{n-2} x\, dx \\ &= \int \tan^{n-2} x\, d\tan x - \int \tan^{n-2} x\, dx \\ &= \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\, dx.\end{aligned}$$

故得一簡化公式 (reduction formula):

$$\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx. \tag{1}$$

- 當 n 爲偶數時, 連續利用公式 (1), 則最後右端之積分部分必爲 $\int \tan^0 x\,dx = x + C.$
- 當 n 爲奇數時, 連續利用公式 (1), 則最後右端之積分部分必爲 $\int \tan x\,dx$, 由例 2 知 $\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C.$ □

類題：$\int \cot^n x\,dx$, 讀者自行完成之.

例 6. 試求 $\int \sec^{2n} x\,dx$, 內 $n \in \mathbb{N}$.

【解】若 $n = 1$, 則由公式 (10) 立得 $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C.$

若 $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\int \sec^{2n} x\,dx &= \int \sec^{2n-2} x \cdot \sec^2 x\,dx \\
&= \int (1+\tan^2 x)^{n-1} \sec^2 x\,dx \\
&= \int (1+u^2)^{n-1}\,du, \ (\text{令 } u = \tan x\,) \\
&= \int \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u^{2(n-1-k)}\,du \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \int u^{2(n-1-k)}\,du \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{u^{2n-2k-1}}{2n-2k-1} + C \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{\tan^{2n-2k-1} x}{2n-2k-1} + C.
\end{aligned}$$

□

類題：$\int \csc^{2n} x\,dx$, 讀者自行完成之.

例 7. 試求 $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$, 內 $m,\ n \in \mathbb{Z}_+$.

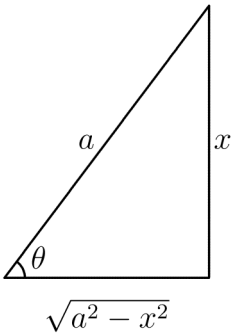
【解】若 m 或 n 爲奇數時, 可仿例 4 的方法求得其解. 若 m 及 n 皆爲偶數時, 則利用倍角公式或積化和差公式, 設法將被積函數之三角函數之次數降爲一次, 例如 $m=4,\ n=2$ 時,

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\cos^2 x\,dx &= \int (\sin x\cos x)^2\sin^2 x\,dx\\ &= \int \Big(\frac{1}{2}\sin 2x\Big)^2\Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)(1-\cos 2x)\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int (1-\cos 2x-\cos 4x+\cos 2x\cos 4x)\,dx\\ &= \frac{1}{16}\int \Big(1-\cos 2x-\cos 4x+\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\Big)\,dx\\ &= \frac{1}{16}\Big(x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{4}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{12}\sin 6x\Big)+C\\ &= \frac{x}{16}-\frac{1}{64}\sin 2x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{192}\sin 6x+C.\end{aligned}$$ □

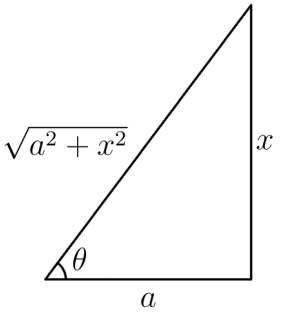
§ 5.4 三角代換法

當被積函數含有 x^2-a^2, x^2+a^2 或 a^2-x^2 之因子時, 我們可考慮以 $x=a\sin\theta$, $x=a\tan\theta$ 或 $x=a\sec\theta$ 代換之, 尤其當上述因子之外帶有根號時, 此種代換更爲方便. 因其以三角函數做爲代換之基礎, 是以稱此種方法爲**三角代換法**. 更詳細一點說明如下：

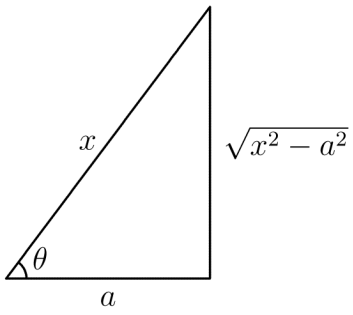
一. 對於含有 a^2-x^2 式子的函數, 令 $x=a\sin\theta$ 而得以 $a^2\cos^2\theta$ 代之, (此處之 $\theta=\sin^{-1}(x/a)$ 即爲定理 5.6 中之函數 u); 積分後可能帶有 $\sin\theta$ 等六個三角函數之一個或數個, 均須一一代換爲原來之變數 x, 此一工作可藉助右圖, 但應注意：如果 θ 不爲正銳角時, $\sin\theta$ 等之符號.



二. 對於含有 a^2+x^2 式子的函數, 令 $x=a\tan\theta$ 而得以 $a^2\sec^2\theta$ 代之, (此處之 $\theta=\tan^{-1}(x/a)$ 即爲定理 5.6 中之函數 u); 積分後可能帶有 $\sin\theta$ 等六個三角 函數之一個或數個, 均須一一代換爲原來之變數 x, 此一工作可藉助右 圖, 但應注意：如果 θ 不爲正銳角時, $\sin\theta$ 等三角函數之符號.



三. 對於含有 x^2-a^2 式子的函數, 令 $x=a\sec\theta$ 而得以 $a^2\tan^2\theta$ 代之, (此處之 $\theta=\sec^{-1}(x/a)$ 即爲定理 5.6 中之函數 u); 積分後可能帶有 $\sin\theta$ 等六個三角函數之一個或數個, 均須一一代換爲原來之變數 x, 此一工作可藉助右圖, 但應注意：如果 θ 不爲正銳角時, $\sin\theta$ 等之符號.



例 1. 試求 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, 內 $a>0$.

【解】令 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, 顯然 $D_f=(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$, 故必須考慮被積函數之定義域爲區間 $(-\infty,-a)$ 或 $(a,+\infty)$, (但定義域不可採取二者之聯集).

1° 若定義域爲 $(a,+\infty)$, 令 $x=a\sec\theta$, 則 $dx=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, 而 $\theta=\sec^{-1}\dfrac{x}{a}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$\begin{aligned}\text{原題}&=\int\frac{a\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta}}=\int\sec\theta\,d\theta\\&=\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C'=\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C'\\&=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.\end{aligned}$$

2° 若定義域爲 $(-\infty,-a)$, 令 $x=a\sec\theta$, 則 $dx=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, 而 $\theta=\sec^{-1}\dfrac{x}{a}\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$,

$$\begin{aligned}\text{原題}&=\int\frac{a\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta}}=-\int\sec\theta\,d\theta\\&=-\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C'\\&=-\ln\left|\frac{x}{a}-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+C'\\&=-\ln|x-\sqrt{x^2-a^2}|+C\\&=\ln\left|\frac{1}{x-\sqrt{x^2-a^2}}\right|+C\\&=\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C_1,\ (\text{有理化分母}).\end{aligned}$$

例 2. 試求 $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$.

【解】令 $x = 3\sin\theta$, 則 $dx = 3\cos\theta\,d\theta$, 於是

$$\begin{aligned}
\text{原題} &= \int \frac{27\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{9-9\sin^2\theta}} \\
&= 9\int \sin^2\theta\,d\theta, \quad [\star] \\
&= \frac{9}{2}\int(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{9}{2}\Big(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big) + C \\
&= \frac{9}{2}\Big(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x\sqrt{9-x^2}}{9}\Big) + C.
\end{aligned}$$

[⋆] 雖然我們係以 $x = 3\sin\theta$ 代換變數, 但在理論上, 我們應以 $\theta = \sin^{-1}\dfrac{x}{3}$ 才合乎定理之要求, 此時, $\theta \in \Big(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\Big)$, 故 $\sqrt{9-9\sin^2\theta} = \sqrt{9\cos^2\theta} = 3\cos\theta$, 不可能等於 $-3\cos\theta$. □

§ 5.5 雙曲代換法

當被積函數含有 $x^2 + a^2$ 之因子時, 我們亦可考慮以雙曲函數令 $x = a\sinh t$ 而得以 $a^2\cosh^2 t$ 代之. 同理當被積函數含有 $x^2 - a^2$ 之因子時, 令 $x = |a|\cosh t$, 而得以 $a^2\sinh^2 t$ 代之. 當被積函數含有 $a^2 - x^2$ 之因子時, 令 $x = a\tanh t$, 而得以 $a^2\mathrm{sech}^2 t$ 代之, 唯對於一般人而言, 雙曲函數之各公式遠較三角函數之公式爲生疏, 而二者所欲解決之問題相同, 因之, 此一方法較少被使用. 對於某些問題, 使用雙曲代換法遠較三角代換法爲易, 此乃本方法存在之主要原因, 我們僅舉二例.

例 1. 試求 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, 內 $a > 0$.

【解】本題在上節中我們係以三角代換法解之, 此處將以雙曲代換法解之, 由於被積函數 $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ 之定義域爲 $(-\infty, -a)\cup(a, +\infty)$.

1° 若 $x \in (a, +\infty)$, 令 $x = a\cosh t$, (注意 : 應爲 $t = \cosh^{-1}\dfrac{x}{a}$), 則

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= \int \frac{a\sinh t\,dt}{\sqrt{a^2\sinh^2 t}} = \int dt = t + C \\
&= \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C \\
&= \ln\Big(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\Big) + C, \ (\text{見定理 } 3.39) \\
&= \ln|x + \sqrt{x^2-a^2}| + C'.
\end{aligned}$$

2° 若 $x \in (-\infty, -a)$, 則

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} &= -\int \frac{d(-x)}{\sqrt{(-x)^2-a^2}} \\ &= -\ln|-x+\sqrt{x^2-a^2}| + C, \quad (\text{由 (1)}) \\ &= \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C', \ [\star]\end{aligned}$$

[⋆] 參見上節例 1 之解. □

例 2. 試求 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$, 內 $a>0$.

【解】本題若以三角代換法解之, 則需利用下節之『分部積分法』方能解出, 在此我們將利用雙曲代換法解之, 令 $x = a\sinh t$, (注意 : 應爲 $t = \sinh^{-1}\dfrac{x}{a}$), 則

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= \int \sqrt{a^2(\sinh^2 t+1)}\,a\cosh t\,dt \\ &= a^2\int \cosh^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\int(\cosh 2t+1)\,dt \\ &= \frac{a^2}{2}\Big(\frac{1}{2}\sinh 2t + t\Big) + C \\ &= \frac{a^2}{2}(\sinh t\cosh t + t) + C \\ &= \frac{a^2}{2}\Big(\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a} + \sinh^{-1}\frac{x}{a}\Big) + C \\ &= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C', \quad [\star]\end{aligned}$$

[⋆] 第三章中我們知 $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \sinh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$. □

§ 5.6 分部積分法

定理 5.7

設 I 爲一區間, $u,\ v\colon I\to\mathbb{R}$ 爲連續可微, 則

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

【證】由於 $D(u(x)v(x)) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$, 是以

$$\int v(x)u'(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) + C$$

亦即

$$\int v\,du + \int u\,dv = uv + C.$$

左右各加上 $-\int v\,du$, 即得

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad \square$$

利用本定理以解不定積分問題稱爲**分部積分法** (integration by parts), 簡稱 by parts.

定理使用方法 :

1° $f(x)\,dx$ 中取一部分爲 $u = u(x)$, 另一部分爲 $dv = v'(x)\,dx$ 使得 $f(x)\,dx = u\,dv$;

2° 求出 du 及 $v = \int v'(x)\,dx$, 但不必加 C ;

3° 代入分部積分法之公式

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du,$$

並設法解出右端之不定積分.

例 1. 試求 $\int \ln x\,dx$.

【解】令 $u = \ln x,\ dv = dx$, 則 $du = \dfrac{dx}{x},\ v = x$, 故

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int \frac{x}{x}\,dx = x\ln x - x + C. \qquad \square$$

例 2. 試求 $\int \tan^{-1} x\,dx$.

【解】令 $u = \tan^{-1} x,\ dv = dx$, 則 $du = \dfrac{dx}{1+x^2},\ v = x$,

$$\begin{aligned} \text{原題} &= x\tan^{-1} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} \\ &= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C. \end{aligned} \qquad \square$$

類題 : $\int \sin^{-1} x\,dx$, $\int \cos^{-1} x\,dx$, $\int \cot^{-1} x\,dx$, 讀者自行完成之.

在第三節中我們曾討論 $\sec x$ 之偶數次方之不定積分, 以下我們將探討其奇數次方之不定積分.

例 3. 試求 $\int \sec^{2n+1} x\,dx$, 內 $n \in \mathbb{N}$.

【解】令 $u = \sec^{2n-1} x,\ dv = \sec^2 x\,dx$, 則 $du = (2n-1)\sec^{2n-1} x \tan x\,dx,\ v = \tan x$,

$$\begin{aligned}\int \sec^{2n+1} x\,dx &= \sec^{2n-1} x \tan x - (2n-1)\int \tan^2 x \sec^{2n-1} x\,dx \\ &= \sec^{2n-1} x \tan x - (2n-1)\int (\sec^2 x - 1)\sec^{2n-1} x\,dx \\ &= \sec^{2n-1} x \tan x - (2n-1)\int \sec^{2n+1} x\,dx \\ &\qquad + (2n-1)\int \sec^{2n-1} x\,dx.\end{aligned}$$

左右兩端分別加以 $(2n-1)\int \sec^{2n+1} x\,dx$, 利用引理 5.5 得 $\sec x$ 奇數次方之簡化公式 (reduction formula):

$$\int \sec^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2n}\sec^{2n-1} x \tan x + \frac{2n-1}{2n}\int \sec^{2n-1} x\,dx.$$

例如：$n = 1$ 時,

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx &= \frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2}\int \sec x\,dx \\ &= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x|) + C.\end{aligned}$$

□

類題：$\int \csc^{2n+1} x\,dx$, 讀者自行完成之.

例 4. 試求 $\int x^2 e^x\,dx$.

【解】令 $u = x^2,\ dv = e^x\,dx$, 則 $du = 2x\,dx,\ v = e^x$,

$$\begin{aligned}\text{原題} &= x^2 e^x - \int 2xe^x\,dx \\ &= x^2 e^x - 2\Big(xe^x - \int e^x\,dx\Big), \quad (\text{再令 } u_1 = x,\ dv_1 = e^x\,dx\,) \\ &= x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C.\end{aligned}$$

□

此例說明在解題時, 有時需使用二次以上的分部積分法始克見功.

在上例中, 我們兩次『分部積分』才完成, 可以想見若被積函數爲 $x^5 e^x$, 則須做五次 by parts, 於是有人想出一個方法, 稱爲『**列表分部積分法**』(tabular integration by parts), 爲易於描述此一方法, 我們規定：

$f^{(0)} = f$;

$f^{(-1)}$ 爲 f 之一反導函數, 亦即 $f^{(-1)}(x) = \int f(x)\,dx$ 但不加積分常數;

$f^{(-2)}$ 爲 $f^{(-1)}$ 之一反導函數, 即 $f^{(-2)}(x) = \int f^{(-1)}(x)\,dx$ 但不加積分常數;

$\vdots$

設 I 爲一區間, 若 $f, g\colon I \to \mathbb{R}$, g 爲連續 (故其反導函數存在), f 爲 n 階可微.

1° 令 $u = f(x),\ dv = g(x)\,dx$, 則 $du = f'(x)\,dx,\ dv = g^{(-1)}(x)\,dx$, 應有

$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)g^{(-1)}(x) - \int f'(x)g^{(-1)}(x)\,dx.$$

2° 對於上式右端之第二項, 再做分部積分, 令 $u = f'(x),\ dv = g^{(-1)}(x)\,dx$, 則 $du = f''(x)\,dx$, $dv = g^{(-2)}(x)\,dx$, 應有

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\,dx &= f(x)g^{(-1)}(x) - \Big(f'(x)g^{(-2)}(x) - \int f''(x)g^{(-2)}(x)\,dx\Big)\\ &= f(x)g^{(-1)}(x) - f'(x)g^{(-2)}(x) + \int f''(x)g^{(-2)}(x)\,dx.\end{aligned}$$

3° 利用數學歸納法, 我們可證得

$$\int f(x)g(x)\,dx = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}f^{(j-1)}(x)g^{(-j)}(x) + (-1)^n\int f^{(n)}(x)g^{(-n)}(x)\,dx. \quad (*)$$

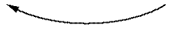
上式看起有點繁, 但若改爲下表, 使用起來並不麻煩, 以 $n = 4$ 爲例,

$$\begin{aligned}\int f(x)g(x)\,dx &= f^{(0)}(x)g^{(-1)}(x) - f^{(1)}(x)g^{(-2)}(x) + f^{(2)}(x)g^{(-3)}(x)\\ &\quad - f^{(3)}(x)g^{(-4)}(x) + \int f^{(4)}(x)g^{(-4)}(x)\,dx\\ &= f(x)g^{(-1)}(x) - f'(x)g^{(-2)}(x) + f''(x)g^{(-3)}(x)\\ &\quad - f'''(x)g^{(-4)}(x) + \int f^{(4)}(x)g^{(-4)}(x)\,dx\\ &= ①① - ②② + ③③ - ④④ + \int ④⑤\ .\end{aligned}$$

其中之 ①① 表示由下表之左行 ① 與右行 ① 相乘, 餘同理, 但最後一項之被積分則是右行 ④ 與左行 ⑤ 相乘.

列表分部積分法

符號	D	$\int$
$+$	f ①	g
$-$	f' ②	$g^{(-1)}$ ①
$+$	f'' ③	$g^{(-2)}$ ②
$-$	f''' ④	$g^{(-3)}$ ③
$+$	$f^{(4)}$ ⑤	$g^{(-4)}$ ④



使用列表分部積分法時，其中 n 應取至最後之不定積分易於解出，或最後積分爲「原題乘以某一常數」，以下是這二種情形之範例.

例 5. 試求 $\int x^4 e^x\,dx$.

【解】令 $f(x)=x^4$，$g(x)=e^x$，利用列表分部積分法：

符號	D		$\int$	
$+$	x^4	①	e^x	
$-$	$4x^3$	②	e^x	①
$+$	$12x^2$	③	e^x	②
$-$	$24x$	④	e^x	③
$+$	24	⑤	e^x	④

$$\begin{aligned}\text{原題} &= x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24xe^x + \int 24e^x\,dx\\ &= x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24xe^x + 24e^x + C.\end{aligned}$$ □

例 6. 試求 $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, 內 a, b 均爲非零常數.

【解】方便計令 $I=\int e^{ax}\sin bx\,dx$, 利用列表分部積分法：

符號	D		$\int$	
$+$	e^{ax}	①	$\sin bx$	
$-$	ae^{ax}	②	$-\frac{1}{b}\cos bx$	①
$+$	a^2e^{ax}	③	$-\frac{1}{b^2}\sin bx$	②

$$\begin{aligned}I &= \frac{-1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx\\ &= \frac{-1}{b}e^{ax}\cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\cdot I.\end{aligned}$$

左右兩端分別加以 $\frac{a^2}{b^2}\cdot I$, 利用引理 5.5 得

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$ □

類題：$\int e^{ax}\cos bx\,dx$, 讀者自行完成之.

例 7. 試求 $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$, 內 $a>0$.

【解】本題在稍早已利用雙曲代換法解過, 在此則將利用三角代換法及分部積分法解之. 令 $x=a\tan t$, $\big($注意：應爲 $t=\tan^{-1}\dfrac{x}{a}\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})\big)$, 則 $dx=a\sec^2 t\,dt$

$$\begin{aligned}
\text{原題} &= \int \sqrt{a^2(\tan^2 t+1)}\,a\sec^2 t\,dt \\
&= a^2\int \sec^3 t\,dt, \quad (\text{注意：}\sec t>0) \\
&= \frac{a^2}{2}(\sec t\tan t+\ln|\sec t+\tan t|)+C, \quad (\text{見例 3}) \\
&= \frac{a^2}{2}\Big(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\cdot\frac{x}{a}+\ln\Big(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\Big)\Big)+C, \ {}^{[\star]} \\
&= \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\big(x+\sqrt{a^2+x^2}\big)+C'.
\end{aligned}$$

[⋆] $\sec t=\sqrt{1+\tan^2 t}=\dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$. □

§ 5.7 部分分式積分法

對於被積函數爲一有理函數 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 爲二互質之多項式, **部分分式積分法** (integration by partial fractions) 之解題步驟爲：

1° 若被積函數爲一假分式 (improper fraction), 先化爲帶分式 (mixed fraction).

3° 其中眞分式部分, 再化爲部分分式 (partial fractions).

2° 逐項積分之.

例 1. 試求 $\int \dfrac{1}{1-x^2}\,dx$.

【解】利用部分分式法可得,

$$\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}.$$

是以

$$\begin{aligned}
\text{原題} &= \int \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x}dx+\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x}dx \\
&= -\frac{1}{2}\ln|1-x|+\frac{1}{2}\ln|1+x|+C \\
&= \frac{1}{2}\ln\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big|+C.
\end{aligned}$$

例 2. 試求 $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+x-2}{x^3-1}\,dx.$

【解】由於被積函數

$$\frac{x^4+3x^2+x-2}{x^3-1} = x + \frac{3x^2+2x-2}{x^3-1} = x + \frac{1}{x-1} + \frac{2x+3}{x^2+x+1};$$

是以

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \int \left(x + \frac{1}{x-1} + \frac{2x+1+2}{x^2+x+1}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + \ln|x-1| + \ln|x^2+x+1| + 2\int \frac{dx}{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{d(x+1/2)}{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \\ &= \int \frac{du}{u^2+a^2}, \quad \left(\text{令 } u = x+\frac{1}{2},\ a = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + C \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

故

$$\text{原題} = \frac{x^2}{2} + \ln|x^3-1| + \frac{4}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

§ 5.8 半角代換法

對於某些含 $\sin x$ 與 $\cos x$ 之有理函數之不定積分

$$I = \int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)} dx,$$

吾人採用代換 $u = \tan\dfrac{x}{2}$. 首先, 被積函數中之 $\sin x$, $\cos x$ 及 dx 應先予化爲 u 之函數如下：

$$\begin{cases} \sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\dfrac{x}{2} = 2\tan\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{1}{\sec^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2u}{1+u^2}, \\ \cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1 = \dfrac{2}{\sec^2\frac{x}{2}} - 1 = \dfrac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}, \\ dx = \dfrac{2\,du}{1+u^2}, \quad \text{理由是：} \end{cases}$$

$$u = \tan\frac{x}{2} \ \Rightarrow\ du = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\left(1+u^2\right)dx.$$

將上述三者代入 I 中, 則必可使其變爲含 u 之有理函數之不定積分, 於是可利用部分分式積分法予以解決. 此種代換係以半角之正切函數做爲代換, 是以稱其爲**半角代換法** (integration by half-angle substitution).

例 1. 試求 $\displaystyle\int \frac{1}{1+3\cos x}\,dx$.

【解】令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$, 則 $\cos x=\dfrac{1-u^2}{1+u^2}$, $dx=\dfrac{2\,du}{1+u^2}$,

$$\text{原題}=\int \frac{\dfrac{2\,du}{1+u^2}}{1+3\cdot\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}=\int\frac{du}{2-u^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{d(\frac{u}{\sqrt{2}})}{1-\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1+\dfrac{u}{\sqrt{2}}}{1-\dfrac{u}{\sqrt{2}}}\right|+C,\ (\text{參見上節例 1})$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+\tan\dfrac{x}{2}}{\sqrt{2}-\tan\dfrac{x}{2}}\right|+C.$$

例 2. 試求 $\displaystyle\int\frac{dx}{1+2\sin x}$.

【解】令 $u=\tan\dfrac{x}{2}$, 則 $\sin x=\dfrac{2u}{1+u^2}$, $dx=\dfrac{2\,du}{1+u^2}$,

$$\text{原題}=\int\frac{\dfrac{2\,du}{1+u^2}}{1+\dfrac{4u}{1+u^2}}=\int\frac{2\,du}{u^2+4u+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{d\left(\frac{u+2}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{u+2}{\sqrt{3}}\right)^2-1}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{t^2-1},\ \left(\text{令 } t=\frac{u+2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{-1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{1+\dfrac{u+2}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{u+2}{\sqrt{3}}}\right|+C$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2+\tan\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}}{2+\tan\dfrac{x}{2}-\sqrt{3}}\right|+C.$$ □

§ 5.9 不定積分之應用

不定積分既然是微分之反運算, 有關微分之問題難免必須以反導函數之觀念來解決, 以下是一些範例. 提醒讀者注意 : 本節中之不定積分不指被積函數之所有反導函數之集合, 僅指其中之一而已, 而積分常數 C_0 爲待定常數.

例 1. 試求函數 f 以使 $f'(x) = \tan^{-1} x,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$, 且曲線 f 與直線 $y = x$ 相切.

【解】1° 由原設知 f 應滿足

$$f(x) = \int \tan^{-1} x\, dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C_0, \qquad (*)$$

其中 C_0 爲待定常數.

2° 次求切點 (x_0, y_0).

$$\begin{aligned} f \text{ 與 } y = x \text{ 相切} &\Rightarrow f'(x_0) = 1 \\ &\Rightarrow \tan^{-1} x_0 = 1 \\ &\Rightarrow x_0 = \tan 1. \end{aligned}$$

故知切點爲 $(x_0, y_0) = (\tan 1, \tan 1)$.

3° 最後,

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow f(x_0) = x_0 \tan^{-1}(x_0) - \frac{1}{2} \ln(1 + x_0^2) + C_0 \\ &\Rightarrow \tan 1 = \tan 1 \cdot \tan^{-1}(\tan 1) - \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 1) + C_0 \\ &\Rightarrow C_0 = \frac{1}{2} \ln(1 + \tan^2 1) = \frac{1}{2} \ln(\sec^2 1) = -\ln(\cos 1), \end{aligned}$$

故求得函數爲

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \ln(\cos 1).$$

參閱圖 5–2.

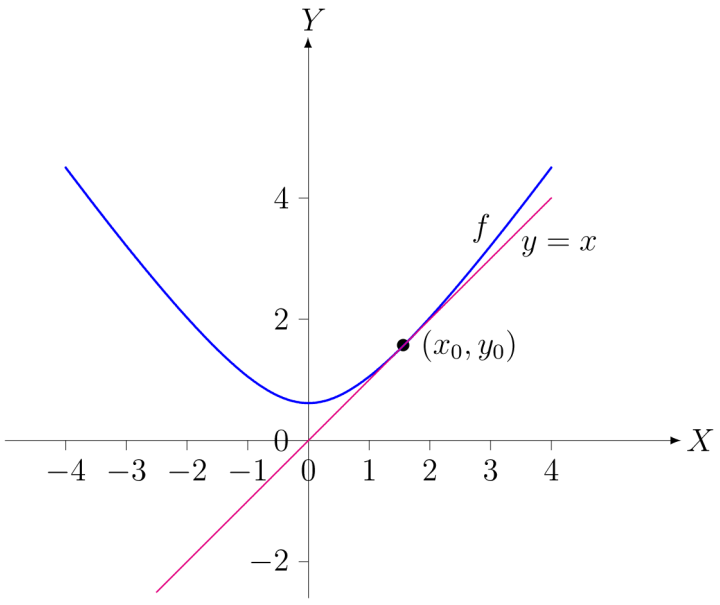


圖 5–2 (註 : $x_0 = \tan 1 \approx 1.557$.)

例 2. 一盒食物自冰箱取出時爲 $-5°\mathrm{C}$, 此時之室溫爲 $20°\mathrm{C}$, 假設此一食物溫度以 $10e^{-0.4t}$ (單位 : $°\mathrm{C/hr}$) 之變率上升, 試問在時間 t 時其溫度爲多少? 何時可達 $20°\mathrm{C}$?

【解】由題意知此一食物之溫度爲

$$f(t) = \int 10e^{-0.4t}\,dt = -\frac{100}{4}e^{-0.4t} + C_0,$$

但 $f(0) = -5$, 即 $-\dfrac{100}{4}e^{-0.4\times 0} + C_0 = -5$, 故 $C_0 = 20$, 在時間 t 時, 溫度爲

$$f(t) = -25e^{-0.4t} + 20,$$

由於 $-25e^{-0.4t} < 0$, (參閱圖 5–3), 故不論何時, 皆不可能達到 $20°\mathrm{C}$. (除非 $t \to +\infty$.)

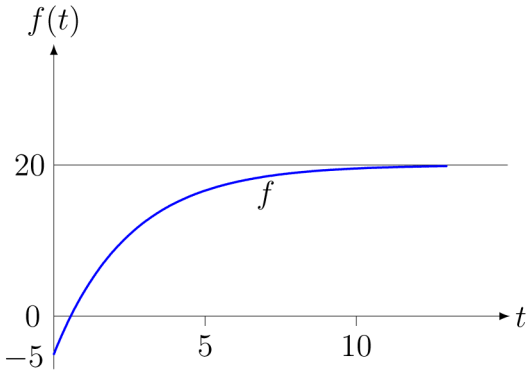


圖 5–3

第 五 章 習 題

本章類題

5-1 試求下列各不定積分：其中 (d) 及 (i) 僅求其簡化公式.

(a) $\int \cot x\,dx$;

(b) $\int \csc x\,dx$;

(c) $\int \cos^{2n+1} x\,dx$, 內 $n \in \mathbb{N}$;

(d) $\int \cot^n x\,dx$, 內 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

(e) $\int \csc^{2n} x\,dx$, 內 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$;

(f) $\int \sin^{-1} x\,dx$;

(g) $\int \cos^{-1} x\,dx$;

(h) $\int \cot^{-1} x\,dx$;

(i) $\int \csc^{2n+1} x\,dx$, 內 $n \in \mathbb{N}$;

(j) $\int e^{ax} \cos bx\,dx$, 內 $ab \neq 0$.

基本及代換

5-2 試求下列各不定積分：(本題中 $n \in \mathbb{Z},\ ab \neq 0$)

(a) $\int \dfrac{x^3}{(x+1)^5}dx$;

(b) $\int \dfrac{dx}{1+e^x}dx$;

(c) $\int \dfrac{dx}{x(x^n+1)}$;

(d) $\int \dfrac{\sin x \cdot \cos x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}}$;

(e) $\int \tan^3 x \cdot \sec^3 x\,dx$;

(f) $\int \dfrac{dx}{a + b\cdot\tan x}$;

(g) $\int \ln(\cos x)\cdot\tan x\,dx$;

(h) $\int \dfrac{x^2+1}{x^4+1}dx$;

(i) $\int \dfrac{2^x\cdot 3^x}{9^x - 4^x}dx$;

(j) $\int \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x}dx$.

變數代換法

5-3 試求下列各不定積分：

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a^3+x^3)}$, $(a \neq 0)$;

(c) $\displaystyle\int \sqrt{1-\cos x}\,dx$, $x \in [0, 2\pi]$;

(d) $\displaystyle\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$;

(e) $\displaystyle\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,dx$;

(f) $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)-\ln x}{x(x+1)}dx$;

(g) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx$;

(h) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}-1}$;

(j) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x \cdot \cos^4 x}$.

分部積分法

5-4 試求下列各不定積分：

(a) $\displaystyle\int x^2 \cos^2 x\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \cos(\ln x)\,dx$;

(c) $\displaystyle\int \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}} \tan^{-1} x\,dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x}dx$;

(e) $\displaystyle\int \sec^{-1} x\,dx$;

(f) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

5-5 設 $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, 試利用分部積分法以求 $\int \sin^n x\,dx$ 之簡化公式.

部分分式法

5-6 試求下列各不定積分：

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2}$, $(a \neq 0)$;

(b) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$;

(c) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^3+x^2+x+1)}$;

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$.

其他

5-7 試求下列各不定積分:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-4}\,dx$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\sin^{-1} x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$;

(c) $\displaystyle\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$;

(d) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}\,dx$.

5-8 設函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 在點 x 之導函數爲 $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

(a) 若曲線 f 通過點 $(4,8)$, 試求 $f(x) =?$

(b) 若 $2f(2) = f(4)$, 試求 $f(x) =?$

5-9 設 $P(x)$ 爲一 n 次多項式, $a \neq 0$, 試證 :

$$\int e^{ax} P(x)\, dx = \frac{1}{a} e^{ax} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^{-k} P^{(k)}(x) + C.$$

Chapter 6

定積分

引言： 積分的演進

1° **矩形**面積之由來：不論東方或西方, 面積之觀念皆以矩形面積爲基礎, 而且矩形之面積皆定義爲二邊長之積, 這到底是什麼道理? 一區域之面積乃爲該區域之一量化, 而量化之主要目的有二： 其一爲比較(二區域之大小), 其二爲計算(二區域之和或差等), 假定以某一種正方形磁磚爲標準, 一矩形內恰可放進 6 塊磁磚, 如圖 6–1 所示： 我們可以說此矩形(之面積) 有 6 塊磁磚, 其中 6 是 2 與 3 之積, 若以磁磚之邊長爲單位長度, 則 2 是底邊之長度, 3 是高之長度. 若兩邊之長度分別爲 2 及 3.5, 我們可在其內放進 7 塊磁磚, (參見圖 6–2), 又若兩邊之長度分別爲 2.5 及 3.5, 我們可在其內放進 $8\frac{3}{4}$ 塊磁磚, (參見圖 6–3), 若兩邊之長度分別爲 a, b, 二數可能爲分數 (乃至於無理數), 我們不難推出此一區域可容納之磁磚數目爲 $a \times b$. 如此規定滿足了『比較』與『計算』兩個基本條件.

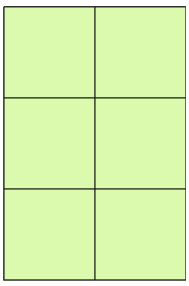


圖 6–1

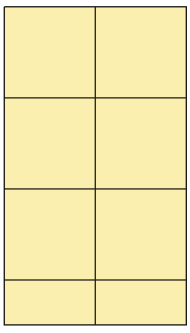


圖 6–2

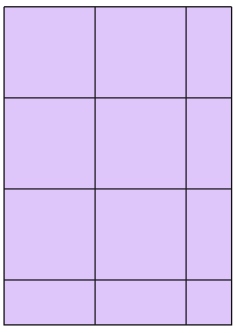


圖 6–3

2° **平行四邊形**之面積之所以定爲高和底之積, 顯然是將其內之割下一直角三角形並補在另一側而形成一矩形, (參見圖 6–4). 而平行四邊形之一對角線將其分割爲二全等之三角形, 而得知**三角形**面積爲高乘以底除以 2, (參見圖 6–5). 至於**多邊形之面積**, 我們可將其分割爲數個三角形, (參見圖 6–6) 自然可求出其面積.

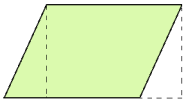


圖 6–4

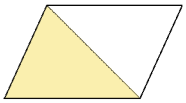


圖 6–5

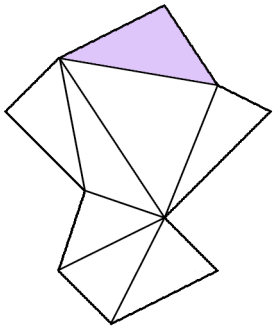


圖 6–6

3° 我們都知道**圓**面積爲半徑平方乘以圓周率, 但此一證明並不十分容易,『極限』是它必然的工具, 其中的一種講法是將圓先分割爲上下兩半, 然後再各自等分爲 n 個扇形, 上下半圓之諸扇形相插而形成一近似平行四邊形 (如圖 6–7), 當 $n \to +\infty$ 時, 此一平行四邊形變成一高爲半徑 r, 底爲半周長之矩形, 因此圓面積爲 $r \times \pi r = \pi r^2$. (這種方法是十二世紀印度人所創, 故稱爲印度圓).

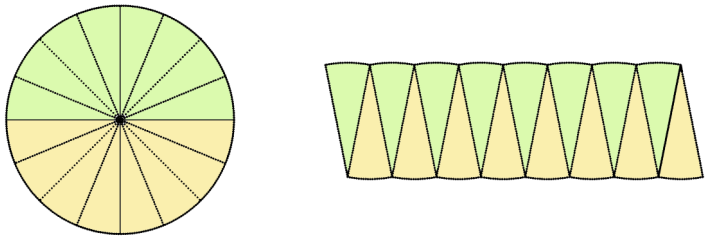


圖 6–7

4° Newton-Leibniz 方法.

儘管早在西元二百多年 Archimedes (阿基米德) 就已經解決了圓和橢圓面積問題, 由於缺乏解析幾何的支持, 對於一個不以直線段爲周邊之區域的面積問題, 直到十七世紀末葉才有較爲通盤而顯著的進步, 隨著微積分學之發明 Newton 與 Leibniz 明白指出, 面積 (積分) 其實只是變化率 (微分) 的反運算, 面積問題才逐步獲得解決, 本章中我們將加以詳細討論.

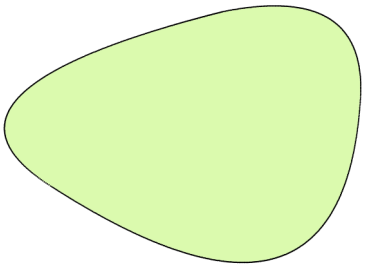


圖 6–8

5° Riemann 積分.

Newton 與 Leibniz 以反導函數方法解決面積、體積等概念之問題後, 十八世紀的數學家利用此一方法解決許多演算方面的問題, 在理論方面也有一些進展, 但對於更根本的積分

本質則未深入探討, 到了十九世紀, 開始有人質疑：到底哪一種區域之面積才存在? 以現在的數學語言說, 哪一種函數之積分才存在? 在學理上, 存在性問題遠較解題方法更爲重要而且根本. 在極限定義有了初步結果之時, 十九世紀初法國人 Cauchy 首先嘗試以極限的方法界定積分爲

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\Delta x.$$

不久, 有些學者即指出此一定義之缺失. 1850 年代, 德國的 G.B. Riemann 乃以更嚴格之方式界定所謂 Riemann 積分, (註：之所以加上其名的理由是, 不同學者提出各種不同之定義, 其結果未必全然相同).

6° Darboux, Stieltjes 積分.
如同許多高深學問一樣, 起初只有少數學者了解 Riemann 積分之定義, 經過了一段時間的沿革, Darboux 於是利用上下積分的方法, 將積分定義改爲比較容易了解之講法, 本章中我們將從這種講法開始切入. Stieltjes 則是將 Riemann 積分加以推廣, 由於時間所限, 我們將不加以介紹, 有興趣者可參閱高等微積分之書本.

7° Lebesgue 積分與抽象積分.
積分觀念並不在 Riemann 或 Stieltjes 積分後停止, 相反地, 在理論方面之研究時, 發現 Riemann 積分有一些缺點, 於是在十九世紀末有 Lebesgue 積分的問世, 後來在機率論方面之需要更發展出所謂的抽象積分, 這一部分皆超出本課程之範圍.

§ 6.1 Riemann 積分– Darboux 講法

本章中我們將介紹所謂 Riemann 積分, 由於 Riemann 本人給『積分』所下的定義, 對於一般初學者稍嫌深奧難懂, 經過 Darboux 的改良之後, Riemann 積分變得簡單且易於掌握, 因此我們將先介紹這種所謂的 Darboux 積分, 其實它仍是 Riemann 積分, 只是換了一種講法而已.

定義 6.1

設 $f\colon I=[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲有界, 則

(1) 集合 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 稱爲 I 之一**分割** (partition), 其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$;

(2) $U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M(I_k)\Delta x_k$ 及 $L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m(I_k)\Delta x_k$, 則分別稱爲 f 對於 P 之 **上、下和數** (upper & lower sum), 其中 $\forall k\in\{1,\ \ldots,\ n\}$, $I_k=[x_{k-1},x_k]$, $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $M(I_k)=\sup f(I_k)$, $m(I_k)=\inf f(I_k)$, (參閱圖 6–9).

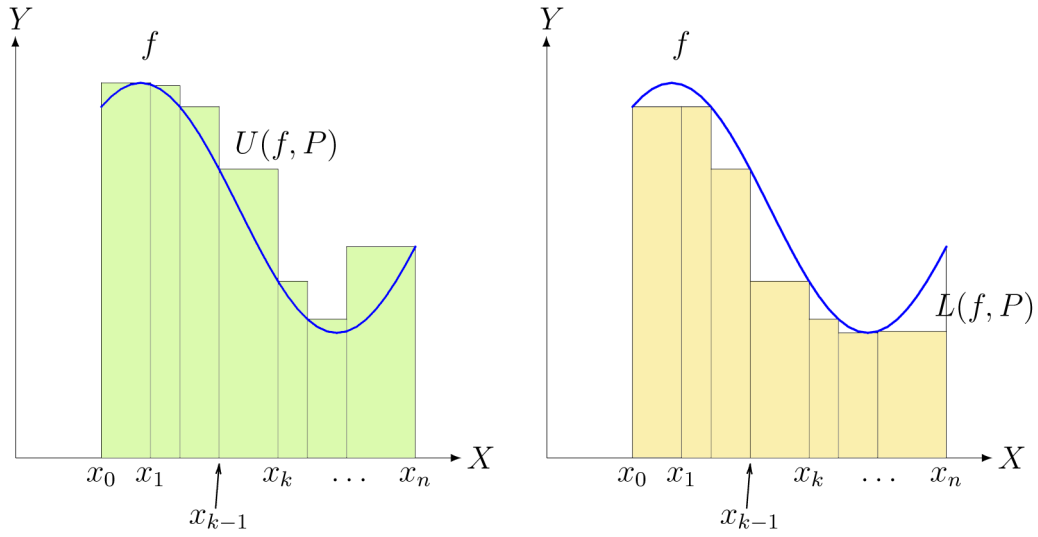


圖 6–9： 上和數(左) 與下和數(右)

定義 6.2

設 f, I 如定義 6.1, 則

(1) $\overline{\int_I} f = \inf\{U(f,P) \mid P \text{ 爲 } I \text{ 之分割}\}$, 稱爲 f 在 I 上之**上積分** (upper integral); 亦寫爲 $\overline{\int_a^b} f$.

(2) $\underline{\int_I} f = \sup\{L(f,P) \mid P \text{ 爲 } I \text{ 之分割}\}$, 稱爲 f 在 I 上之**下積分** (lower integral); 亦寫爲 $\underline{\int_a^b} f$.

(3) 若 $\overline{\int_I} f = \underline{\int_I} f$, 則稱 f 在 I 上爲 **Riemann 可積** (integrable), 且令

$$\int_I f = \overline{\int_I} f = \underline{\int_I} f,$$

並稱其爲 f 在 I 上之 **Riemann 積分** (Riemann integral), 亦寫爲 $\int_a^b f$ 或 $\int_a^b f(x)\,dx$.

有關 Riemann 上下積分之存在性, 參閱附錄八. 以下兩個範例, 第一個是以 Riemann 積分去求十分簡單的『矩形』面積, 第二個則是一個非 Riemann 可積之函數.

例 1. 試證：常數函數 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R} : f(x)=c$ 爲 Riemann 可積且 $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$.

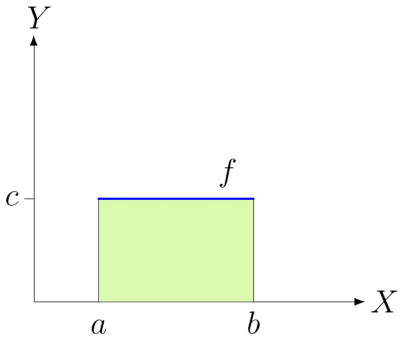


圖 6–10

【解】令 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ 爲 $[a,\ b]$ 上一分割, 顯然 $M(I_k)=m(I_k)=c$, 故

$$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M(I_k)\Delta x_k = c(b-a),$$
$$L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m(I_k)\Delta x_k = c(b-a).$$

是以

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\left\{U(f,P)\;\middle|\; P \text{ 爲 } I \text{ 之分割 }\right\} = c(b-a),$$
$$\underline{\int_a^b} f = \sup\left\{L(f,P)\;\middle|\; P \text{ 爲 } I \text{ 之分割 }\right\} = c(b-a).$$

故 $\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$. □

例 2. 設函數

$$f : [0,1]\to\mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ 1, & \text{若 } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

(稱爲 Dirichlet function), 試問 f 是否爲 Riemann 可積? 其理安在?

【解】令 $P=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ 爲 [0, 1] 上一分割, 則

$$U(f,P)=\sum_{k=1}^{n} M(I_k)\Delta x_k = 1,$$
$$L(f,P)=\sum_{k=1}^{n} m(I_k)\Delta x_k = 0.$$

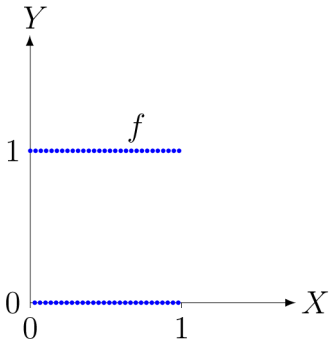


圖 6–11

是以

$$\overline{\int_0^1} f = \inf\left\{U(f,P)\;\middle|\; P \text{ 爲 } I \text{ 之分割 }\right\} = 1,$$
$$\underline{\int_0^1} f = \sup\left\{L(f,P)\;\middle|\; P \text{ 爲 } I \text{ 之分割 }\right\} = 0,$$

故知 f 不爲 Riemann 可積. □

§ 6.2 Riemann 積分- Riemann 講法

上一節中我們以 Darboux 之講法, 以上下積分的方法界定了所謂的 Riemann 積分, 本節中我們將討論 Riemann 本人對於積分之定義, 相對於 Darboux 之講法, Riemann 本人之講法較爲深奧難懂.

爲方便計, 在本章及下一章中 P, P', P'', P_ϵ 等皆表某區間之分割.

定義 6.3

設 f, I, P 等如上,

(1) 令 $T = \{t_1, \cdots, t_n\}$, 其中 $t_k \in I_k$, $\forall\, k = 1, \cdots, n$, 我們稱

$$S(f, P, T) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k$$

爲 f 關於 P 與 T 之**Riemann 和數** (Riemann sum) ;

(2) $\|P\| = \max\{\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n\}$ 稱爲 P 之**範數** (norm) ;

(3) 若存在 $l \in \mathbb{R}$ 使得

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, P_\epsilon \ \text{ 使得 } \ (\forall\, P)\left(\begin{matrix} P \supset P_\epsilon \\ \forall\, T \end{matrix} \ \Rightarrow\ \big|S(f, P, T) - l\big| < \epsilon\right),$$

則稱 f 在 I 上之 Riemann 和數之**極限**存在, 並以 $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S(f, P, T) = l$ 表之.

若函數 f 爲非負, 則 $f(t_k)\Delta x_k$ 表示以 $f(t_k)$ 爲高且以 Δx_k 爲底之矩形 (細條) 之面積, 因此 $S(f, P, T)$ 表示這些條面積之和, (參閱圖 6–12.) 本定義中較 Darboux 的講法多了一個取點集合 T, 以致難以理解和掌握, 但本定義在稍後證明積分之線性性質時, 較爲方便.

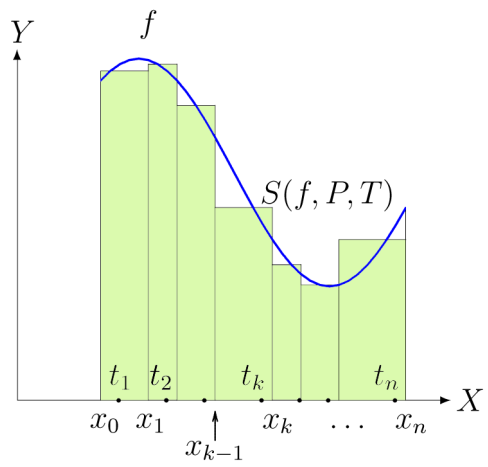


圖 6–12

§ 6.3 Riemann 積分之重要性質

定理 6.4 (分割與上下和數之關係)

> 設 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 爲有界, P' 與 P'' 均爲 $[a,b]$ 之分割, 且 $P''\subset P'$ (我們稱 P' 較 P'' 爲細), 則
>
> $$L(f,P'')\le L(f,P')\le U(f,P')\le U(f,P'').$$
>
> (意即分割越細, 則下和數越大, 但上和數卻越小.)

【證】參閱附錄八.

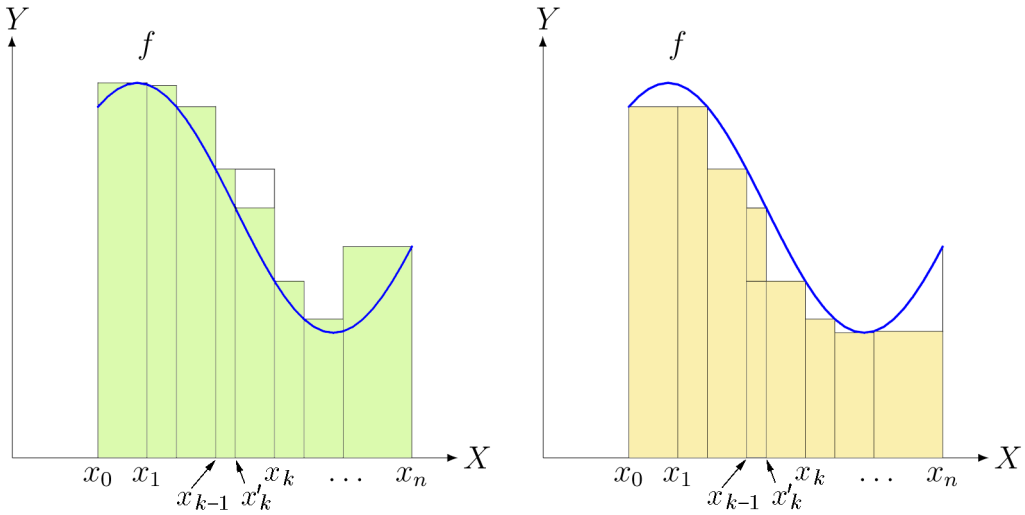


圖 6–13: 分割多了一點則上和數變小, 下和數變大.

定理 6.5 (可積之充要條件)

> 函數 f 在區間 $[a,b]$ 上爲可積之充要條件爲 f 滿足如下之 **Riemann 條件** (Riemann condition):
>
> $$\forall\,\epsilon>0,\ \exists P \text{ 使得 } U(f,P)-L(f,P)<\epsilon.$$

【證】1° 若 $\overline{\int_a^b} f=\underline{\int_a^b} f$, 由於

$$\underline{\int_a^b} f=\overline{\int_a^b} f=\sup\big\{L(f,P)\,\big|\,P \text{ 爲 } I \text{ 之分割}\big\},$$

對 $\epsilon > 0$, $\exists P'$ 使得 $\int_a^b f - L(f,P') < \frac{\epsilon}{2}$. 同理,

$$\int_a^b f = \bar{\int_a^b} f = \inf\left\{U(f,P)\,\middle|\, P \text{ 爲 } I \text{ 之分割}\right\},$$

對 $\epsilon > 0$, $\exists P''$ 使得 $U(f,P'') - \int_a^b f < \frac{\epsilon}{2}$. 令 $P = P' \cup P''$, 則 P 較 P' 及 P'' 爲細, 是以

$$\begin{aligned} U(f,P) - L(f,P) &\le U(f,P'') - L(f,P') \\ &= U(f,P'') - \int_a^b f + \int_a^b f - L(f,P') \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

2° 若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists P$ 使得 $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. 因

$$L(f,P) \le \underline{\int_a^b} f \le \bar{\int_a^b} f \le U(f,P),$$

故得

$$0 \le \bar{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le U(f,P) - L(f,P) < \epsilon,$$

由於 ϵ 爲任意正數, 是以 $\bar{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f = 0$. □

註： 本定理通常用於其他定理之證明而已.

定理 6.6 (Darboux 與 Riemann 講法之一致性)

函數 f 在區間 $I = [a,b]$ 上爲 Rieamnn 可積之充要條件爲

“ 存在 $l \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,T) = l$. ”

此時, $\int_a^b f = l$.

【證】參閱附錄九. □

定理 6.7

設 $I=[a,b]$, $f\colon I\to\mathbb{R}$ 爲有界, P_n 爲 $[a,b]$ 上一正則分割 †, 則

(1) $\overline{\int_a^b} f=\lim\limits_{n\to+\infty} U(f,P_n)$, $\quad \underline{\int_a^b} f=\lim\limits_{n\to+\infty} L(f,P_n)$.

(2) 若 f 在 I 上爲 Riemann 可積, 則

$$\int_a^b f=\lim_{n\to+\infty} S(f,P_n,T_n),$$

內 T_n 爲一固定之取點集合.

【證】參閱附錄九. □

本定理之 (1) 乃用以簡化上、下積分之計算, 特別是在函數爲不可積時可以使用. 至於本定理之 (2) 與前一定理雖頗爲相似, 其實二者之觀念並不相同, 此處之極限是『序列』之極限, 我們可利用第一章方法處理 (計算), 而上一定理之極限則必須按照定義 6.3, 處理上十分不便.

例 1. 設 $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}: f(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x\in\mathbb{Q},\\ x^2, & \text{否則.}\end{cases}$

試證 f 不爲 Riemann 可積.

【解】設 $P_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n}{n}\right\}$ 爲 $[0,1]$ 上一正則分割, 則 $\forall\, k=1,\cdots,n$,

- $M(I_k)=\sup\left\{x^2\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ \frac{k-1}{n}\le x\le\frac{k}{n}\right\}=\frac{k^2}{n^2}$;
- $m(I_k)=\inf\left\{0\,\middle|\, x\in\mathbb{Q},\ \frac{k-1}{n}\le x\le\frac{k}{n}\right\}=0$;

由定理 6.7 知,

$$\begin{aligned}\overline{\int_0^1} f&=\lim_{n\to+\infty} U(f,P_n)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\\ &=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\\ &=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

而顯然 $\underline{\int_0^1} f=0$, 故知 f 於 $[0,1]$ 上不爲可積. □

† 所謂**正則分割** (regular partition) 係指一分割其內各子區間爲等長.

定理 6.8

若 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 爲單調, 則 f 必爲 Riemann 可積.

【證】今僅就 f 爲不增函數的情形證之, 其他情形則可仿照證之. 設 P_n 爲 區間 $[a,b]$ 之正則分割, 則 $\Delta x_k=\dfrac{b-a}{n}$, $\forall\, k=1,\dots,n$, 由於 f 爲不增函數, 故

$$M(I_k)=f(x_{k-1}),\ m(I_k)=f(x_k).$$

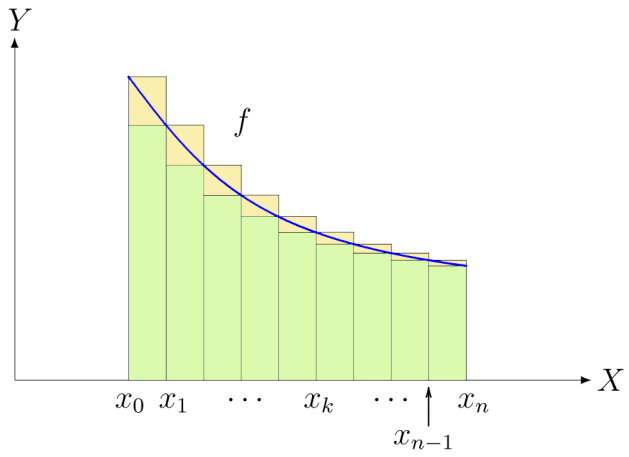


圖 6–14

是以

$$\begin{aligned}U(f,P_n)-L(f,P_n)&=\sum_{k=1}^{n}M(I_k)\Delta x_k-\sum_{k=1}^{n}m(I_k)\Delta x_k\\&=\sum_{k=1}^{n}f(x_{k-1})\frac{b-a}{n}-\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\frac{b-a}{n}\\&=\frac{b-a}{n}\{[f(x_0)+\cdots+f(x_{n-1})]-[f(x_1)+\cdots+f(x_n)]\}\\&=\frac{b-a}{n}(f(x_0)-f(x_n))\\&=\frac{b-a}{n}(f(a)-f(b)),\quad (\text{上圖中淺黃色部分面積})\end{aligned}$$

對於任意正數 ϵ, 只需令自然數 $n>\dfrac{(b-a)(f(a)-f(b))}{\epsilon}$, 則

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)<\epsilon.$$

由定理 6.5 知 f 在區間 $[a,b]$ 上爲可積. □

例 2. 試求 $\displaystyle\int_n^{n+1}[x]\,dx=?$ 內 $n\in\mathbb{N}$, $[\,\cdot\,]$ 爲最大整數函數.

【解】令 $f\colon [n, n+1] \to \mathbb{R} : f(x) = [x]$, 區間 $[n,\, n+1]$ 上之一正則分割

$$P_m = \left\{n, n+\frac{1}{m}, n+\frac{2}{m}, \cdots, n+1\right\}; \quad T_m = \left\{n, n+\frac{1}{m}, n+\frac{2}{m}, \cdots, n+\frac{m-1}{m}\right\},$$

因 f 爲單調, 故爲可積, 是以

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} [x]\,dx &= \lim_{m\to+\infty} S(f, P_m, T_m), \quad (\text{定理 } 6.7)\\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} f(t_k)\cdot\frac{1}{m}, \quad (\text{參閱圖 } 6\text{–}15)\\
&= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{n}{m}, \quad (\because f(t_k) = n,\ \forall\, k)\\
&= n.
\end{aligned}$$

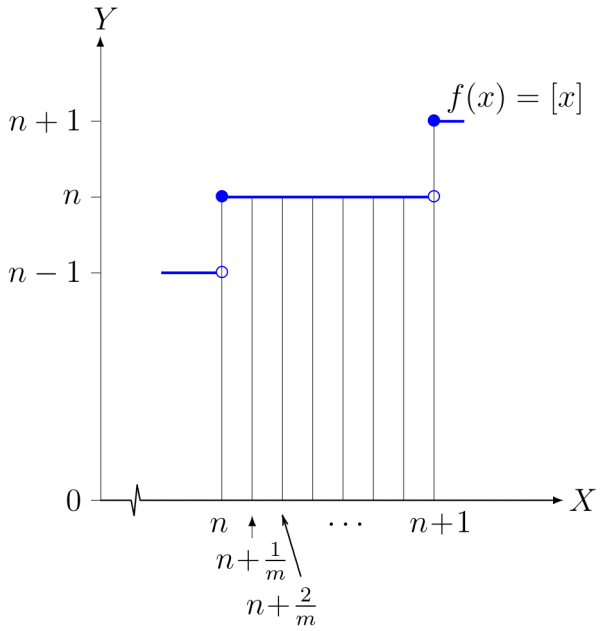


圖 6–15 (注意：X 軸與 Y 軸單位不相等)

定理 6.9

若 $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ 爲連續, 則 f 必爲 Riemann 可積.

【證】因 f 在緊緻區間 $[a, b]$ 上爲連續, 應有[‡]

$$\forall\,\epsilon > 0,\ \exists\,\delta > 0,\ (\forall\, x, y \in [a, b])\left(|x - y| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{b-a}\right),$$

若取自然數 $n > \dfrac{b-a}{\delta}$, P_n 爲區間 $[a, b]$ 之正則分割, 則

‡ 此處涉及均勻連續性觀念, 有興趣者可參閱高等微積分之教本, 如 Rudin: Principles of Mathematical Analysis.

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\sum_{k=1}^{n}(M(I_k)-m(I_k))\Delta x_k$$
$$<\sum_{k=1}^{n}\frac{\epsilon}{b-a}\cdot\frac{b-a}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\epsilon}{n}=\epsilon.$$

知 f 在區間 $[a,b]$ 上滿足 Riemann 條件, 故爲可積. □

例 3. 試求 $\int_0^b x^3\,dx=?$

【解】由於 $f\colon[0,b]\to\mathbb{R}: f(x)=x^3$ 爲連續, 故必爲可積, 令區間 $[0,\ b]$ 上之一正則分割及取點集合分別爲

$$P_n=\left\{0,\ \frac{b}{n},\ \frac{2b}{n},\cdots,\ b\right\},\ T_n=\left\{\frac{b}{n},\ \frac{2b}{n},\ \cdots,\ b\right\}.$$

利用定理 6.7,

$$\int_0^b f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}S(f,P_n,T_n)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{kb}{n}\right)\cdot\frac{b}{n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}k^3\frac{b^4}{n^4}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{b^4}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\frac{b^4}{4}.$$

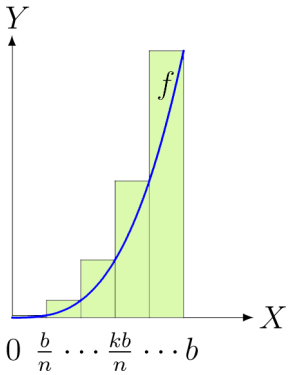


圖 6–16

定理 6.10

若 $f,\ g$ 在區間 $I=[a,b]$ 上均爲可積, $\alpha\in\mathbb{R}$, 則

(1) αf 爲可積且 $\int_I \alpha f=\alpha\int_I f$;

(2) $f+g$ 爲可積且 $\int_I (f+g)=\int_I f+\int_I g$;

(3) 若函數 ϕ 在包含 R_f 之區間上爲連續, 則 $\phi\circ f$ 爲可積 ;

(4) fg 爲可積 ;

(5) 若 $f\le g$, 則 $\int_I f\le\int_I g$;

(6) $|f|$ 爲可積且 $\left|\int_I f\right|\le\int_I |f|$.

【證】(1) 只證 $\alpha \neq 0$ 之情形即可, 因 f 在 I 上爲可積, 故對於 $\epsilon > 0$ 存在分割 P_ϵ 使得

$$(\forall\, P)\begin{cases} P \supset P_\epsilon, \\ \forall\, T = \{t_1, \cdots, t_n\},\ t_k \in I_k, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left| S(f,P,T) - \int_I f \right| < \frac{\epsilon}{|\alpha|} \\ &\Rightarrow |\alpha| \left| S(f,P,T) - \int_I f \right| < \epsilon \\ &\Rightarrow \left| S(\alpha f,P,T) - \alpha \int_I f \right| < \epsilon. \end{aligned}$$

是以證得 $\lim\limits_{\|P\|\to 0} S(\alpha f,P,T) = \alpha \int_I f$. 由定理 6.6 知, αf 爲可積, 且 $\int_I \alpha f = \alpha \int_I f$.

(2) 因 f 與 g 在 I 上爲可積, 故對於 $\epsilon > 0$ 存在分割 P_ϵ 使得

$$(\forall\, P)\begin{cases} P \supset P_\epsilon, \\ \forall\, T = \{t_1, \cdots, t_n\},\ t_k \in I_k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left| S(f,P,T) - \int_I f \right| < \frac{\epsilon}{2}, \\ \left| S(g,P,T) - \int_I g \right| < \frac{\epsilon}{2}, \end{cases}$$

然而 $S(f+g,P,T) = S(f,P,T) + S(g,P,T)$, 故

$$\begin{aligned} &\left| S(f+g,P,T) - \Big(\int_I f + \int_I g \Big) \right| \\ &\qquad = \left| S(f,P,T) - \int_I f + S(g,P,T) - \int_I g \right| \\ &\qquad \leq \left| S(f,P,T) - \int_I f \right| + \left| S(g,P,T) - \int_I g \right| \\ &\qquad < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

(3) 參閱附錄九.

(4) 利用 (1) 與 (2),

$$\begin{aligned} f \text{ 與 } g \text{ 爲可積} &\Rightarrow f+g \text{ 及 } f-g \text{ 皆爲可積} \\ &\Rightarrow (f+g)^2 \text{ 及 } (f-g)^2 \text{ 皆爲可積,} \quad [\star] \\ &\Rightarrow 4fg = (f+g)^2 - (f-g)^2 \text{ 爲可積} \\ &\Rightarrow fg \text{ 爲可積.} \end{aligned}$$

[⋆] 令 $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \phi(t) = t^2$, 由於 ϕ 爲一連續函數, 利用 (3) 知

$$(f+g)^2 = \phi \circ (f+g)$$

爲可積, $(f-g)^2$ 同理.

(5) 由於 $f,\ g$ 在區間 $I=[a,b]$ 上均爲可積,

$$\begin{aligned} f\le g &\Rightarrow\ g-f\ge 0\\ &\Rightarrow\ \int_I (g-f)\ge 0, \quad (\text{Riemann 積分之定義})\\ &\Rightarrow\ \int_I g-\int_I f\ge 0, \quad (\text{利用 (1) 及 (2)})\\ &\Rightarrow\ \int_I g\ge\int_I f. \end{aligned}$$

(6) 由於絕對值函數 $|\cdot|$ 爲連續, 故知 $|f|$ 爲可積, 其次因

$$f\le |f| \quad 及 \quad -f\le |f|,$$

由 (5) 知,

$$\int_I f\le\int_I |f| \quad 且 \quad -\int_I f\le\int_I |f|,$$

即

$$-\int_I |f|\le\int_I f\le\int_I |f|. \qquad \square$$

本定理中之 (1) 及 (2) 又稱爲 Rieamnn 積分之**線性性質**; 而 (5) 則稱爲積分之保序性質. 當 $f\ge 0$ 或 $f\le 0$ 時, (6) 之『不等式』之兩端相等, 否則未必相等, 如下圖所示 : (圖中 $+$ 號表積分值爲正, $-$ 則爲負值).

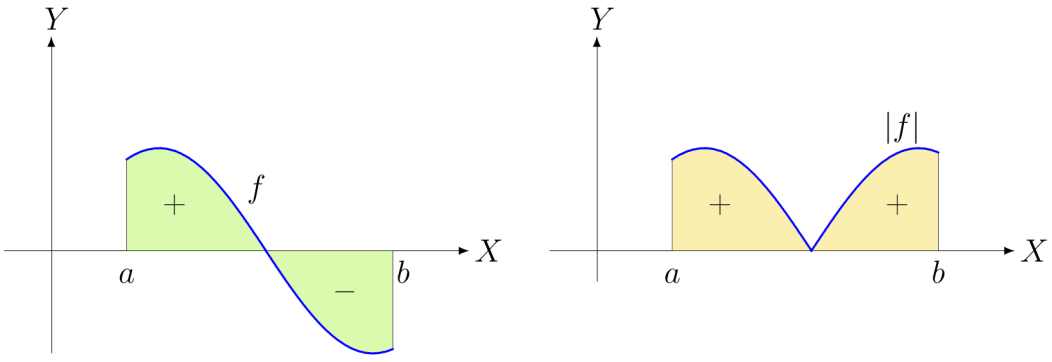


圖 6–17

又, 若 $f<g$, 則 $\int_I f<\int_I g$ 亦眞, 但證明超出本書之程度.

定理 6.11 （**Bliss 定理**）

若函數 f 在區間 $I=[a,b]$ 爲連續, g 在 I 上爲可積, 且 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 爲 I 之一正則分割,

$$T=\{t_1,\cdots,t_n\},\ T'=\{t'_1,\cdots,t'_n\}$$

爲二取點集合, 即 $t_k,t'_k\in[x_{k-1},x_k],\ \forall\, k=1,\ldots,n$, 則

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f(t'_k)g(t_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

【證】參閱附錄九. □

註： 本定理之應用頗廣, 在下一章中我們將多次使用到它.

定理 6.12 [**積分加法律 (additive law of integrals)**]

設 $a<c<b$. 若 f 在區間 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 上均爲可積, 則 f 在區間 $[a,b]$ 上爲可積. 反之, 若 f 在區間 $[a,b]$ 上爲可積, 則 f 在區間 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上均爲可積. 再者以上二種情形均有

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

【證】1° 設 f 在 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 上均爲可積, 且 P' 與 P'' 分別爲區間 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 之分割, 並令 $P=P'\cup P''$, 則

$$\begin{aligned}
&L(f,P')+L(f,P'')=L(f,P)\le\underline{\int_a^b}f\\
&\Rightarrow\ L(f,P')\le\underline{\int_a^b}f-L(f,P'')\\
&\Rightarrow\ \underline{\int_a^c}f\le\underline{\int_a^b}f-L(f,P'')\\
&\Rightarrow\ L(f,P'')\le\underline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^c}f\\
&\Rightarrow\ \underline{\int_c^b}f\le\underline{\int_a^b}f-\underline{\int_a^c}f\\
&\Rightarrow\ \underline{\int_a^c}f+\underline{\int_c^b}f\le\underline{\int_a^b}f;
\end{aligned}$$

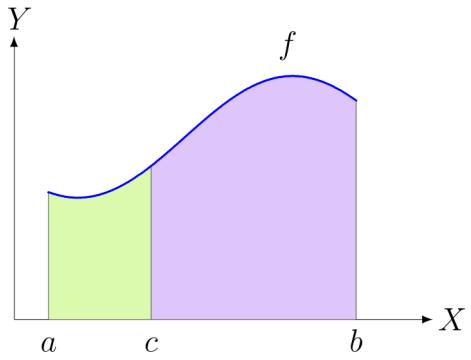


圖 6–18

仿之可證得 $\overline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$. 是以

$$\underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f,$$

然因 f 在 $[a,c]$ 與 $[c,b]$ 上均爲可積, 應有 $\underline{\int_a^c} f = \overline{\int_a^c} f$, $\underline{\int_c^b} f = \overline{\int_c^b} f$, 故

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

2° 設 f 在區間 $[a,b]$ 上爲可積, $c \in [a,b]$, 由定理 6.5 知, $\forall\, \epsilon > 0$ 存在 $[a,b]$ 上一分割 P 使得 $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. 我們可將上式之 P 視爲含有點 c, 因若 P 內不含 c 則可加入點 c, 使其更細, 亦得 $U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$. 令 $P' = P \cap [a,c]$, $P'' = P \cap [c,b]$, 則因

$$0 \le (U(f,P') - L(f,P') + U(f,P'') - L(f,P'')) = U(f,P) - L(f,P) < \epsilon.$$

得

$$U(f,P') - L(f,P') < \epsilon,\ U(f,P'') - L(f,P'') < \epsilon.$$

亦即 f 在區間 $[a,c]$ 及 $[c,b]$ 上爲均可積. □

例 4. 試求 $\int_0^n [2x]\,dx = ?$ 內 $n \in \mathbb{N}$.

【解】設 k 爲一整數, 則因

$$\frac{k}{2} \le x < \frac{k+1}{2} \ \Rightarrow\ k \le 2x < k+1$$
$$\Rightarrow\ [2x] = k,$$

且被積函數爲單調, 仿例 2 可得,

$$\int_{k/2}^{(k+1)/2} [2x]\,dx = \frac{k}{2}. \tag{1}$$

利用積分加法律,

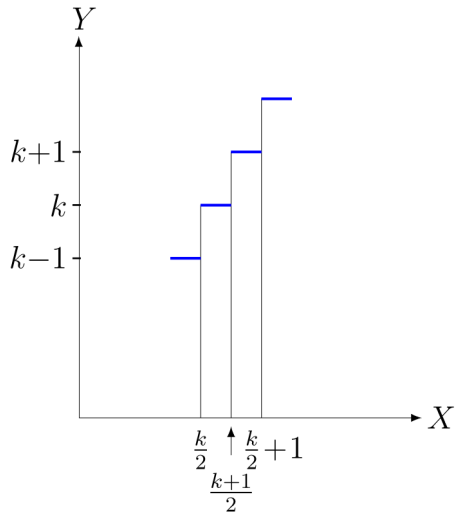


圖 6–19

$$\begin{aligned}\int_0^n [2x]\,dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} [2x]\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [2x]\,dx + \cdots + \int_{n-\frac{1}{2}}^n [2x]\,dx \\ &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{2n-1}{2}, \quad (\text{由}(1)) \\ &= \frac{1}{2}(1 + 2 + \cdots + (2n-1)) = \frac{n(2n-1)}{2}.\end{aligned}$$ □

在 Riemann 積分之定義中, 由於分割之要件爲 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 是以被積函數 f 之定義域 $[a,b]$ 爲一非退化區間, 至目前爲止 $\int_a^a f(x)\,dx$ 並未賦與意義; 其次, 若 f 在區間 $[a,b]$ 上爲可積, 則符號 $\int_b^a f(x)\,dx$ 亦無意義可言. 然而在許多場合下, 吾人往往不知積分之上、下限何者爲大, 因此有必要針對此二者加以界定.

定義 6.13

(1) 若 $a \in D_f$, 我們規定 $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

(2) 若 f 在區間 $[a,b]$ 上爲可積, 我們規定 $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

有了上述定義, 積分加法律變得更加友善, 以下的系對於定積分之理論及計算均十分重要.

系 6.14

若 f 在區間 I 上爲可積, 且 $a,\ b,\ c \in I$, 則

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{$*$}$$

【證】將 $a,\ b,\ c$, 三數予以排列, 則有以下六種情況 :

$$a \le b \le c,\ a \le c \le b,\ b \le a \le c,\ b \le c \le a,\ c \le a \le b,\ c \le b \le a,$$

其中 $a,\ b,\ c$ 三者中若有二者相等, 則 $(*)$ 式顯然爲眞, 故只需考慮三數皆不相等之情形. 此外, 除第二種與定理 6.12 完全相同之外, 其餘五種皆可利用定理 6.12 及定義 6.13 證之. 以 $c < b < a$ 之情形爲例,

$$\begin{aligned}\int_a^c f + \int_c^b f &= -\int_c^a f + \int_c^b f = -\Big(\int_c^b f + \int_b^a f\Big) + \int_c^b f \\ &= -\int_b^a f = \int_a^b f.\end{aligned}$$

□

定理 6.15

設函數 f 在區間 $I = [a,b]$ 上爲連續, 函數 g 在 I 上爲非負且爲可積, 則存在 $c \in I$ 使得

$$f(c)\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

【證】令 $m = \min\{f(x) \mid x \in I\},\ M = \max\{f(x) \mid x \in I\}$, 則因 g 爲非負, 故 $\forall\, x \in I$,

$$mg(x) \le f(x)g(x) \le Mg(x).$$

利用積分之保序性質,

$$m\int_a^b g(x)\,dx \le \int_a^b f(x)g(x)\,dx \le M\int_a^b g(x)\,dx. \tag{1}$$

1° 若 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = 0$, 則由 (1) 式知, $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$, 故本定理得證.

2° 若 $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx > 0$, 則由 (1) 式知,

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} \le M.$$

因 f 爲連續, 由介值定理知, 存在 $c \in I$ 使得

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}.$$

□

定理 6.16 [**積分均值定理 (mean value theorem for integrals)**]

設函數 f 在區間 $I=[a,b]$ 上爲連續, 則存在 $c\in I$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

【證】令 $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : g(x)=1$, 則由上一定理知

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx = f(c)(b-a). \qquad \square$$

例 5. 試問是否存在 $t_0\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{t_0}{1+t_0^5} = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^5}\,dt$?

(等式左端表圖 6–20 中「淺綠色矩形」之面積, 右端則表曲線下之面積).

【解】是, 因爲 $f(t)=\dfrac{t}{1+t^5}$ 在區間 $[0,1]$ 上爲連續, 利用積分均值定理, 知存在 $t_0\in[0,1]$ 使得

$$f(t_0) = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(t)\,dt,$$

亦即

$$\frac{t_0}{1+t_0^5} = \int_0^1 \frac{t}{1+t^5}\,dt. \qquad (1)$$

由於 $\forall\, t\in(0,1),\ 0<\dfrac{t}{1+t^5}<t$, 是以

$$0<\int_0^1 \frac{t}{1+t^5}\,dt < \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}.$$

由 (1) 式觀察知, t_0 不可能爲 0 或 1, 亦即 $t_0\in(0,1)$. $\square$

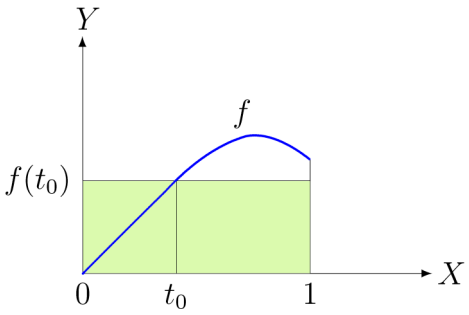


圖 6–20

§ 6.4 基本定理

微積分之所以能成爲一門十分重要的數學, 乃是因爲 Newton 和 Leibniz 早在十七世紀即已發現『積分』和『微分』在某一方面而言彼此具有反運算之性質. 一非負連續函數 f 之面積函數 $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 之導數等於 $f(x)$; 反之, f 在區間 $[a,b]$ 上之 Riemann 積分可利用反導函數解出來, (如果 f 之反導函數能找到的話). 以下是本課程最重要的兩個定理, 對於數學之影響十分深遠, 對於人類科學文明之貢獻則難以估計.

定理 6.17 [**第一型微積分基本定理 (fundamental theorem of calculus)**]

設 f 爲一函數, 且在區間 $I=[a,b]$ 爲可積, 次設函數

$$A\colon [a,b]\to\mathbb{R}\,:\,A(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

若 f 在 $x_0\in[a,b]$ 爲連續, 則 A 在 x_0 爲可微分, 且 $A'(x_0)=f(x_0)$.

【證】由於

$$\begin{aligned}
A'(x_0)&=\lim_{x\to x_0}\frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^x f(t)\,dt}{x-x_0}\\
&=\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^x (f(x_0)+f(t)-f(x_0))\,dt}{x-x_0}\\
&=f(x_0)+\lim_{x\to x_0}\frac{\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt}{x-x_0}\\
&=f(x_0)+0, \qquad [\star]
\end{aligned}$$

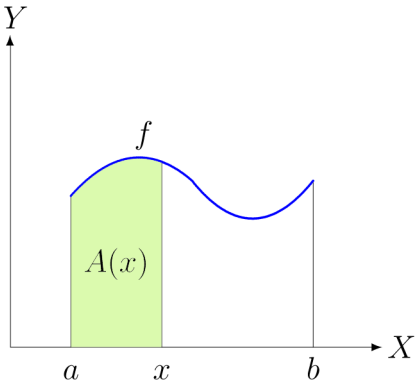


圖 6–21

[⋆] 因 f 在點 x_0 爲連續, $\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0$, 使得

$$0<|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\frac{\epsilon}{2}.$$

若 $x_0<x<x_0+\delta$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt}{x-x_0}\right|&\le\frac{\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,dt}{x-x_0}\\
&\le\frac{\int_{x_0}^x \frac{\epsilon}{2}\,dt}{x-x_0}=\frac{\epsilon}{2}<\epsilon.
\end{aligned}$$

是以 $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+}\frac{\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt}{x-x_0}=0$, 同理 $\displaystyle\lim_{x\to x_0^-}\frac{\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,dt}{x-x_0}=0$. □

註 1: 設 $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲連續, 則由本定理知 $\forall\,x\in[a,b]$,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x).$$

此乃說明函數 f 之先積分再微分其結果仍是 f.

系 6.18

設

(1) $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ 爲連續, 其中 D_f 爲一區間, $a \in D_f$;

(2) $u\colon I \to D_f$ 爲可微, 其中 I 爲一區間 .

則 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,dt = f(u(x))u'(x).$

【證】若令

$$F\colon D_f \to \mathbb{R} : F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

則

- 由定理 6.17 知, $F'(x) = f(x),\ \forall x \in D_f$;
- $\forall\, x \in I,\ F(u(x)) = \displaystyle\int_a^{u(x)} f(t)\,dt$.

是以

$$\frac{d}{dx}\int_a^{u(x)} f(t)\,dt = \frac{d}{dx}F(u(x)) = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x). \qquad \square$$

例 1. 試求 $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{x^2} e^{t^2}\,dt = ?$

【解】原題 $= \exp(x^2)^2 \cdot D(x^2) = 2xe^{x^4}.$ $\square$

例 2. 試求極限 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x}\int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt = ?$

【解】利用 l'Hospital 規則及第一型基本定理,

$$\begin{aligned}
\text{原題} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt}{e^x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x e^{\sqrt{t}}\,dt}{\dfrac{d}{dx}e^x}, \quad (\text{因分子分母皆趨近於 } +\infty\,) \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{e^x} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \exp(\sqrt{x} - x) = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

定理 6.19 （**第二型微積分基本定理**）

設 f 爲一函數, 且在區間 $I=[a,b]$ 爲可積, 若函數 $F\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 滿足 $\forall\, x\in I$, $F'(x)=f(x)$, 則

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a). \quad {}^{\ddagger}$$

【證】設 $P=\{x_0,\, x_1,\, \cdots,\, x_n\}$ 爲 I 之一正則分割, 由於 $\forall\, k\in\{1,\, 2,\, \cdots,\, n\}$, F 於 $I_k=[x_{k-1},x_k]$ 上滿足微分均值定理之條件, 故 $\exists\, t_k\in I_k$ 使得

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=F'(t_k)(x_k-x_{k-1})=f(t_k)\Delta x_k.$$

令 $T=\{t_1,\cdots,t_n\}$, 因 f 於 I 上爲可積, 由定理 6.7 知,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty} S(f,P_n,T_n)\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta x_k\\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}(F(x_k)-F(x_{k-1}))\\ &= \lim_{n\to+\infty}(F(b)-F(a))=F(b)-F(a).\end{aligned}$$

□

註 2: 當 f 爲連續, 則本定理之證明可利用第一型基本定理：設函數

$$A\colon I\to\mathbb{R}\,:\,A(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

則

$$\begin{aligned}\forall\, x\in I,\ A'(x)=f(x) &\ \Rightarrow\ \forall\, x\in I,\ A'(x)=F'(x),\ (\text{由原設})\\ &\ \Rightarrow\ \exists\, C\in\mathbb{R},\ \forall\, x\in I,\ A(x)=F(x)+C\\ &\ \Rightarrow\ \forall\, x\in I,\ A(x)=F(x)-F(a),\ {}^{[\star]}\\ &\ \Rightarrow\ \forall\, x\in I,\ \int_a^b f(t)\,dt=A(b)=F(b)-F(a).\end{aligned}$$

[⋆] 因 $0=A(a)=F(a)+C$.

註 3: 設 $F\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 爲可微, 則由本定理知,

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(x)\Big|_a^b$$

此乃說明函數 F 之先微分再積分其結果仍是 F (之變形).

---

‡ 常表爲 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b$ 或 $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

例 3. 試求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+k^2}=?$

【解】利用定理 6.7,

$$\begin{aligned}\text{原題} &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}\cdot\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}S(f,P_n,T_n), \qquad [\star]\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx,\ (\because f\text{ 爲連續})\\ &= \tan^{-1}x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

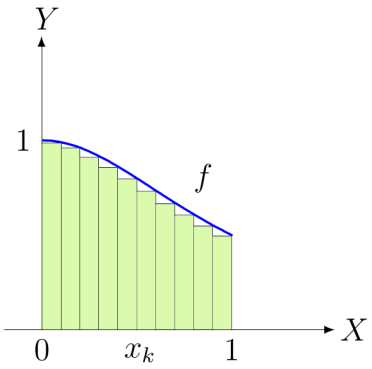


圖 6–22

[⋆] 令 $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}:f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$,

$P_n=\left\{0,\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\cdots,\dfrac{n}{n}\right\}$, $T_n=\left\{\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\cdots,\dfrac{n}{n}\right\}$.

(註: 淺綠色部分之面積等於 $S(f,P_n,T_n)$.) □

例 4. 設函數 $f\colon I\to\mathbb{R}$ 爲連續, 其中 I 爲一非退化區間, 試證 f 必具反導函數.

【證】只需令 $F\colon\ \to\mathbb{R}:F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$, 其中 a 爲 I 內一固定點, 則由微積分基本定理第一型知,

$$\forall\, x\in I,\ F'(x)=f(x).$$ □

由第二型微積分基本定理我們知道不定積分可用以求定積分之值, 但很少人會想到定積分也可以用來解決某些不定積分題目. 尤其是帶有絕對值符號或 max, min 等的被積函數更需利用定積分方法.

例 5. 試求 $\int|x|\,dx$.

【解】若函數 $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 滿足 $\forall\, x\in\mathbb{R},\ F'(x)=|x|$, 則由不定積分之定義知

$$\int|x|\,dx=F(x)+C.$$

爲此, 令 $F(x)=\int_0^x|t|\,dt$, 因絕對值函數爲連續, 由第一型基本定理知 $F'(x)=|x|$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. 在此

$$F(x)=\int_0^x |t|\,dt=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}, & \text{若 } x<0,\\[2mm] \dfrac{x^2}{2}, & \text{若 } x\ge 0.\end{cases}$$

$$=\frac{1}{2}x|x|.$$

故得

$$\int |x|\,dx=\frac{1}{2}x|x|+C.$$

F 之圖形如右.

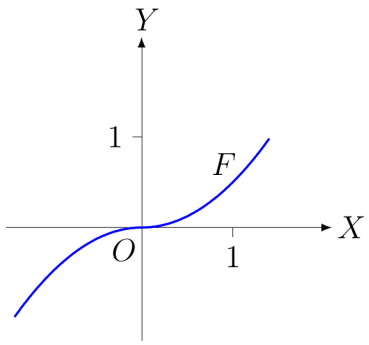


圖 6–23

例 6. 試舉一反例以說明「$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$」不恆眞.

【解】設

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x<0,\\ 1, & \text{若 } x\ge 0.\end{cases}$$

$$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:F(x)\underset{\text{def}}{=}\int_0^x f(t)\,dt=\begin{cases}0, & \text{若 } x<0,\\ x, & \text{若 } x\ge 0.\end{cases}$$

顯然 F 在點 0 不爲可微, 但 $f(0)=1$, 故當 $x=0$ 時,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x)$$

不眞. □

§ 6.5 變數代換

定理 6.20

設 $u:[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲連續可微分, 且 $g:u[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲連續, 若 $\forall\, x\in[a,b]$, $f(x)=g(u(x))u'(x)$, 則

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b g(u(x))u'(x)\,dx=\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du. \qquad (*)$$

【證】設 G 爲 g 之一反導函數, 則由不定積分之變數代換定理知,

$$\int g(u(x))u'(x)\,dx=G(u(x))+C.$$

是以

$$\begin{cases} (*)\text{ 之左} = \displaystyle\int_a^b g(u(x))u'(x)\,dx = G(u(x))\Big|_a^b = G(u(b)) - G(u(a)), \\ (*)\text{ 之右} = \displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du = G(u)\Big|_{u(a)}^{u(b)} = G(u(b)) - G(u(a)). \end{cases}$$ □

定理使用方法

1° 先將被積函數 $f(x)$ 分解爲 $u = u(x)$ 之函數及 u 之導數之積, $f(x) = g(u(x)) \cdot u'(x)$; 則

$$f(x)\,dx = g(u(x)) \cdot u'(x)\,dx = g(u)\,du;$$

2° 將其代換爲 $\displaystyle\int_{u(a)}^{u(b)} g(u)\,du$; (參閱下表).

	變換前	變換後
自變數	x	u
積分上限	b	$u(b)$
積分下限	a	$u(a)$

3° 求上述積分.

例 1. 試求 $\displaystyle\int_1^3 x\sqrt{x^2-1}\,dx = ?$

【解】**法** 1: 令 $u = x^2 - 1$, 則 $du = 2x\,dx$,

$$\text{原題} = \frac{1}{2}\int_0^8 \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_0^8 = \frac{1}{3}8^{3/2} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

法 2: 利用不定積分之代換積分法, 令 $u = x^2 - 1$, 則 $du = 2x\,dx$, 故不定積分爲,

$$\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2} + C.$$

是以

$$\text{原題} = \frac{1}{3}(x^2-1)^{3/2}\Big|_1^3 = \frac{1}{3}((3^2-1)^{3/2} - 0) = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$ □

例 2. 設 $p > 0$ 爲連續函數 f 之週期, 試證 :

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx\,, \quad \text{內 } a \in \mathbb{R}.$$

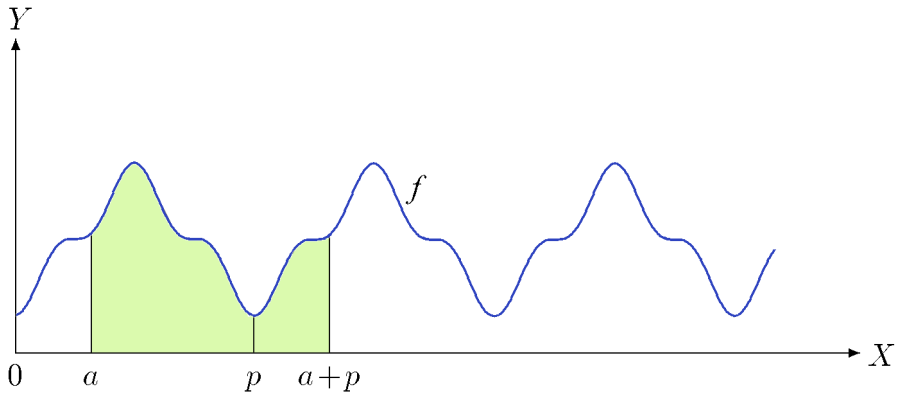


圖 6–24

【解】由於

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_a^0 f(x)\,dx + \int_0^p f(x)\,dx + \int_p^{a+p} f(x)\,dx. \qquad (*)$$

而在右端第三項中, 令 $t = x - p$, 則 $x = t + p$, 是以

$$\begin{aligned}\int_p^{a+p} f(x)\,dx &= \int_0^a f(t+p)\,dt \\ &= \int_0^a f(t)\,dt, \ (\text{因 } p \text{ 爲 } f \text{ 之週期}) \\ &= -\int_a^0 f(t)\,dt.\end{aligned}$$

代入 $(*)$ 式中, 即得 $\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx.$ □

例 3. 試求 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = ?$

【解】由於被積函數爲連續, 故爲可積, 設其積分值爲 I. 令 $y = \pi - x$, 則

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = -\int_\pi^0 \frac{(\pi-y)\sin y}{1+\cos^2 y}dy \\ &= \pi\int_0^\pi \frac{\sin y}{1+\cos^2 y}dy - \int_0^\pi \frac{y\sin y}{1+\cos^2 y}dy \\ &= \pi\int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} - I, \ (\text{第一項令 } u = \cos y)\end{aligned}$$

故

$$I = \frac{\pi}{2}\tan^{-1} u\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}(-1)) = \frac{\pi}{2}(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{4}.$$ □

例 4. 試求積分 : $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^k x}{\sin^k x + \cos^k x}\,dx$, 內 k 爲一正實數.

【解】令 $u=\dfrac{\pi}{2}-x$, 即 $x=\dfrac{\pi}{2}-u$, $dx=-du$. 今

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^k x}{\sin^k x+\cos^k x}\,dx&=-\int_{\pi/2}^0\frac{\sin^k(\frac{\pi}{2}-u)\,du}{\sin^k(\frac{\pi}{2}-u)+\cos^k(\frac{\pi}{2}-u)}\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^k u}{\cos^k u+\sin^k u}\,du.\end{aligned}$$

是以

$$\begin{aligned}2\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^k x\,dx}{\sin^k x+\cos^k x}&=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^k x\,dx}{\sin^k x+\cos^k x}+\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^k x\,dx}{\sin^k x+\cos^k x}\\&=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^k x+\cos^k x}{\sin^k x+\cos^k x}\,dx=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

故 $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^k x\,dx}{\sin^k x+\cos^k x}=\frac{\pi}{4}$. □

§ 6.6 第一型瑕積分

我們在界定函數之 Riemann 積分時, 曾有兩個限條件 : 其一, 積分區間須爲緊緻; 其二, 被積函數在積分區間內須爲有界. 本節中我們將討論如何突破此種限制, 以得一較爲廣義的積分概念. 首先我們考慮積分範圍不爲有界之情形, 爲使讀者易於了解, 我們先舉一個例子.

例 1. 試討論 $\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{-k}\,dx$.

【解】對於 Riemann 積分而言, 由於積分之區間不爲緊緻, 本題之積分並無意義, 我們考慮 $f(x)=x^{-k}$ 在區間 $[1,t]$ 上之積分, 然後再取其極限. 爲此, 設

$$F\colon[1,+\infty)\to\mathbb{R}:F(t)=\int_1^t x^{-k}\,dx=\begin{cases}\dfrac{t^{1-k}-1}{1-k}, & \text{若 } k\neq 1,\\ \ln t, & \text{若 } k=1.\end{cases}$$

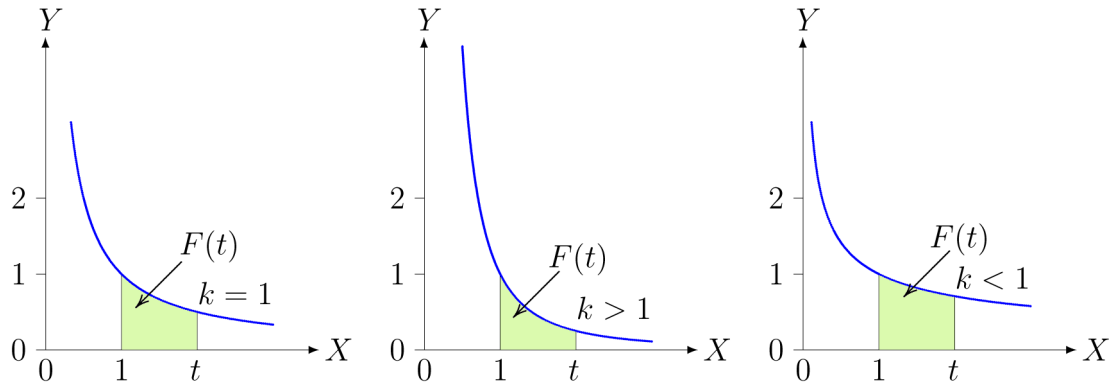


圖 6–25 : $f(x)=x^{-k}$

1° 若 $k=1$, 則 $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\ln t=+\infty$, (不存在).

2° 若 $k>1$, 則 $\lim\limits_{t\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{1-k}-1}{1-k}=\dfrac{1}{k-1}$.

3° 若 $k<1$, 則 $\lim\limits_{t\to+\infty} F(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t^{1-k}-1}{1-k}=+\infty$, (不存在). □

定義 6.21

設 f 在 $[a,t]$ 上爲可積, $\forall\, t>a$, 令 $F\colon [a,+\infty)\to\mathbb{R}: F(t)=\int_a^t f(x)\,dx$.

(1) 我們稱 F 爲一**瑕積分** (improper integral), 並記爲 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$.

(2) 若極限 $\lim\limits_{t\to+\infty} F(x)$ 存在, 我們稱此瑕積分爲**收斂** (convergent), 此時, 又以 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 表上述極限.

(3) 若極限 $\lim\limits_{t\to+\infty} F(x)$ 不存在, 我們稱此瑕積分爲**發散** (divergent).

仿照上述定義可予界定瑕積分 $\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$. 其次, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ 應考慮 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

(其中 c 爲任意常數, 通常取 0.) 若右端二瑕積分皆爲收斂, 則稱該瑕積分爲收斂, 否則爲發散.

例 2. 試求判別瑕積分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(x-e^x)\,dx$ 是否爲收斂?

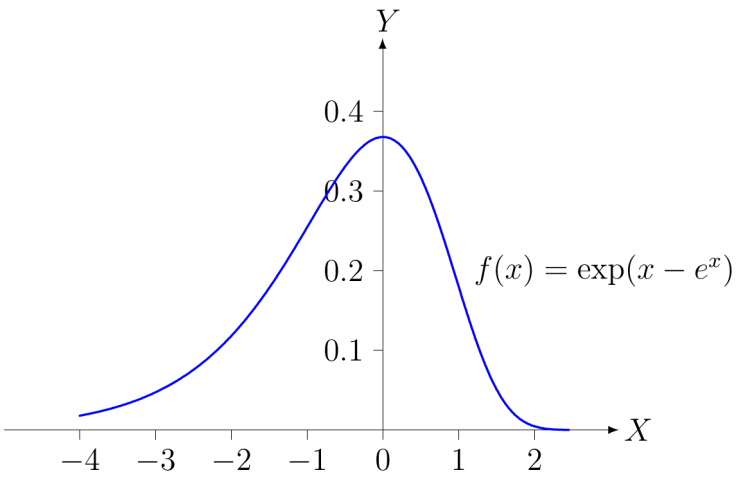


圖 6–26 (注意 : X 軸與 Y 軸單位不相等)

【解】先求不定積分, 令 $u = e^x$, 則 $du = e^x\,dx$,

$$\begin{aligned}\int \exp(x - e^x)\,dx &= \int e^x e^{-e^x}\,dx = \int e^{-u}\,du \\ &= -e^{-u} + C = -\exp(-e^x) + C.\end{aligned}$$

其次,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \exp(x - e^x)\,dx &= \lim_{s\to-\infty} \int_s^0 \exp(x - e^x)\,dx \\ &= \lim_{s\to-\infty} -\exp(-e^x)\Big|_s^0 = 1 - e^{-1}\ ; \\ \int_0^{+\infty} \exp(x - e^x)\,dx &= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \exp(x - e^x)\,dx \\ &= \lim_{t\to+\infty} -\exp(-e^x)\Big|_0^t = e^{-1} - 0 = e^{-1}\ ;\end{aligned}$$

故本題之瑕積分收斂於 $1 - e^{-1} + e^{-1} = 1$. □

定理 6.22 (瑕積分檢定定理一)

設 f 與 g 在 $[a, +\infty)$ 上任何緊緻子區間上皆爲可積, 且二函數皆爲非負, 則

(1) 瑕積分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 爲收斂之充要條件爲

$$\exists\, M > 0,\ \text{使得}\ \forall\, t \geq a,\ \int_a^t f(x)\,dx \leq M.$$

(2) 若 $\forall\, x \geq a,\ g(x) \geq f(x)$, 則

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ 爲收斂} \quad\Rightarrow\quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 爲收斂}.$$

(3) 設 $\forall\, x \geq a,\ g(x) > 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c$,

1° 若 $0 < c < +\infty$, 則

$$\left[\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ 爲收斂} \quad\Leftrightarrow\quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 爲收斂}\right].$$

2° 若 $c = 0$, 則 $\left[\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ 爲收斂} \quad\Rightarrow\quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 爲收斂}\right]$.

3° 若 $c = +\infty$, 則 $\left[\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ 爲收斂} \quad\Leftarrow\quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 爲收斂}\right]$.

【證】(1) 由於 $f \geq 0$, 是以 $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ 爲一不減函數.

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ 爲收斂} \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} F(t) \text{ 存在}$$
$$\Leftrightarrow F \text{ 在區間 } [a,+\infty) \text{ 有上界, (因 } F \text{ 爲不減)}$$
$$\Leftrightarrow \exists\, M>0, \text{ 使得 } \forall\, t \geq a,\ F(t) \leq M.$$

(2) 因 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 爲收斂, 令之爲 M, 則

$$\forall\, t \geq a,\ \int_a^t f(x)\,dx \leq \int_a^t g(x)\,dx \leq M.$$

(3) 只證 c 爲有限正數之情形, 其餘二情形讀者自證之.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = c$$
$$\Leftrightarrow \left[\forall\,\epsilon>0,\ \exists\, b \geq a,\ \text{使得 } \forall\, x \geq b \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \epsilon\right]$$
$$\Rightarrow \left[\exists\, b \geq a,\ \text{使得 } \forall\, x \geq b \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - c\right| < \frac{c}{2}\right], \text{ (取 } \epsilon = \frac{c}{2}\text{)}$$
$$\Rightarrow \left[\exists\, b \geq a,\ \text{使得 } \forall\, x \geq b \Rightarrow c - \frac{c}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < c + \frac{c}{2}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\exists\, b \geq a,\ \text{使得 } \forall\, x \geq b \Rightarrow \frac{c}{2}\,g(x) < f(x) < \frac{3c}{2}\,g(x)\right].$$

由 (2) 知, 瑕積分 $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ 與 $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 同爲收斂或同爲發散. □

例 3. 試討論瑕積分 $\int_2^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^7+1}}$ 與 $\int_2^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^7+1}}$ 之斂散性.

【解】1° 由於

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^7+1}}}{\dfrac{1}{x^{3/2}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^7}{x^7+1}} = 1,$$

已知 $\int_2^{+\infty} x^{-3/2}\,dx$ 爲收斂, 故 $\int_2^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^7+1}}$ 亦爲收斂.

2° 由於

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^3}{\sqrt{x^7+1}}}{\dfrac{1}{x^{1/2}}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^7}{x^7+1}} = 1,$$

已知 $\int_2^{+\infty} x^{-1/2}\,dx$ 爲發散, 故 $\int_2^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^7+1}}$ 亦爲發散. □

例 4. 設 α 爲一實數, 試問瑕積分 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$, 是否爲收斂?

【解】已知 $\int_1^{+\infty} x^{-2}\,dx$ 爲收斂; 利用 l'Hospital 規則,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha+1}}{e^x}=0,$$

故瑕積分 $\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx$ 爲收斂. □

§ 6.7 第二型瑕積分

上一節之瑕積分中我們考慮積分區間爲無界. 本節中我們將討論積分範圍之區間雖爲有界但不爲一閉區間之情形, 如此一來它包含函數爲無界之情形, 我們仍由範例切入主題.

例 1. 試討論 $\int_{0^+}^1 x^{-k}\,dx$.

【解】設

$$F\colon(0,1]\to\mathbb{R}:F(t)=\int_t^1 x^{-k}\,dx=\begin{cases}\dfrac{1-t^{1-k}}{1-k}, & \text{若 } k\neq 1,\\ -\ln t, & \text{若 } k=1.\end{cases}$$

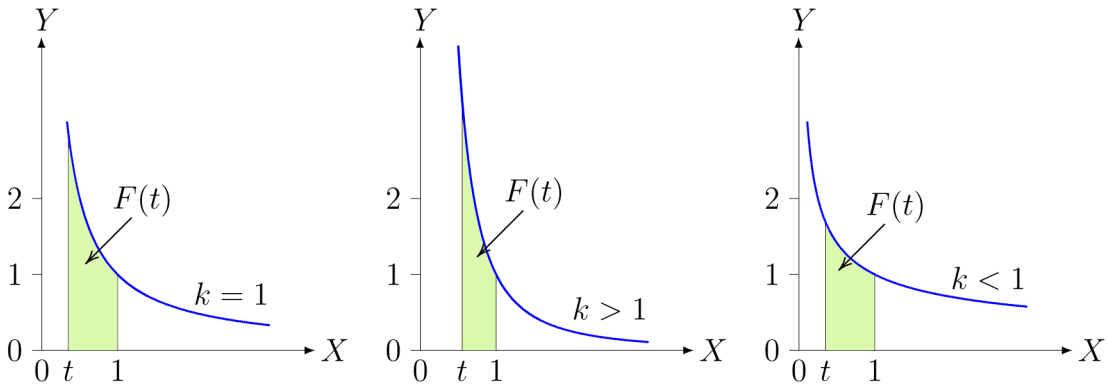


圖 6–27: $f(x)=x^{-k}$

1° 若 $k=1$, 則

$$\lim_{t\to0^+}F(t)=\lim_{t\to0^+}-\ln t=+\infty,\quad(\text{極限不存在.})$$

2° 若 $k>1$, 則

$$\lim_{t\to0^+}F(x)=\lim_{t\to0^+}\frac{1-t^{1-k}}{1-k}=\lim_{t\to0^+}\frac{1-(\frac{1}{t})^{k-1}}{1-k}=+\infty,$$

(極限不存在).

3° 若 $k<1$, 則

$$\lim_{t\to 0^+} F(x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{1-t^{1-k}}{1-k}=\frac{1}{1-k}.$$ □

定義 6.23

設 f 在 $[t,b]$ 上爲可積, $\forall\, t\in(a,b]$, 令 $F\colon (a,b]\to\mathbb{R}: F(t)=\int_t^b f(x)\,dx$.

(1) 我們稱 F 爲一**瑕積分**, 並記爲 $\int_{a^+}^b f(x)\,dx$.

(2) 若極限 $\lim\limits_{t\to a^+} F(x)$ 存在, 我們稱此瑕積分爲**收斂** (convergent), 此時, 又以 $\int_{a^+}^b f(x)\,dx$ 表上述極限.

(3) 若 $\lim\limits_{t\to a^+} F(x)$ 不存在, 我們稱此瑕積分爲**發散** (divergent).

仿照上述定義可予界定瑕積分 $\int_a^{b^-} f(x)\,dx$, 其次, $\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx$ 應考慮 :

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx=\int_{a^+}^{c} f(x)\,dx+\int_c^{b^-} f(x)\,dx,\quad \text{其中 } a<c<b,$$

若右端二瑕積分皆爲收斂, 則稱該瑕積分爲收斂, 否則爲發散. 至於 $\int_{a^+}^{+\infty} f(x)\,dx$ 則爲混合型, 應同時考慮第一及第二型瑕積分, 我們僅舉以下範例以爲說明.

例 2. 試驗證瑕積分 $\int_{1^+}^{+\infty}\dfrac{dx}{x(x-1)}$ 之斂散性.

【解】由於

$$\int_{1^+}^{+\infty}\frac{dx}{x(x-1)}=\int_{1^+}^{2}\frac{dx}{x(x-1)}+\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(x-1)}\qquad (*)$$

上式左端瑕積分爲收斂之充要條件爲右端二瑕積分皆爲收斂, (換言之, 二者之一爲發散時, 左端瑕積分即爲發散). 由於

$$\begin{aligned}\int_{1^+}^{2}\frac{dx}{x(x-1)}&=\lim_{t\to 1^+}\int_t^2\Big(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\Big)\,dx\\&=\lim_{t\to 1^+}\Big[\ln|x-1|-\ln|x|\Big]_t^2\\&=\lim_{t\to 1^+}\big(-\ln 2-\ln(t-1)+\ln t\big)\\&=+\infty.\end{aligned}$$

故知原瑕積分爲發散, (參閱圖 6–28).

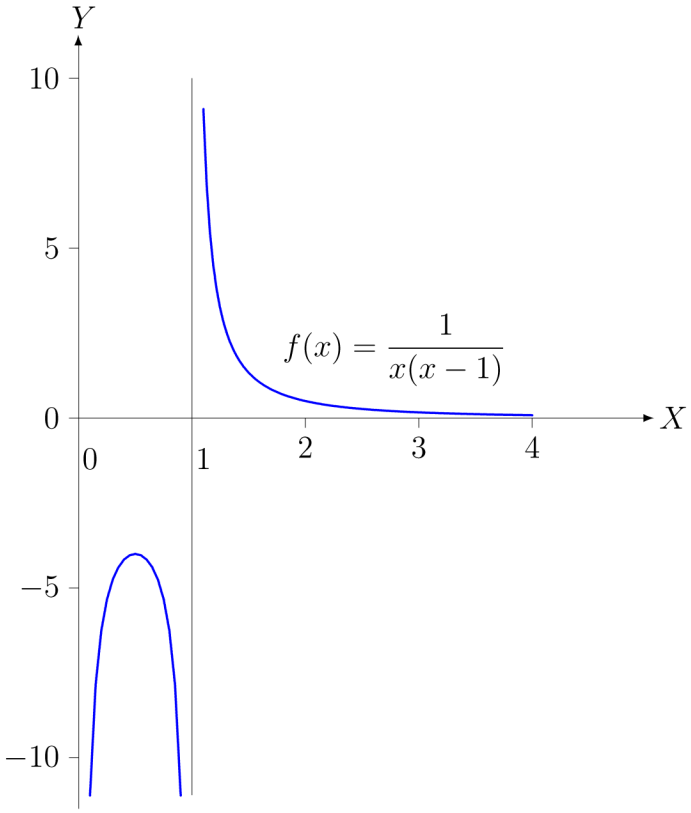


圖 6–28 （注意：X 軸與 Y 軸單位不相等） □

例 3. 試驗證瑕積分 $\int_{0^+}^{1} \ln x \, dx$ 之斂散性, 若爲收斂並求其值.

【解】利用分部積分法可得不定積分 $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$, 是以

$$\begin{aligned}
\int_{0^+}^{1} \ln x \, dx &= \lim_{t \to 0^+} \int_{t}^{1} \ln x \, dx \\
&= \lim_{t \to 0^+} \Big[x \ln x - x \Big]_{t}^{1} \\
&= \lim_{t \to 0^+} (-1 - t \ln t + t) \\
&= -1 - \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} + 0 \\
&= -1 - \lim_{t \to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2}, \quad [\star] \\
&= -1.
\end{aligned}$$

[⋆] 利用 l'Hospital 規則.

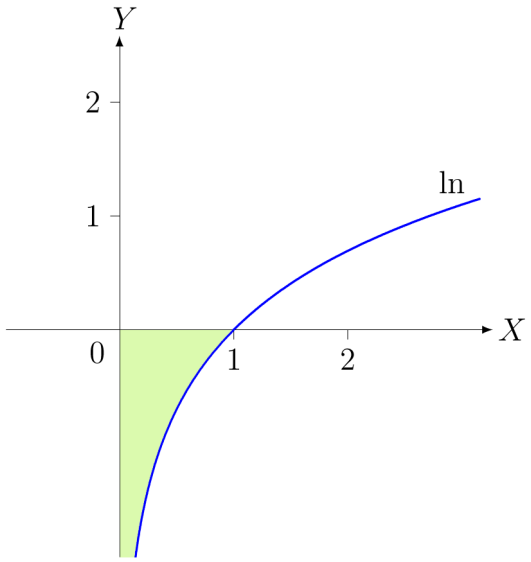


圖 6–29

定理 6.24 （瑕積分檢定定理二）

設 f 與 g 在 $(a,b]$ 上任何緊緻子區間上皆爲可積, 且二函數皆爲非負, 則

(1) 瑕積分 $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ 爲收斂之充要條件爲

$$\exists M>0,\ \text{使得}\ \forall t\in(a,b],\ \int_{t}^{b} f(x)\,dx\le M.$$

(2) 若 $\forall x\in(a,b],\ g(x)\ge f(x)$, 則

$$\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx\ \text{爲收斂}\ \Rightarrow\ \int_{a^+}^{b} f(x)\,dx\ \text{爲收斂}.$$

(3) 設 $\forall x\in(a,b],\ g(x)>0,\ \lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c$,

1° 若 $0<c<+\infty$, 則 $\left[\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx\ \text{爲收斂}\ \Leftrightarrow\ \int_{a^+}^{b} f(x)\,dx\ \text{爲收斂}\right]$.

2° 若 $c=0$, 則 $\left[\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx\ \text{爲收斂}\ \Rightarrow\ \int_{a^+}^{b} f(x)\,dx\ \text{爲收斂}\right]$.

3° 若 $c=+\infty$, 則 $\left[\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx\ \text{爲收斂}\ \Leftarrow\ \int_{a^+}^{b} f(x)\,dx\ \text{爲收斂}\right]$.

【證】仿定理 6.22 讀者自證之. □

例 4. 設 α 爲一實數,

(1) 試問 α 爲何值方使瑕積分 $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 爲收斂?

(2) 若令上述瑕積分爲 $\Gamma(\alpha)$, 試證 : $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha),\ \forall\,\alpha>0$.

(3) 試證 : $\Gamma(n)=(n-1)!,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

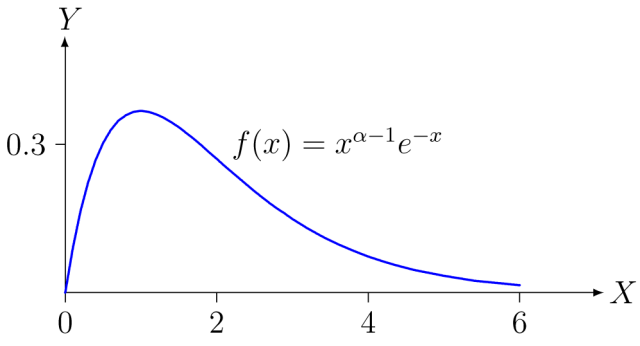


圖 6–30： $\alpha=2$ 時被積函數之圖形

【解】本例之函數 Γ 稱爲 **gamma 函數** †, 在機率論、統計學及其他應用數學上十分重要.

(1) 由於

$$\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx = \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx + \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx,$$

在上一節例 4 中, 我們已知上式右端第二項之瑕積分爲收斂 (不論 α 爲何值), 是以

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \text{ 爲收斂} &\Leftrightarrow \int_0^1 x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \text{ 爲收斂} \\
&\Leftrightarrow \int_0^1 x^{\alpha-1}\,dx \text{ 爲收斂}, \left(\text{因 } \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\alpha-1}e^{-x}}{x^{\alpha-1}} = 1 \right) \\
&\Leftrightarrow \alpha - 1 > -1 \\
&\Leftrightarrow \alpha > 0.
\end{aligned}$$

(2) $\forall\, \alpha > 0$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(\alpha+1) &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t x^{\alpha}e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{t\to+\infty} \Big[-x^{\alpha}e^{-x}\Big|_0^t + \alpha \int_0^t x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx \Big], \text{ (分部積分)} \\
&= \alpha \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx, \quad [\star] \\
&= \alpha\Gamma(\alpha).
\end{aligned}$$

[⋆] 利用 l'Hospital 規則, $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{t^{\alpha}}{e^t} = 0$.

(3) 由於

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^0\,dx = \lim_{t\to+\infty} \Big[-e^{-x} \Big]_0^t = 1.$$

$\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\
&= \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot \Gamma(1) = (n-1)!\,. \qquad \square
\end{aligned}$$

例 5. 試驗證瑕積分 $\displaystyle\int_{1^+}^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5-1}}$ 之斂散性.

【解】令 $f, g\colon (1,3] \to \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^5-1}},\ g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$, 由於

1° $f > 0,\ g > 0$;

† 當 $0 < \alpha < 1$ 時, $\Gamma(\alpha)$ 乃第一及第二型瑕積分之混合, 即 $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ 但在無誤解之可能時, 常將積分下限 0^+ 寫爲 0.

2° $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\sqrt{x^4+x^3+x^2+x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt5}$;

3° $\displaystyle\int_{1^+}^{3}g(x)\,dx=\lim_{t\to1^+}\int_t^3(x-1)^{-1/2}\,dx=\lim_{t\to1^+}\Big[2(x-1)^{1/2}\Big]_t^3=2\sqrt2$, 收斂.

故知原瑕積分爲收斂. □

例 6. 試求 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt k}=?$.

【解】若令 $f\colon(0,1]\to\mathbb{R}:f(x)=\dfrac{1}{\sqrt x}$, $P_n=\Big\{0,\dfrac1n,\dfrac2n,\cdots,\dfrac nn\Big\}$, $T_n=\Big\{\dfrac1n,\dfrac2n,\cdots,\dfrac nn\Big\}$.

雖然

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k/n}}\cdot\frac1n=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac kn\Big)\cdot\frac1n,$$

但我們不能使用定理 6.7 以說明上述極限等於瑕積分 $\displaystyle\int_{0^+}^{1}\frac{dx}{\sqrt x}$, 因爲此一定理僅能用於可積(有界) 函數而非瑕積分, 故應另行設法.

1° 對上述分割 P_n,

$$\begin{aligned}
&f\text{ 爲遞減}\ \Rightarrow\ x_{k-1}\le x\le x_k,\ f\Big(\frac kn\Big)\le f(x),\quad(\text{參閱圖 6–31A})\\
&\Rightarrow\ f\Big(\frac kn\Big)\cdot\frac1n=\int_{x_{k-1}}^{x_k}f\Big(\frac kn\Big)\,dx\le\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\,dx\\
&\Rightarrow\ \sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac kn\Big)\cdot\frac1n\le\int_{0^+}^{1}f(x)\,dx=2\\
&\Rightarrow\ \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f\Big(\frac kn\Big)\cdot\frac1n\le2.
\end{aligned}$$

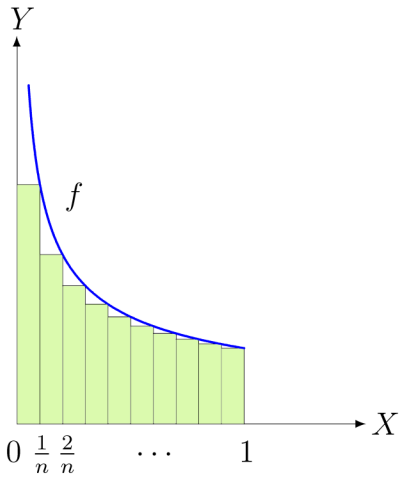


圖 6–31A

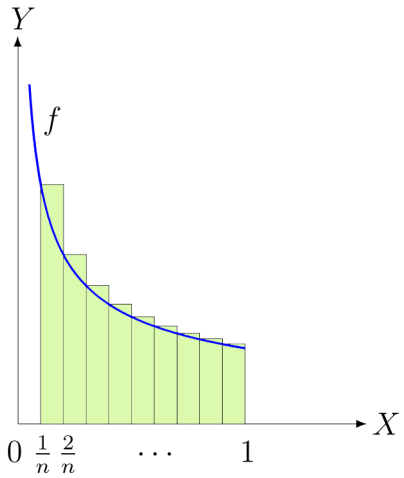


圖 6–31B

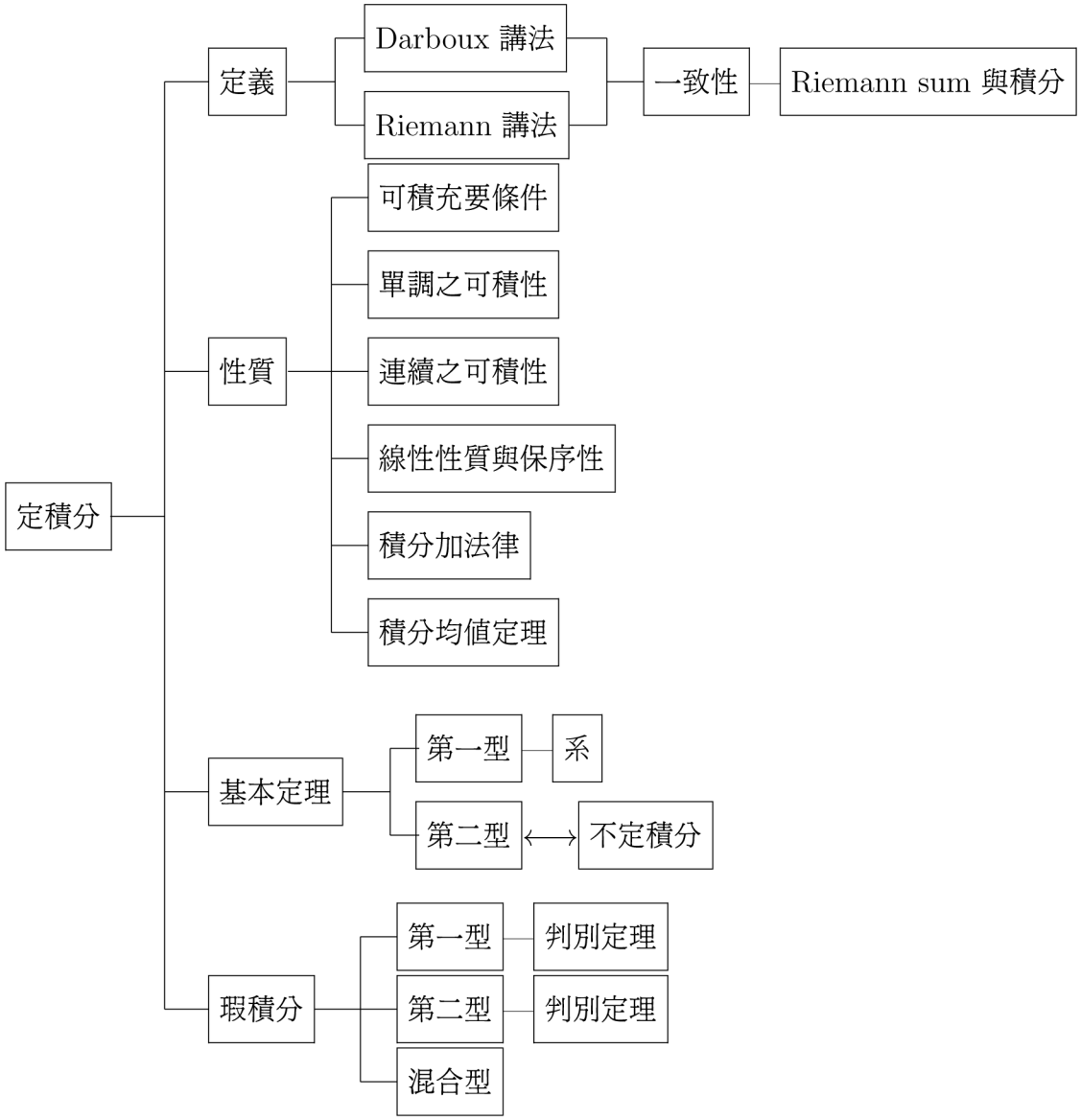
2° 其次,

$$\begin{aligned} f \text{ 爲遞減} &\Rightarrow \Big[k>1,\ x_{k-1}\le x\le x_k \Rightarrow f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\ge f(x)\Big],\ (\text{圖 6–31B}) \\ &\Rightarrow k>1,\ f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\cdot\frac{1}{n}=\int_{x_{k-1}}^{x_k} f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\,dx\ge\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx \\ &\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\cdot\frac{1}{n}>\sum_{k=2}^{n} f\Big(\frac{k-1}{n}\Big)\cdot\frac{1}{n}\ge\int_{1/n}^{1} f(x)\,dx \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\cdot\frac{1}{n}\ge\lim_{n\to+\infty}\int_{1/n}^{1} f(x)\,dx=2. \end{aligned}$$

3° 由 1° 及 2° 知, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{k}}=2.$ □

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

定積分之系統表


定積分
定義
Darboux 講法
Riemann 講法
一致性
Riemann sum 與積分
性質
可積充要條件
單調之可積性
連續之可積性
線性性質與保序性
積分加法律
積分均值定理
基本定理
第一型
系
第二型
⟷
不定積分
瑕積分
第一型
判別定理
第二型
判別定理
混合型

第 六 章 習 題

積分定義及基本性質

6-1 設 $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}: f(x)=\begin{cases} x, & \text{若 } x\in\mathbb{Q},\\ -x, & \text{否則.}\end{cases}$

試問 f 是否爲可積? 若爲可積試求 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=?$

6-2 設 $f\colon [0,4]\to\mathbb{R}: f(x)=x-[x]$.

(a) 試繪出 f 之圖形;

(b) 若 $P=\{0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 5/2,\ 3,\ 7/2,\ 4\}$, 試求 $U(f,P)$ 及 $L(f,P)$;

(c) 試問 f 在區間 $[0,4]$ 是否爲可積? 若爲可積, 試求積分 $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$.

[提示] 利用積分之線性性質.

6-3 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}: f(x)=\begin{cases} 0, & \text{若 } x\in\mathbb{Z},\\ 2, & \text{否則.}\end{cases}$ 試問 f 在區間 $[0,4]$ 是否爲可積? 若爲可積, 試求積分 $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx.$

6-4 由本章之定理知, 若 f 在區間 $I=[a,b]$ 爲可積, 則 $|f|$ 在 I 上亦爲可積. 反之, 若 $|f|$ 在 I 上爲可積, 試問 f 是否必爲可積? 理由爲何?

6-5 試求下列各極限 :

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}=?$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{(k-1)\pi}{n}=?$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\Big(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\Big)=?$

6-6 設 $f\colon I=[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲可積, $g\colon I\to\mathbb{R}$ 不爲可積.

(a) 試問 $f+g$ 是否爲可積? 爲何?

(b) 試問 αg 是否爲可積? 爲何? 內 $\alpha\in\mathbb{R}$.

6-7 試求下列各積分：

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} |2x - x^2 - x^3|\, dx$;

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + x\sqrt{x}}\, dx.$

6-8 試證：若 $n > 1$, 則 $\dfrac{1}{2} < \displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^n}}\, dx < 2 - \sqrt{2}.$

微積分基本定理及變數代換

6-9 試求 $\dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \frac{\sin u}{u}\, du.$

6-10 設 g 爲一連續函數， c 爲一常數， 試證：

$$\frac{d}{dt} \int_{c-t}^{c+t} g(x)\, dx = g(c + t) + g(c - t).$$

6-11 試求下列各極限：

(a) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_p^{p+h} \sqrt{x^2 + 1}\, dx = ?$

(b) $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} t \int_t^1 \frac{\cos x}{x^2}\, dx = ?$

6-12 設函數 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 滿足 $\displaystyle\int_a^x f(t)\, dt = x^2 + 3x - 4.$

(a) 試求常數 a 及函數 f ;

(b) 試問 f 是否爲唯一? 理由爲何?

6-13 試求連續非零函數 f 且滿足 $f^2(x) = \displaystyle\int_0^x f(t) \frac{\sin t}{2 + \cos t}\, dt.$

6-14 設函數 f 於區間 $(0, +\infty)$ 上爲可微分, 且對任意正數 a 與 b 皆有等式 $f(ab) = f(a) + f(b)$. 試證：

(a) $\forall\, x > 0,\ f'(x) = \dfrac{f'(1)}{x}$;

(b) 存在常數 k 使得 $\forall\, x > 0,\ f(x) = k \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$;

(c) 若 $f'(1) = 1$, 則 $f = \ln$.

6-15 設 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(t) = \begin{cases} \exp(-t^2), & \text{若 } t \neq 1, \\ 0, & \text{若 } t = 1. \end{cases}$ $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\, dt$. 試求 F 之導函數.

6-16 試求不定積分：$\int \max\{1, x^2\}\, dx.$

6-17 設 $F(x) = \displaystyle\int_{\pi/2}^{x} (x-t)\cdot \sin t\, dt$. 試求 $F'(x) = ?$

6-18 設 $\forall\, x > 0,\ f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$. 試證：$f(x) + f\Big(\frac{1}{x}\Big) = \frac{(\ln x)^2}{2}.$

[提示] 第二項利用變數代換 $u = 1/t$.

6-19 設 $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ 爲連續滿足 $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx = 2$, 試證：存在 $c \in [0,2]$ 使得 $f(c) = c$.

瑕積分

6-20 試檢驗下列各瑕積分之斂散性：

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}};$ (d) $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{2x - x^{3/2}} dx;$

(b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}};$ (e) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{(x^2 - \sqrt{x})dx}{\sqrt{x^5+1}};$

(c) $\displaystyle\int_{1^+}^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^5-1}};$ (f) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + 3\cos x}.$

6-21 試證：瑕積分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx$ 爲收斂 .

[註] 此瑕積分在應用上十分重要, 第十一章重積分方法方能證明其值爲 $\sqrt{\pi}$.

6-22 試問：瑕積分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \exp(-x^2)\, dx$ 是否爲收斂? 若爲收斂, 試求其值.

6-23 試問：瑕積分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ 是否爲收斂?

6-24 試問哪些 p 值使瑕積分 $\displaystyle\int_{0^+}^{1} \frac{\sin x}{x^p}\, dx$ 爲收斂?

[提示] 上述瑕積分之被積函數與 $1/x^{p-1}$ 之比的極限爲 1, (當 $x \to 0^+$), 再利用定理 6.24.

Chapter 7

積分之應用

提起積分之應用, 許多人立即會想到它可以用來求面積. 的確, 積分之研究之初期, 是以面積爲主要對象, 但在積分理論逐漸成熟之後, 應用乃自然推展開來. 從積分之定義與性質中我們可以了解 : 凡是與"和與積之極限"有關的, 均可考慮以『積分』來解決. 本章中將討論常用的面積、體積、弧長、迴轉體之側面積、形心以及函數之平均值等, 其實在物理學、化學、工程數學以及數學領域中之機率論和統計學, 積分皆爲十分重要之工具.

§ 7.1 面積

定義 7.1

設 $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 爲可積, R 爲介於 f 與 g 之間之區域 (參閱圖 7–2 及圖 7–3), 即

$$R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ f(x) \le y \le g(x) \text{ or } g(x) \le y \le f(x)\}.$$

我們規定 R 之**面積** (area) 爲 $A(R) = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$

以下我們將分三步驟以說明上述規定之理由爲:

1° 設 $f\colon I = [a,b] \to \mathbb{R}_+$ 爲可積, R 爲介於 f 與 X 軸之間之區域, (參閱圖 7–1), 則

$$\begin{aligned} & L(f,P) \le A(R) \le U(f,P)\,, \quad \forall\, P,\ (\, I \text{ 之分割}\,) \\ \Rightarrow\ & \underline{\int_I} f \le A(R) \le \overline{\int_I} f \\ \Rightarrow\ & A(R) = \int_I f, \quad (\text{因 } f \text{ 爲可積}\,). \end{aligned}$$

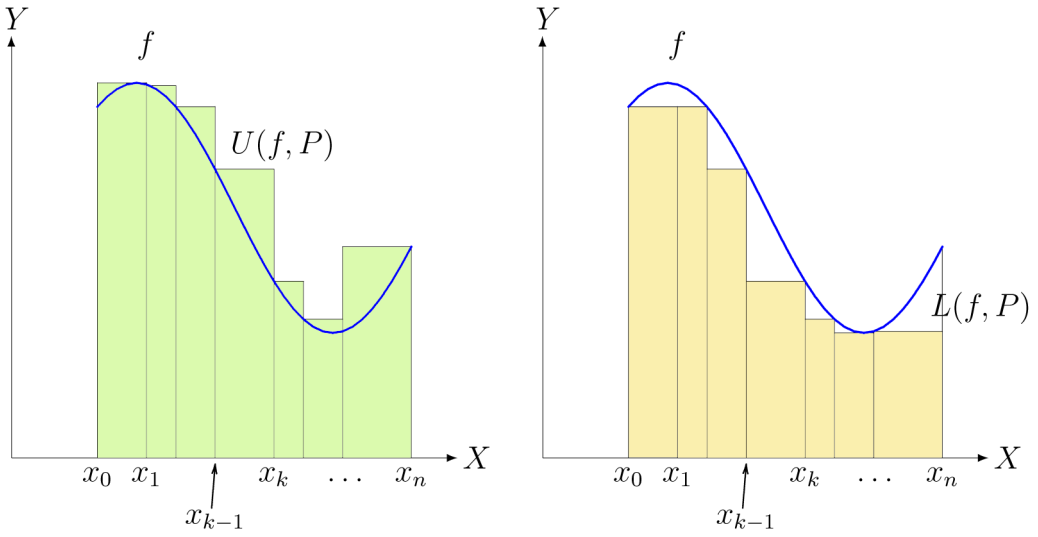


圖 7–1

2° 若 $0 \le f(x) \le g(x), \forall\, x \in [a,b]$, 則 f 與 g 所圍區域 R (圖 7–2 淺綠色部分) 之面積乃 g 與 X 軸所圍區域之面積減去 f 與 X 軸所圍區域之面積, 亦即

$$A(R) = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

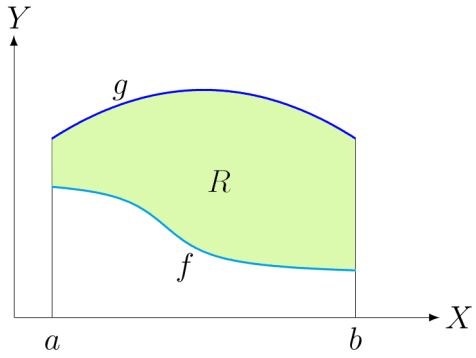


圖 7–2

若 $f \le g$, 但二函數未必爲非負, 因 f 爲有界, 故存在常數 C 使得 $0 \le f + C \le g + C$, 而 $f + C$, $g + C$ 二函數所圍區域僅係 f, g 二者所圍區域之平移, 故

$$A(R) = \int_a^b (g(x) + C)\,dx - \int_a^b (f(x) + C)\,dx = \int_a^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

3° 一般情形時, 函數 f, g 未必有 $f \le g$ 或 $g \le f$ 之情形, 但二函數所圍之區域 R 乃 $\max\{f,g\}$, $\min\{f,g\}$ 二函數所圍, (參閱圖 7–3 中淺綠色部分), 其次, 由於

$$\max\{f(x), g(x)\} - \min\{f(x), g(x)\} = |g(x) - f(x)|, \forall\, x \in [a,b],$$

並由 2° 之討論知,

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_a^b \big(\max\{f(x), g(x)\} - \min\{f(x), g(x)\}\big)\, dx \\ &= \int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx. \end{aligned}$$

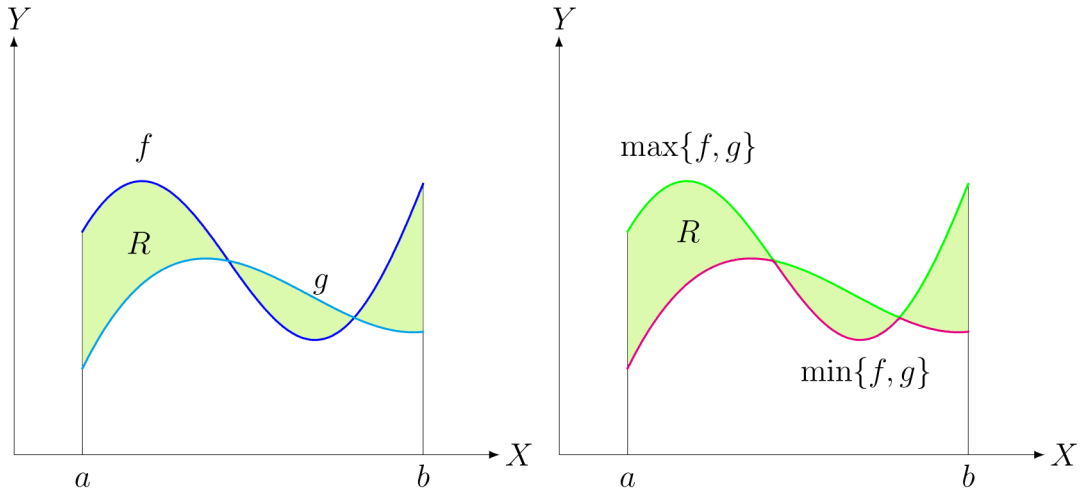


圖 7–3

註：或許有人會問, 若 f, g 皆爲可積, $\max\{f, g\}$ 是否爲可積? 由於

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|),$$

右端顯然爲一 Riemann 可積函數.

- **推廣**：收斂之瑕積分亦可視爲面積存在. 例如：
  $\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$ 爲收斂時, 規定 f 與 X 軸在區間 $[a, +\infty)$ 所圍之區域 R 之面積爲
  $A(R) = \int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx.$

- **記憶**：

$$A(R) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\underbrace{|f(t_j) - g(t_j)|}_{\text{高}} \underbrace{\Delta x_j}_{\text{底}}}_{\text{條面積}}}_{\text{條面積和之極限}} = \underbrace{\int_a^b \underbrace{\underbrace{|f(x) - g(x)|}_{\text{高}} \underbrace{dx}_{\text{底}}}_{\text{條面積}}}_{\text{條面積和之極限}}.$$

例 1. 試求介於 sin 與 cos 兩函數間自 $x=0$ 至 $x=\pi/2$ 所圍區域之面積.

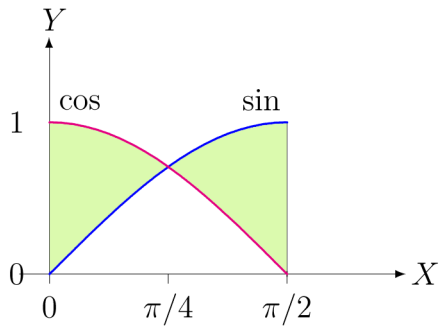


圖 7–4

【解】 1° 先求二曲線之交點.

$$\sin x=\cos x \;\Leftrightarrow\; \tan x=1 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{\pi}{4}.$$

2° 二函數所圍部分之面積爲

$$\begin{aligned}
A(R)&=\int_0^{\pi/2}|\sin x-\cos x|\,dx\\
&=\int_0^{\pi/4}|\sin x-\cos x|\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}|\sin x-\cos x|\,dx\\
&=\int_0^{\pi/4}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\pi/4}^{\pi/2}(\sin x-\cos x)\,dx\\
&=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\pi/4}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2}\\
&=2\sqrt{2}-2.
\end{aligned}$$

□

例 2. 試求在第一象限內且由二函數 $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{4x-x^4+1}}$ 與 $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^4+1}}$ 及 Y 軸所圍區域之面積.

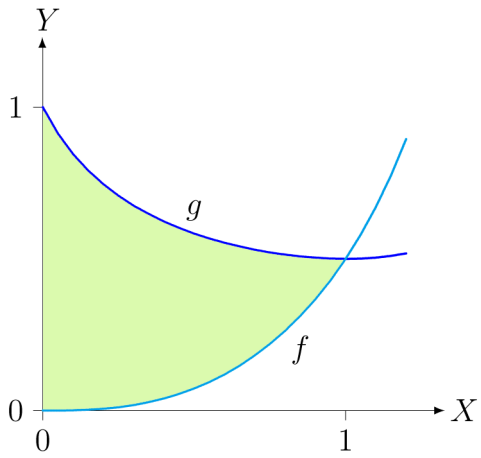


圖 7–5

【解】1° 先求二曲線之交點, 由

$$\frac{x^3}{\sqrt{4x-x^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{4x-x^4+1}} \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,$$

知二曲線之交點爲 $(1, 1/2)$ (參閱圖 7–5).

2° 當 $x \in [0,1]$ 時, 顯然 $f(x) \le g(x)$, 是以所求之面積爲

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 |g(x) - f(x)|\, dx \\ &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{4x-x^4+1}} - \frac{x^3}{\sqrt{4x-x^4+1}} \Big)\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^3}{\sqrt{4x-x^4+1}}\, dx = \frac{1}{4} \cdot 2(4x-x^4+1)^{1/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

例 3. 試求橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 所圍部分之面積, 內 a, b 皆爲正數.

【解】其上半橢圓乃函數 $f\colon [-a,\, a] \to \mathbb{R} : f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 故橢圓區域之面積爲

$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^a f(x)\, dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\, dx \\ &= \frac{4b}{a}\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2-(a\sin u)^2}\, a\cos u\, du, \\ &\qquad\qquad (\text{令 } x = a\sin u\,) \\ &= 4ab\int_0^{\pi/2} \cos^2 u\, du = 4ab\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2u + 1}{2}\, du \\ &= 4ab\Big[\frac{u}{2} + \frac{1}{4}\sin 2u\Big]_0^{\pi/2} = \pi ab. \end{aligned}$$

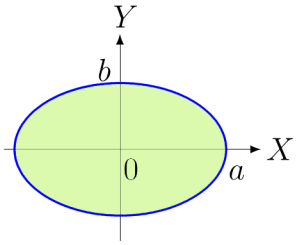


圖 7–6

□

註： 當 $a = b = r$ 時, 上述面積恰爲半徑爲 r 之圓面積.

有時我們面臨之曲線係由參數方程式

$$\begin{cases} x(t) = f(t), \\ y(t) = g(t), \end{cases} \qquad t \in [a,b],$$

所決定, 其中 f 爲連續可微且爲單調, g 爲可積, 亦即曲線乃爲向量函數 (f,g) 之值域, 則此曲線與 X 軸所圍區域 R 之面積爲

$$A(R) = \int_a^b |g(t)\, f'(t)|\, dt = \int_a^b |y(t)x'(t)|dt.$$

偶爾我們會寫爲 $A(R) = \int_a^b |y(t)\,dx(t)|$, 一眼即知是高乘以底之和的極限. 其中 $|dx(t)|$ 乃 $|x'(t)|\,dt$ 之意.

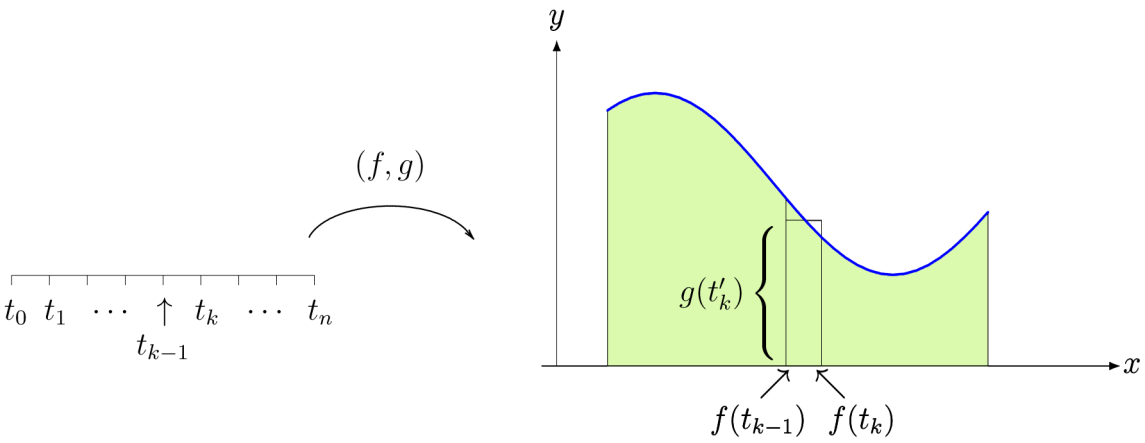


圖 7–7

理由是：設 $P_n = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ 爲區間 $[a,b]$ 之一正則分割, 則在子區間 $[t_{k-1}, t_k]$ 內取點 t'_k, 曲線所圍之細條部分的面積近似於 $|g(t'_k)\cdot(f(t_k)-f(t_{k-1})|$, 取其和再考慮其極限, 應有

$$\begin{aligned} A(R) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |g(t'_k)(f(t_k)-f(t_{k-1}))| \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |g(t'_k)f'(t''_k)\Delta t_k|, \quad (\text{微分均值定理}, \ t''_k \in (t_{k-1}, t_k)) \\ &= \int_a^b |g(t)f'(t)|\,dt, \quad (\text{Bliss 定理}) \\ &= \int_a^b |y(t)\,x'(t)|\,dt. \end{aligned}$$

例 4. 擺線(cycloid) 之參數方程式定義如下：

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin t, \\ y(t) = 1 - \cos t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

試求曲線與 X 軸所圍區域之面積爲何?

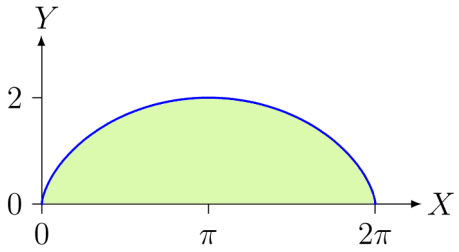


圖 7–8

【解】所求之面積爲

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} |y(t)\,dx(t)| = \int_0^{2\pi} |(1-\cos t)(1-\cos t)|\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)\,dt \\ &= t - 2\sin t + \frac{1}{4}(2t + \sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi. \end{aligned}$$

□

§ 7.2 體積

本節將考慮對一個在空間裡的立體 (solid) S, 如何界定其體積的問題. 由於目前我們所知道的定積分只限於單變數的函數而已, 所以, 現在所能討論的也只是些較爲有規則之立體的體積. 至於較爲一般的立體體積, 則有待第十一章介紹重積分之後, 始能討論. 爲使讀者易於進入境況, 我們先討論旋轉體之體積問題, 稍後再予以推廣.

定義 7.2 [**切片法 (slicing method)**]

設 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, S 表 f 之圖形繞 X 軸迴轉所得之立體, 若 f^2 在 $[a,b]$ 上爲可積, 則其**體積** (volume) 爲

$$V(S)=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

我們亦可仿照定義 7.1 之理由, 說明體積定義之由來, 此一工作留給讀者自行完成. 其次, 定義 7.2 中僅界定『繞 X 軸迴轉』所得之體積公式, 我們不難加以推廣而得『繞 Y 軸迴轉』、『繞直線 $y=2$ 迴轉』、『繞 $x=-1$ 迴轉』等之公式. 以下我們僅提供定義 7.2 體積公式之記憶, 提醒讀者這僅僅是方便記憶, 除非讀者已完全領會 Riemann 和數之極限與積分之關係, 否則對於理論架構之建立有不當之影響.

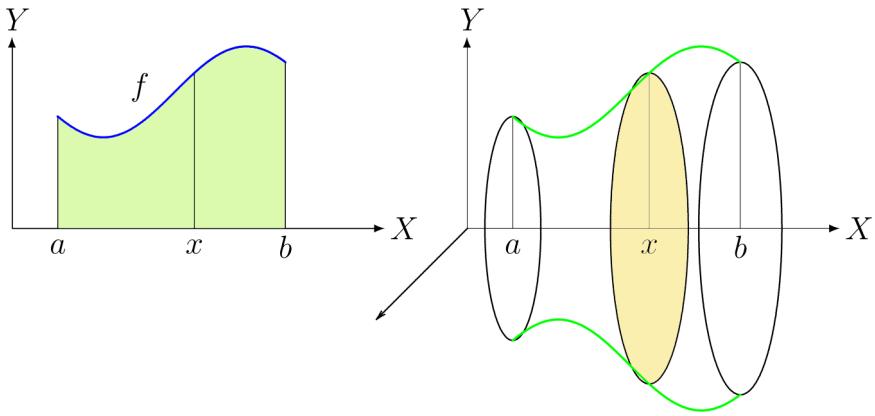


圖 7–9

- **記憶**:

$$V(S)=\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\underbrace{\pi f^2(t_j)}_{\text{圓片面積}}\cdot\underbrace{\Delta x_j}_{\text{厚}}}_{\text{圓片體積}}}_{\text{圓片體積和之極限}}=\underbrace{\int_a^b\underbrace{\underbrace{\pi f^2(x)}_{\text{圓片面積}}\cdot\underbrace{dx}_{\text{厚}}}_{\text{圓片體積}}}_{\text{圓片體積和之極限}}.$$

例 1. 試求半徑爲 r 之球體之體積.

【解】令 $f\colon [-r,r]\to\mathbb{R}\colon f(x)=\sqrt{r^2-x^2}$, 則

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi\int_{-r}^{r} f^2(x)\,dx \\ &= \pi\int_{-r}^{r}(r^2-x^2)\,dx \\ &= \pi\Big[r^2x-\frac{x^3}{3}\Big]_{-r}^{r} \\ &= \frac{4}{3}\pi r^3. \end{aligned}$$

□

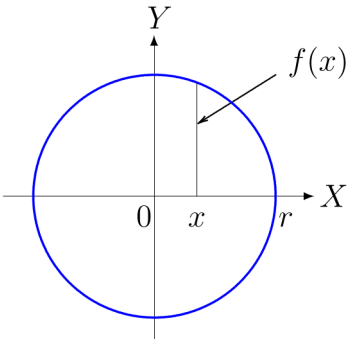


圖 7–10

例 2. 設立體 S 爲由 Y 軸, $y=1$, $y=8$ 和曲線 $y=x^3$ 所圍區域繞 Y 軸迴轉所得. 試以切片法求 S 之體積.

【解】以定義 7.2 之觀點, 本題必須先對調 x 與 y 之角色.

1° 先將 x 化爲 y 之函數：由於

$$y=x^3 \;\Leftrightarrow\; x=y^{1/3},$$

故得

$$g\colon [1,8]\to\mathbb{R}\colon g(y)=y^{1/3}.$$

2° 是以所求之體積爲

$$\begin{aligned} V(S) &= \pi\int_{1}^{8}(y^{1/3})^2\,dy \\ &= \pi\Big[\frac{3\,y^{5/3}}{5}\Big]_1^8 = \frac{93}{5}\pi. \end{aligned}$$

□

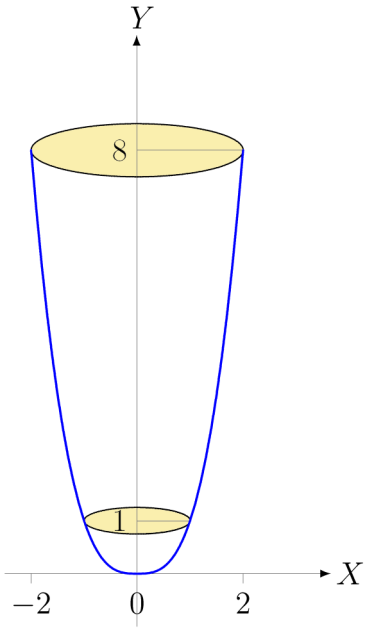


圖 7–11

定義 7.3 (推廣之切片法)

設 S 爲一立體, 次設

$$A\colon [a,b]\to\mathbb{R}\colon A(x)=\text{“垂直 } X \text{ 軸於點 } x \text{ 之平面與 } S \text{ 之截面面積”}.$$

其中 $[a,b]$ 爲 S 之x 範圍, 若 A 爲可積, 則 S 之**體積**爲

$$V(S)=\int_a^b A(x)\,dx.$$

(參見圖 7-12.)

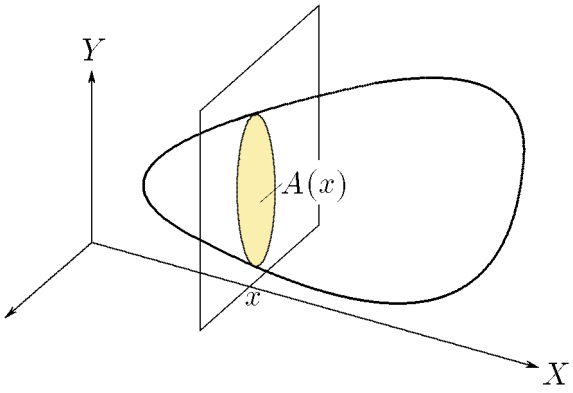


圖 7–12

關於體積之觀念, 我們將在第十一章中以二維 Riemann 積分予以界定, 此處只提供應用上之公式, 如果發生以上述定義與二維 Riemann 積分之定義所得之結果不相符合時, 仍以二維 Riemann 積分爲準, 但讀者亦不必太擔心, 因爲產生相異結果之情形乃屬數學上精心設計之反例而已.

例 3. 設某立體 S 之底爲由下列兩拋物線所圍成之區域:

$$y = x^2 \text{ 及 } y = 3 - 2x^2.$$

而垂直於 Y 軸且平行於 X 軸之橫截面爲正方形. 試求 S 之體積.

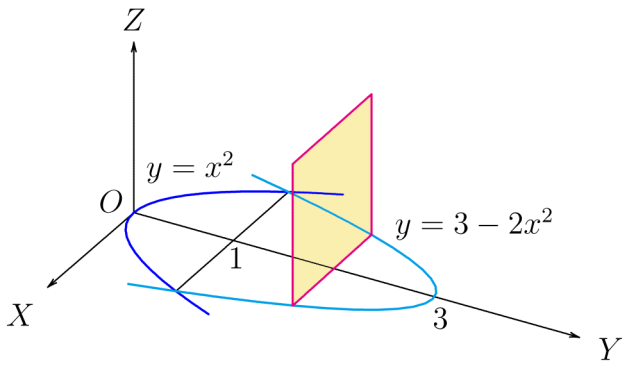


圖 7–13

【解】先求交點 :

$$x^2 = 3 - 2x^2 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; x \in \{-1, 1\},$$

故知二曲線之交點爲 $(-1, 1)$, $(1, 1)$. 是以體積爲

$$\begin{aligned} V(S) &= \int_0^1 (2\sqrt{y})^2\, dy + \int_1^3 \left[2 \cdot \left(\frac{3-y}{2}\right)^{1/2}\right]^2 dy \\ &= \left[4 \cdot \frac{y^2}{2}\right]_0^1 + \left[2(3y - \frac{y^2}{2})\right]_1^3 = 6. \end{aligned}$$

□

例 4. 試求由半徑爲 r 之二圓柱體垂直相交, 其共同部分之體積. †

【解】設一圓柱之軸爲 Y 軸, 另一圓柱之軸爲 Z 軸, 其相交部分之立體爲 S. 爲方便計先討論 S 在第一卦限部分, 設其爲 S_1 (如圖). 由於垂直 X 軸於點 x 與 S_1 之截面爲一邊長爲 $\sqrt{r^2-x^2}$ 之正方形 (圖中黃色部分). 故

$$\begin{aligned} A\colon [0,\, r] \to \mathbb{R} : A(x) &= \text{垂直於 } X \text{ 軸在點 } x \text{ 與 } S_1 \text{ 之截面積} \\ &= \left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2 = r^2 - x^2. \end{aligned}$$

故

$$V(S) = 8\,V(S_1) = 8\int_0^r (r^2-x^2)\,dx = \frac{16r^3}{3}.$$

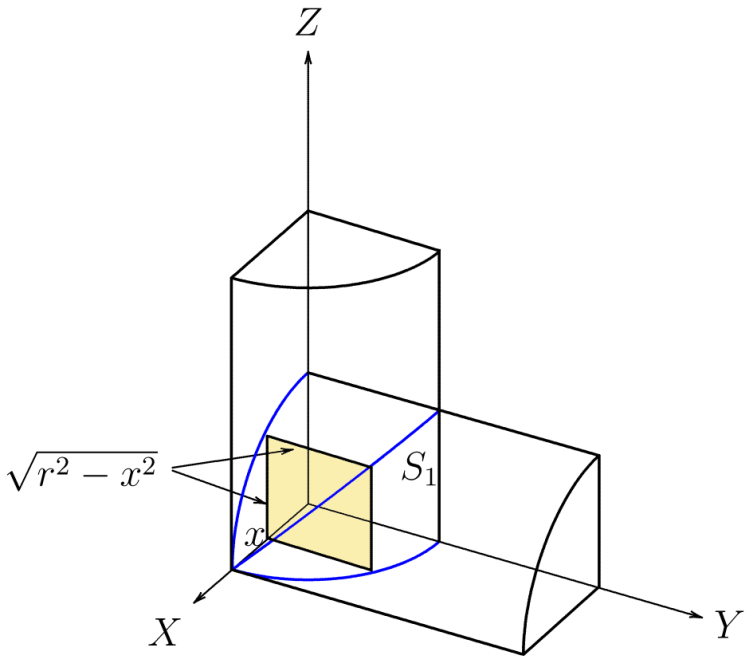


圖 7–14 □

定義 7.4 [**殼法(shell method)**]

設 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 爲可積, 其中 $0 \le a < b$ 或 $a < b \le 0$. S 表 f 與 X 軸所圍部分繞 Y 軸迴轉所得立體, 則其**體積**爲

$$V(S) = 2\pi \int_a^b |x\,f(x)|\,dx.$$

† 早在西元前二百多年, 解析幾何與微積分發明之前兩千年, Archimedes 就已經算出這共同部分之體積, 令人讚歎與由衷的敬佩.

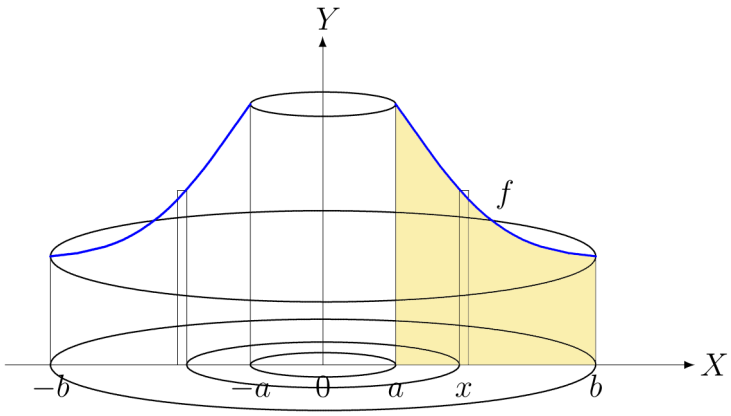


圖 7–15

爲便於討論, 設 $0 \le a < b,\ f > 0$, (參見圖 7–15). 若於區間 $[a,b]$ 上取一正則分割

$$P = \{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_n\},$$

則此一立體可視爲由 n 層『殼』(管狀) 所組成, (其中 n 甚大), 取 $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ 視其爲第 k 層殼之半徑, $f(t_k)$ 爲此殼之高, 則立體 S 之體積爲

$$V(S) = \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\underbrace{2\pi\, t_k\, f(t_k)}_{\text{一層殼面積}} \cdot \underbrace{\Delta x_k}_{\text{厚}}}_{\text{殼體積}}}_{\text{殼體積和之極限}} = \underbrace{\int_a^b \underbrace{\underbrace{2\pi\, x\, f(x)}_{\text{一層殼面積}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{厚}}}_{\text{殼體積}}}_{\text{殼體積和之極限}}.$$

(注意：上式右端僅僅是方便記憶而已.)

例 5. 從半徑爲 r 之球體, 挖去半徑 $r/2$ 而其中心軸穿過球心的圓柱孔, 試求所餘部分之體積.

【解】設 $f\colon [r/2,\, r] \to \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, 則原設立體 S 之體積乃爲 f 之圖形繞 Y 軸所成立體體積之二倍, 是以

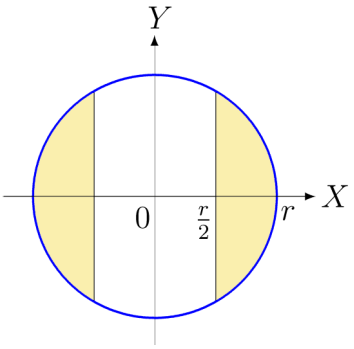


圖 7–16

$$\begin{aligned} V(S) &= 2\int_{r/2}^{r} 2\pi x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx \\ &= 2\pi \int_{r/2}^{r} (r^2 - x^2)^{1/2}(2x\, dx) \\ &= 2\pi\Big[-\frac{2}{3}(r^2 - x^2)^{3/2}\Big]_{r/2}^{r} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi r^3. \end{aligned}$$

□

例 6. 試利用殼法求由曲線 $y = x^2$ 與 $y = x + 2$ 所圍區域繞 $x = 3$ 旋轉所成之立體的體積.

【解】1° 先求二曲線之交點, 由

$$x^2 = x + 2 \;\Leftrightarrow\; x^2 - x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow\; (x-2)(x+1) = 0,$$

知二交點爲 $(2,4)$, $(-1,1)$.

2° 所求之體積爲

$$V = 2\pi \int_{-1}^{2} (3-x)(x+2-x^2)\,dx$$
$$= 2\pi \int_{-1}^{2} (x^3 - 4x^2 + x + 6)\,dx$$
$$= \frac{45\pi}{2}. \qquad \square$$

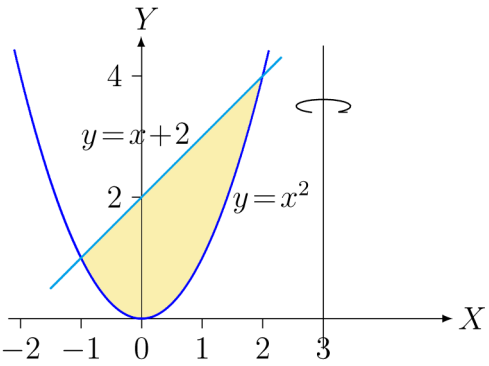


圖 7–17

與面積問題相似, 我們也可能面臨某立體係由參數方程式

$$\begin{cases} x(t) = f(t), \\ y(t) = g(t), \end{cases} \quad t \in [a,b],$$

旋轉而成, 依問題之需要我們可利用切片法或殼法解決之, 當然, 上述二函數需滿足：f 爲連續可微且爲單調, g 爲可積. 以下是一個範例.

例 7. 試求擺線(cycloid) $\begin{cases} x(t) = t - \sin t, \\ y(t) = 1 - \cos t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, 與 X 軸所圍區域繞 Y 軸迴轉所得立體之體積. (此立體之剖面如圖 7–18.)

【解】利用殼法：

$$V = 2\pi \int_0^{2\pi} |x(t)y(t)\,dx(t)|$$
$$= 2\pi \int_0^{2\pi} |(t-\sin t)(1-\cos t)(1-\cos t)|\,dt$$
$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-\cos t)(1-\cos t)\,dt$$
$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (t-\sin t)(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$
$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (t-2t\cos t + t\cos^2 t - \sin t - 2\sin t\cos t - \sin t\cos^2 t)\,dt$$
$$= 2\pi \left[\frac{t^2}{4} - \cos t - 2t\sin t + t\left(\frac{\sin t\cos t}{2} + \frac{t}{2}\right) - \frac{3\,\cos t^2}{4} + \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi}$$
$$= 6\pi^3.$$

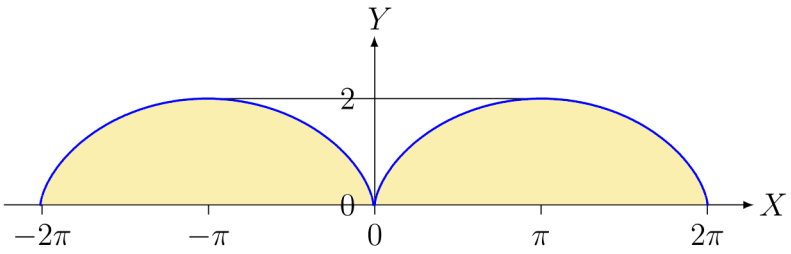


圖 7–18： 迴轉立體之剖面圖

§ 7.3 弧長

在國際性馬拉松比賽舉行之前, 比賽單位爲求嚴謹, 以可捲鋼尺丈量比賽道路之長度, 但對於一函數曲線而言, 此一方法並不可行, 理由之一是函數未必能十分精確地繪出, 其二是數學上所要求之精確並非人工所能達成, 它需要以理論方式加以解決, 對於函數 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, 令 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 爲 $[a,b]$ 上一正則分割, 則曲線 f 上可得 $n+1$ 點 $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $\cdots$, $P_n(x_n, y_n)$ 其中 $y_j = f(x_j)$, $\forall\, j = 0, 1, \cdots, n$, 如果我們依次連結各 P_j, 則得一多邊形如圖 7–19 右圖所示：此一多邊形之總長度與曲線長度當然不會完全相等, 不過, 如果曲線十分平滑 (條件另定), 當分割之數目 $n \to +\infty$ 時, 從直觀而言, 我們可接受此一極限值爲曲線之長度.

- $P_{k-1}P_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$,
- 多邊形長度 $= \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$,

是以當 f 爲可微且 $(f')^2$ 爲可積時,

$$
\begin{aligned}
\text{弧長 } L(s) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \Big(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\Big)^2}\, \Delta x_k \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \Big(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}\Big)^2}\, \Delta x_k \\
&= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(t_k))^2}\, \Delta x_k, \quad (\text{微分均值定理}) \\
&= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx\,, \quad (\because\ \sqrt{1 + (f'(x))^2} \text{ 爲可積.})
\end{aligned}
$$

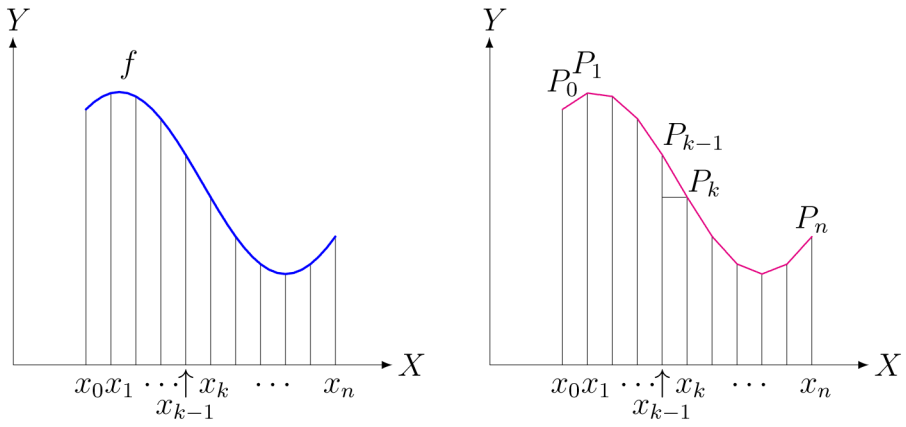


圖 7-19

定義 7.5

設 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 爲可微且 $(f')^2$ 爲可積, 則曲線 f 自點 $(a, f(a))$ 至 $(b, f(b))$ 之弧 s 之**弧長** (arc length) 爲

$$L(s) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

古典微積分中, 習慣上令 $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ ‡, 則弧長爲

$$L(s) = \int_{\cdot}^{\cdot} ds = \int_{\cdot}^{\cdot} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

例 1. 試求內擺線(hypocycloid) $y^{2/3} + x^{2/3} = a^{2/3}$ 之弧長.

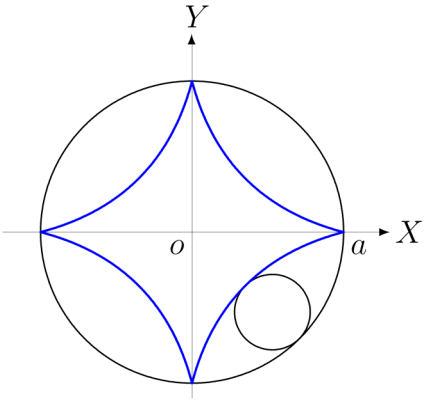


圖 7-20

‡ 換言之, 以 dx 代替 Δx, 以 dy 代替 Δy, 則 ds 代表一小段弧長, 這種講法十分方便, 在第二章結束前我們曾經討論過, "無限小" dx 等無法解釋清楚, 這裡只是*便於記憶和運算*而已, Leibniz 的微分符號 $\dfrac{dy}{dx}$ 及積分符號 $\displaystyle\int_a^b y\, dx$ 經過數百年後仍廣爲世人所愛用, 正因爲它實在太美妙了!

【解】由於

$$\begin{aligned} y^{2/3}+x^{2/3}=a^{2/3} &\Rightarrow \frac{2}{3}y^{-1/3}y'+\frac{2}{3}x^{-1/3}=0, \quad (\text{左右兩端分別對 } x \text{ 微分之}) \\ &\Rightarrow y'=-\Big(\frac{y}{x}\Big)^{1/3}, \quad \forall\, x\neq 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+\Big(\frac{y}{x}\Big)^{2/3}}, \quad \forall\, x\neq 0. \end{aligned}$$

是以所求之弧長爲

$$\begin{aligned} L(s) &= 4\int_{0^+}^{a}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = 4\int_{0^+}^{a}\sqrt{1+\Big(\frac{y}{x}\Big)^{2/3}}\,dx \\ &= 4\int_{0^+}^{a}\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx = 4\int_{0^+}^{a}\Big(\frac{a}{x}\Big)^{1/3}dx = 6a. \end{aligned}$$ □

註：有時曲線 s 係以參數方程式表示：$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t), \end{cases} t\in[a,b].$

若變數 t 之增量爲 dt, 則弧之增量爲

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}\,dt,$$

是以曲線之長度爲

$$L(s)=\int_a^b\sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}\,dt \qquad (*)$$

在第三章參數方程式一節中, 我們知道內擺線之參數方程式表示法爲

$$\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases} \quad t\in[0,2\pi],$$

代入公式 $(*)$ 中, 則弧長爲

$$\begin{aligned} L(s) &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\Big(\frac{dx}{dt}\Big)^2+\Big(\frac{dy}{dt}\Big)^2}\,dt \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{\Big(-3a\cos^2 t\sin t\Big)^2+\Big(3a\sin^2 t\cos t\Big)^2}\,dt \\ &= 4\int_0^{\pi/2}\sqrt{(3a)^2\sin^2 t\cos^2 t}\,dt \\ &= 12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos t\,dt \\ &= 6a\,\sin^2 t\Big|_0^{\pi/2}=6a. \end{aligned}$$

例 2. 試求參數方程式 $\begin{cases} x = \cos t + t\,\sin t, \\ y = \sin t - t\,\cos t, \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$, 之曲線之長度.

【解】由於

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t, \\ \dfrac{dy}{dt} = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t, \end{cases}$$

是以曲線長度爲

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

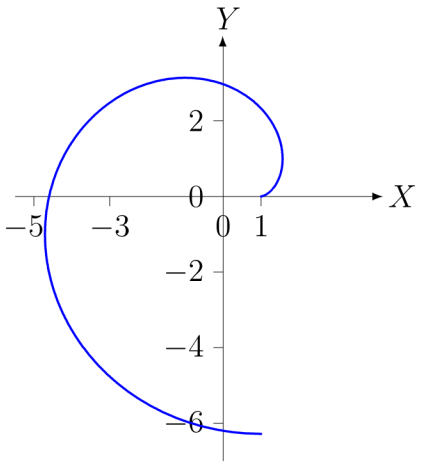


圖 7-21

§ 7.4 迴轉體表面積

本單元中我們需要一些預備知識：一正圓錐體若以二垂直於其軸之平面所截, 則其所圍部分稱爲一平截頭圓錐體 (frustum of a cone) (參閱圖 7–22A), 一迴轉曲面若依切片法之觀念分割爲 n 個部分, 每一部分近似於一平截頭圓錐體, 我們應先研究其側面積. 首先將其展開於一平面之上, 其乃二扇形之“差” (參閱圖 7–22B 黃色部分).

由於,

1° 以 r 爲半徑, 夾角等於 θ 之扇形, 顯然

$$\text{扇形面積} = \frac{\theta}{2\pi}\pi r^2 = \frac{r^2\theta}{2}.$$

2° 一半徑爲 r_2 之扇形區域, 減去半徑爲 r_1 $(< r_2)$ 之扇形區域, 如圖 7–22B, 則

$$\text{扇形差之面積} = \frac{r_2^2\theta}{2} - \frac{r_1^2\theta}{2} = \underbrace{\frac{r_1 + r_2}{2} \cdot \theta}_{\text{中弧長}} \cdot \underbrace{(r_2 - r_1)}_{\text{半徑差}},$$

所謂中弧長係指圖 7–22B 中紅色虛線之長度, 相等於未展開前, 圖 7–22A, 平截頭圓錐體之中間周長 (紅色虛線), 而半徑差則等於圖 7–22A 平截頭圓錐體之斜高, 是以知：

3° 平截頭圓錐體之側面積 = (中間周長)×(斜高).

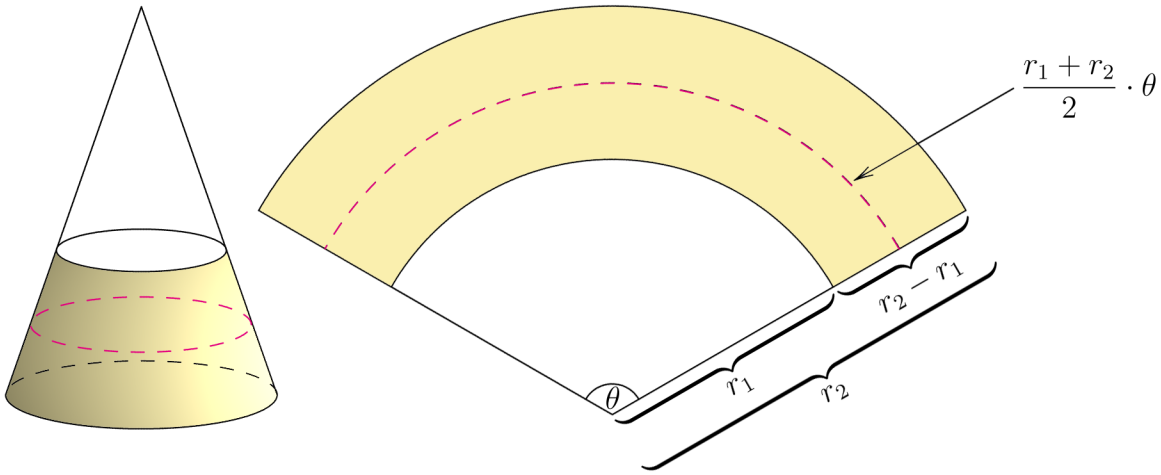


圖 7–22A 圖 7–22B

我們將利用此一概念推導出迴轉體表面積之公式.

定義 7.6

設 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 爲可微且 $(f')^2$ 爲可積, 則曲線 f 之圖形繞 X 軸所得曲面 $\mathcal{S}$ 之**表面積** (area of surface) 爲

$$A(\mathcal{S})=\int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$

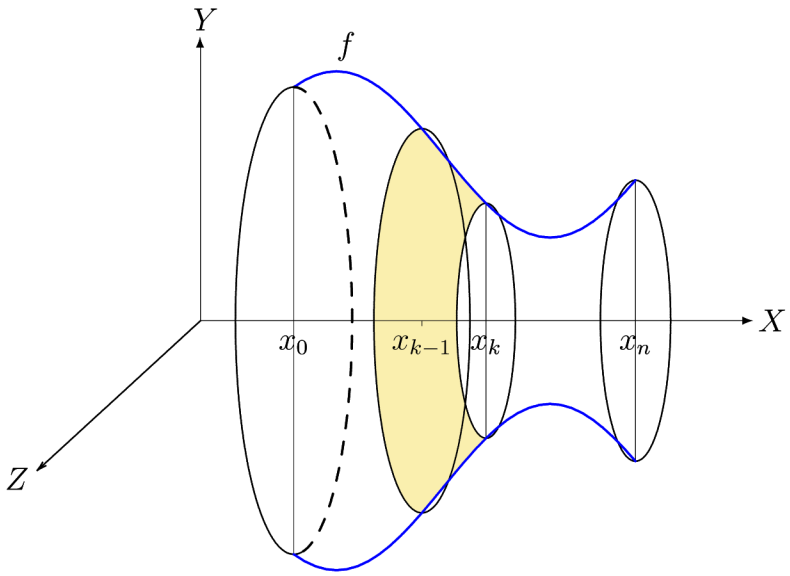


圖 7–23

上述規定之理由是：若分割爲 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ (參閱圖 7–23), 則

- 在第 k 個子區間之平截頭圓錐體的中間周長爲 $2\pi|f(t_k)|$, 內 $t_k=(x_k+x_{k-1})/2$, 而斜高爲對應之弦長 $\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}$, 故第 k 個子區間之平截頭圓錐體之側面面積爲

$$2\pi|f(t_k)|\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}.$$

- 上述諸平截頭圓錐體側面面積之和應爲

$$\sum_{k=1}^{n}2\pi|f(t_k)|\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2}.$$

是以, 迴轉曲面之面積爲

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{S}) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}2\pi|f(t_k)|\sqrt{(\Delta x_k)^2+(\Delta y_k)^2},\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}2\pi|f(t_k)|\sqrt{1+\Big(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\Big)^2}\,\Delta x_k\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}2\pi|f(t_k)|\sqrt{1+\Big(\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}\Big)^2}\,\Delta x_k\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}2\pi|f(t_k)|\sqrt{1+(f'(t_k'))^2}\,\Delta x_k, \quad [\star]\\
&= \int_a^b 2\pi|f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx, \quad (\text{利用 Bliss 定理.})
\end{aligned}$$

[⋆] 利用微分均值定理, $t_k'\in(x_{k-1},x_k)$, 注意：t_k 與 t_k' 未必相等.

例 1. (1) 試證：半徑爲 r 之球之表面積爲 $4\pi r^2$;

(2) 假設地球爲一球形, 試問北緯幾度以北之面積爲全球面積的 $1/4$.

【解】(1) 設

$$f\colon[0,r]\to\mathbb{R}\colon f(x)=\sqrt{r^2-x^2},$$

則 f 之圖形繞 X 軸旋轉形成半球形, 是以半徑爲 r 之球之表面積爲

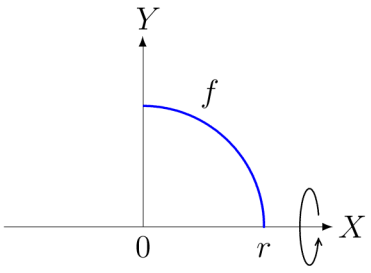


圖 7–24

$$\begin{aligned}
A(\mathcal{S}) &= 2\int_0^{r^-}2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx\\
&= 4\pi\int_0^{r^-}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx\\
&= 4\pi\int_0^{r^-}r\,dx = 4\pi r^2.
\end{aligned}$$

(2) 我們視地球表面爲由函數 $g(y)=\sqrt{r^2-y^2},\ -r\le y\le r$, 繞 Y 軸旋轉而成 (即右半圓繞 Y 軸旋轉).

設 $0<c<r$, 則自 c 至 r 部分之曲面面積爲

$$\begin{aligned} A(c) &= \int_c^{r^-} 2\pi g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2}\,dy \\ &= 2\pi\int_c^{r^-} \sqrt{r^2-y^2}\sqrt{1+\frac{y^2}{r^2-y^2}}\,dy \\ &= 2\pi\int_c^{r^-} r\,dy = 2\pi r(r-c). \end{aligned}$$

由原設得方程式

$$2\pi r(r-c)=A(c)=\frac{\text{(地球表面積)}}{4}=\pi r^2.$$

解之得 $c=\dfrac{r}{2}$. 由緯度之定義知

$$\sin\theta=\frac{c}{r}=\frac{1}{2},$$

是以 $\theta=30^\circ$, 亦即北緯 30° 以北之表面積占地球表面積的四分之一. □

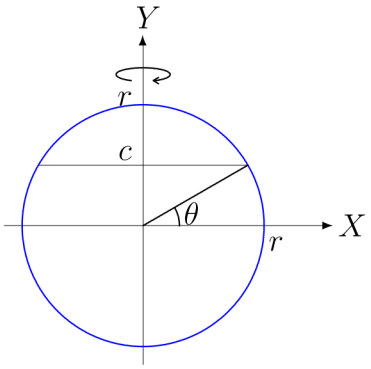


圖 7–25

§ 7.5 形心

以上四節, 我們已經界定了平面區域的面積、空間立體的體積、弧長及曲面面積等概念. 在此, 我們將爲平面區域、空間之立體、弧線段及曲面等界定其幾何中心, 亦即所謂形心的概念. 如果我們把物理學上的密度與重力加速度等因素考慮進去, 便可用以求取質量中心與重心.

• 平面區域之形心

首先我們考慮, 在平面上的一些質點 $P_1(x_1,y_1),\ P_2(x_2,y_2),\ \cdots,\ P_n(x_n,y_n)$, 假設它們分別帶有質量 $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_n$ 等, 這些質點對於 X 軸之矩應爲

$$M_x=m_1y_1+m_2y_2+\cdots+m_ny_n=\sum_{k=1}^{n}m_ky_k\ ;$$

而對於 Y 軸之矩應爲

$$M_y=m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n=\sum_{k=1}^{n}m_kx_k\ ;$$

在物理學上, 所謂 $P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_n$ 等 n 個質點的質量中心 $P(\bar{x},\bar{y})$, 乃是指具有質量 $m=\sum_{k=1}^{n} m_k$ 的質點, 其在質點 $P(\bar{x},\bar{y})$ 對於兩坐標軸之矩, 恰分別與上述二者相等者, 亦即

$$\begin{cases} m\,\bar{x} = M_y = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n, \\ m\,\bar{y} = M_x = m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n, \end{cases}$$

故

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m},\quad \bar{y} = \frac{M_x}{m}.$$

換句話說, 我們是把質點 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 等對兩坐標軸之矩分別視爲質點 P 對於兩坐標軸之矩.

根據以上的想法, 對於一質地均勻 (即密度爲常數 d) 之矩形區域 R, 我們自然應以其兩對角線的交點 $(\bar{x},\bar{y})$ 爲其質量中心, 亦即分別以 $m\bar{x} = d\cdot A(R)\cdot\bar{x}$ 與 $m\bar{y} = d\cdot A(R)\cdot\bar{y}$ 爲具有質量 $d\cdot A(R)$ 之點 $(\bar{x},\bar{y})$ 對 Y 軸與 X 軸之矩.

在數學上, 我們不考慮密度與質量等物理觀念, 但仍以矩形兩對角線的交點 $(\bar{x},\bar{y})$ 爲該矩形區域之幾何中心 (即形心), 並以 $A(R)\cdot\bar{x}$ 與 $A(R)\cdot\bar{y}$ 分別爲其對 Y 軸與 X 軸之矩, 利用此一觀念, 我們將界定更爲一般情形之平面區域的形心.

設函數 $f, g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 皆爲可積且 $f\le g$, 而 R 爲由 f 與 g 之圖形在區間 $[a,b]$ 所圍區間 $[a,b]$ 所圍區域 (如圖 7–26). 令

- $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 爲 $[a,b]$ 之一正則分割;
- $T=\{t_1,\cdots,t_n\}$, 其中 t_k 爲區間 $[x_{k-1},x_k]$ 之中點;
- $T'=\{t'_1,\cdots,t'_n\}$, 其中 t'_k 爲區間 $[x_{k-1},x_k]$ 內 之任意點.

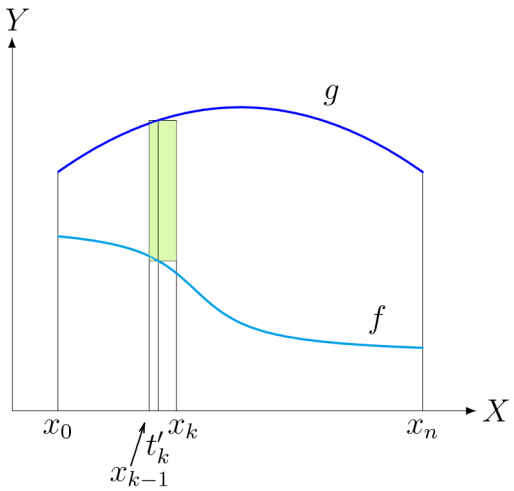


圖 7–26

由上段討論的結果知, 以 $g(t_k')-f(t_k')$ 爲長, Δx_k 爲寬之矩形, (圖中綠色部分), 當以

$$t_k(g(t_k')-f(t_k'))\Delta x_k$$

爲其對 Y 軸之矩, 而以

$$\frac{1}{2}(g(t_k')+f(t_k'))(g(t_k')-f(t_k'))\Delta x_k=\frac{1}{2}(g^2(t_k')-f^2(t_k'))\Delta x_k$$

爲其對 X 軸之矩. 於是上述諸矩 $(k=1,\cdots,n)$ 對 Y 軸與 X 軸之矩的和分別爲

$$\sum_{k=1}^{n}t_k(g(t_k')-f(t_k'))\Delta x_k \text{ 與 } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(g^2(t_k')-f^2(t_k'))\Delta x_k.$$

若 f 與 g 均爲可積之情形下, 利用定理 6.7 及 Bliss 定理知, 上述二者之極限 (當 $n\to+\infty$), 可以積分形式表現, 是以我們自然有下述定義 :

定義 7.7

設函數 $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ 皆爲可積, 又設 R 爲由 f 與 g 之圖形在區間 $[a,b]$ 所圍區域, 則

$$M_y=\int_a^b x|g(x)-f(x)|dx\,,$$

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b|g(x)-f(x)|(g(x)+f(x))dx$$

分別稱爲 R 對 Y 軸與對 X 軸之**矩** (moment of R with respect to Y-axis and X-axis, respectively). 而點 $(\bar{x},\bar{y})$ 則稱爲 R 之**形心** (centroid), (其中 $\bar{x}=M_y/A(R)$, $\bar{y}=M_x/A(R)$).

例 1. 試求由直線 $x=-1$, X 軸以及 $f(x)=4-x^2$ 之圖形所圍區域

$$R=\{(x,y)\mid -1\le x\le 2,\ 0\le y\le 4-x^2\}$$

之形心 $(\bar{x},\ \bar{y})$.

【解】R 之圖形如圖 7–27 所示. 按定義 7.7 應有

$$\begin{aligned}M_y&=\int_{-1}^{2}x(4-x^2)dx=\int_{-1}^{2}(4x-x^3)dx\\&=\Big[2x^2-\frac{x^4}{4}\Big]_{-1}^{2}=\frac{9}{4},\\M_x&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(4-x^2)^2\,dx\\&=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}(16-8x^2+x^4)\,dx\\&=\frac{1}{2}\Big[16x-\frac{8x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\Big]_{-1}^{2}=\frac{153}{10}.\end{aligned}$$

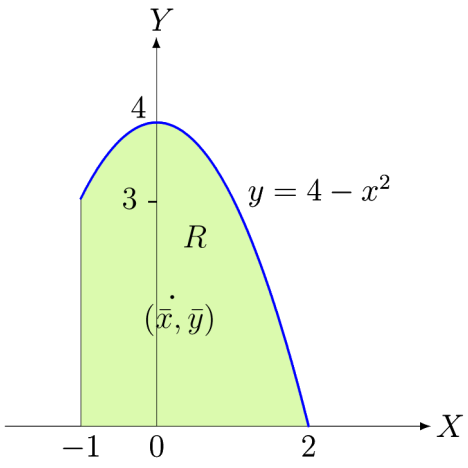


圖 7–27

而 $A(R)=\int_{-1}^{2}(4-x^2)dx=9$. 故 $\bar{x}=\dfrac{M_y}{A(R)}=\dfrac{1}{4}$; $\bar{y}=\dfrac{M_x}{A(R)}=\dfrac{17}{10}$. 即 $\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{17}{10}\right)$ 爲 R 之形心. □

- **旋轉立體之形心**

對於半徑爲 r, 厚度爲 $b-a$ 的立體圓片 S (如圖 7–28 所示). 我們以

$$C\Big(\frac{a+b}{2},0,0\Big)$$

爲 S 之形心 (實即線段 $\overline{AB}$ 之中點), 並以

$$\pi r^2(b-a)\cdot\frac{(a+b)}{2}=\pi r^2\frac{b^2-a^2}{2}$$

爲 S 對 YZ 平面之矩 (表爲 M_{yz}), 而 S 對 XZ 與 XY 平面之矩 (分別表爲 M_{xz} 與 M_{xy}) 均爲 0.

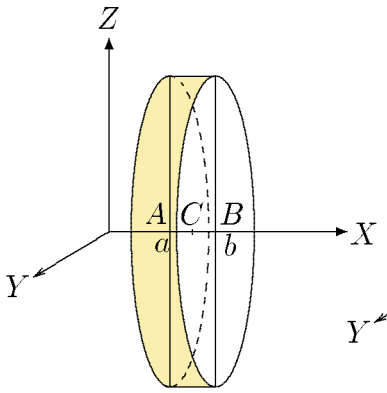


圖 7–28

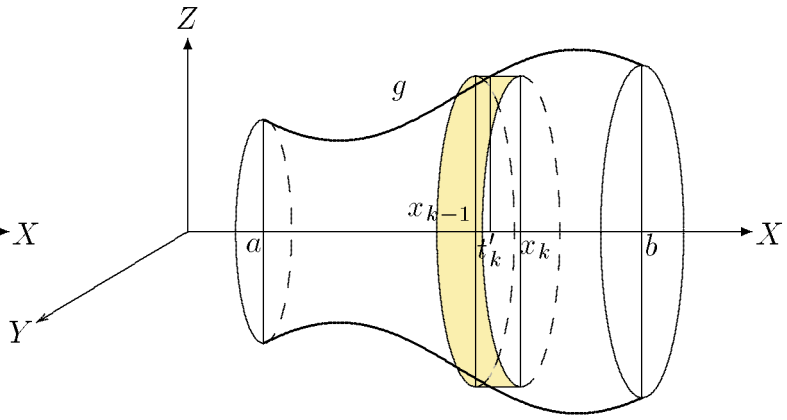


圖 7–29

設 S 爲由函數 g 之圖形與 X 軸在區間 $[a,b]$ 所圍區域繞 X 軸迴轉所得之立體 (如圖 7–29 所示), 其次, 考慮

- $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$: $[a,b]$ 之正則分割;
- $T=\{t_1,t_2\cdots,t_n\}$, 內 t_k 爲區間 $[x_{k-1},x_k]$ 之中點;
- $T'=\{t'_1,\cdots t'_n\}$, 內 t'_k 爲區間 $[x_{k-1},x_k]$ 內之任意點.

於是以 $g(t'_k)$ 爲半徑, Δx_k 爲厚度之圓片對於 YZ 平面之矩應爲 $\pi g^2(t'_k)\cdot t_k\Delta x_k$, 而對 XZ 與 XY 平面之矩都爲 0, 於是上述諸圓片 $(k=1,\cdots n)$ 對 YZ 平面之矩的和爲 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\pi t_k g^2(t'_k)\Delta x_k$.

由 Bliss 定理得知, 若 g 爲可積, 我們自然會以 $\pi\displaystyle\int_a^b xg^2(x)\,dx$ 爲由 g 之圖形與 X 軸在區間 $[a,b]$ 所圍區域, 繞 X 軸迴轉所得立體 S 對 YZ 平面之矩 M_{yz}, 並以點 $(\bar{x},0,0)$, (內 $\bar{x}=M_{yz}/V(S)$), 爲 S 之形心.

如果進一步的考慮更一般之情形：設 f 與 g 均爲非負, 而 S 爲函數 f 與 g 之圖形在區間 $[a,b]$ 所圍區域繞 X 軸迴轉所得之立體, 其對 YZ 平面之矩應爲

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\pi t_k|g^2(t_k')-f^2(t_k')|\Delta x_k.$$

於是我們自然會有如下之定義：

定義 7.8

設二函數 $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{R}_+$ 皆爲可積, 則稱

$$M_{yz}=\pi\int_a^b x|g^2(x)-f^2(x)|\,dx$$

爲由 g 與 f 之圖形在區間 $[a,b]$ 所圍區域, 繞 X 軸迴轉所得立體 S 對 YZ 平面之矩, 並以點 $(\bar{x},0,0)$, (內 $\bar{x}=M_{yz}/V(S)$), 爲 S 之**形心**.

例 2. 試求由四分之一圓 $y=\sqrt{r^2-x^2}$, $(\,x\in[0,r]\,)$, 及 X 與 Y 兩軸所圍區域繞 X 軸迴轉所得之半球體 S 的形心.

【解】由定義 7.8 知

$$\begin{aligned}M_{yz}&=\pi\int_0^r x\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2dx\\&=\pi\int_0^r x(r^2-x^2)\,dx\\&=\pi\left(\frac{r^4}{2}-\frac{r^4}{4}\right)\\&=\frac{1}{4}\pi r^4.\end{aligned}$$

又半球之體積 $V(S)$ 爲 $2\pi r^3/3$, 故

$$\bar{x}=\frac{\frac{1}{4}\pi r^4}{\frac{2}{3}\pi r^3}=\frac{3r}{8},$$

即 S 之形心爲 $\left(\frac{3r}{8},0,0\right)$.

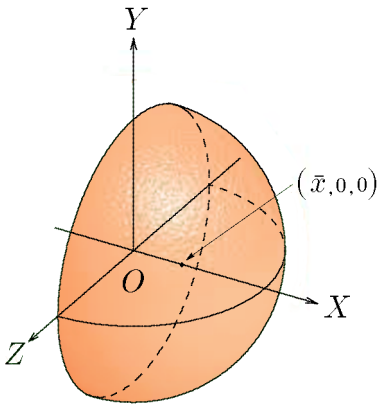


圖 7–30

- **曲線與旋轉曲面之形心**

對以上定義 7.7 及 7.8 我們在事先都作了直觀的引導, 使讀者知其來歷而不致有憑空妄下定義之感, 對於下面 7.9 及 7.10 二定義我們照樣可以先作直觀的引導, 但限於篇幅在此不再重覆, 希望讀者能自行練習, 給予詳盡的說明.

定義 7.9

設函數 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 爲可微分且 $(f')^2$ 爲可積, 則分別稱

$$M_y=\int_a^b x\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx,\quad M_x=\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

爲自 $(a,f(x))$ 至 $(b,f(b))$ 的弧 s 對 Y 軸及 X 軸之矩, 而點 $(\bar{x},\bar{y})$, (內 $\bar{x}=M_y/L(s),\bar{y}=M_x/L(s)$), 稱爲弧 s 之**形心** (centroid of arc s).

例 3. 試求半徑爲 r 之半圓弧 s 的形心.

【解】爲方便計, 置此半圓之圓心於坐標原點, 其函數爲

$$f\colon [-r,r]\to\mathbb{R}:f(x)=\sqrt{r^2-x^2},$$

依定義 7.9 應有

$$M_y=\int_{-r^+}^{r^-} x\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_{-r^+}^{r^-}\frac{rx}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx=0,$$

$$M_x=\int_{-r^+}^{r^-}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=2r^2,$$

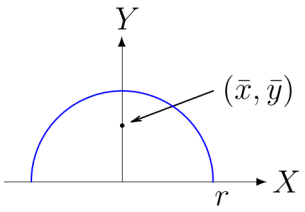


圖 7–31

而 $L(s)=\pi r$, 故

$$\bar{x}=\frac{M_y}{L(s)}=0,\quad \bar{y}=\frac{M_x}{L(s)}=\frac{2r}{\pi}.$$

即 $(0,2r/\pi)$ 爲 s 之形心.

例 4. 求 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ 之圖形在第一象限內之弧 s 的形心.

【解】s 之圖如 7–32 藍色部分所示. 依照定義 7.9 應有

$$\begin{aligned}M_y&=\int_{0+}^{a} x\sqrt{1+(y')^2}\,dx\\&=\int_{0+}^{a} x\sqrt{1+(\frac{y}{x})^{2/3}}\,dx\\&=\int_{0+}^{a} x(\frac{a}{x})^{1/3}\,dx\\&=a^{1/3}\int_{0+}^{a} x^{2/3}\,dx\\&=\frac{3}{5}a^2;\end{aligned}$$

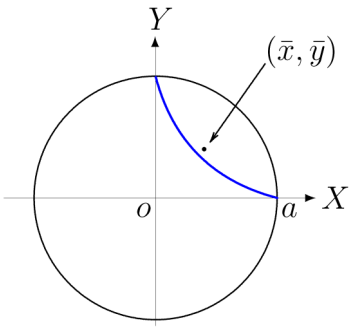


圖 7–32

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{0^+}^{a} (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2} \cdot (\frac{a}{x})^{1/3}\, dx \\ &= -\frac{3}{2} \int_{0^+}^{a} a^{1/3} (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}\, d(a^{2/3} - x^{2/3}) \\ &= \frac{3}{5} a^2. \end{aligned}$$

由第三節例 1 知, $L(s) = \dfrac{3a}{2}$. 故

$$\bar{x} = \frac{M_y}{L(s)} = \frac{2a}{5}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{L(s)} = \frac{2a}{5}.$$

即 s 之形心爲 $\left(\dfrac{2a}{5}, \dfrac{2a}{5}\right)$. □

定義 7.10

設函數 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 爲可微分, 且函數 $(f')^2$ 爲可積. 並設 $\mathcal{S}$ 爲由 f 之圖形繞 X 軸迴轉所得之曲面, 則 $\mathcal{S}$ 對 yz 平面之矩爲

$$M_{yz} = 2\pi \int_a^b x|f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

而點 $(\bar{x}, 0, 0)$, (內 $\bar{x} = M_{yz}/A(\mathcal{S})$, $A(\mathcal{S})$ 爲迴轉曲面 $\mathcal{S}$ 之面積), 稱爲 $\mathcal{S}$ 之**形心**.

例 5. 試求半徑爲 r 之半球面的形心.

【解】視 $\mathcal{S}$ 爲由四分之一圓 $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, ($x \in [0, r]$), 繞 X 軸迴轉所得之曲面, 則

$$M_{yz} = 2\pi \int_0^{r^-} x\sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_0^{r^-} rx\, dx = \pi r^3,$$

$$A(\mathcal{S}) = 2\pi \int_0^{r^-} \sqrt{r^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_0^{r^-} r\, dx = 2\pi r^2.$$

故 $\bar{x} = \dfrac{M_{yz}}{A(\mathcal{S})} = \dfrac{r}{2}$, 即 $\left(\dfrac{r}{2}, 0, 0\right)$ 爲之半球面的形心. □

例 6. 試求底爲以 r 爲半徑之圓, 而高爲 h 之正圓錐側面 $\mathcal{S}$ 的形心.

【解】我們可視此正圓錐側面爲由直線 $y = \dfrac{rx}{h}$, (其中 $x \in [0, h]$), 繞 X 軸迴轉所得. 由定義 7.10 應有

$$M_{yz} = 2\pi \int_0^h x \cdot \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\, dx$$
$$= 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \int_0^h x^2\, dx$$
$$= 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \cdot \frac{h^3}{3},$$

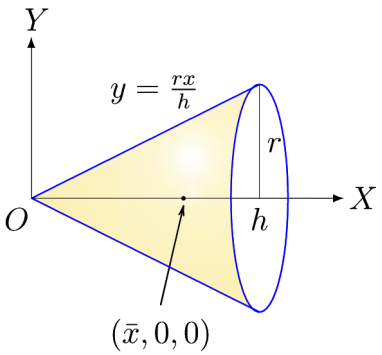


圖 7–33

而 $\mathcal{S}$ 之面積爲

$$A(\mathcal{S}) = 2\pi \int_0^h \frac{r}{h} x \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2}\, dx$$
$$= 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \int_0^h x\, dx$$
$$= 2\pi \frac{r}{h} \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} \cdot \frac{h^2}{2},$$

故 $\bar{x} = \dfrac{M_{yz}}{A(\mathcal{S})} = \dfrac{2h}{3}$, 即 $\left(\dfrac{2h}{3}, 0, 0\right)$ 爲其形心. □

註： 本節所討論的形心, 純係幾何上的概念. 但這個概念, 在物理學上卻有極重要的應用. 只要我們把本節之 7.7, 7.8, 7.9 及 7.10 諸定義中, 所有積分式之被積分函數乘以密度 (density) 函數, 則我們所界定之形心, 即爲質量中心 (center of mass). 當然, 若有均勻之密度 (即密度函數爲常數) 時, 則形心即爲質量中心, 但當密度各處有所不同 (即密度函數不爲常數) 時, 則形心與質量中心或有不同.

例 7. 如例 2 所述之半球體 S. 若其體內各點 p 之密度與 p 至其底面之距離成正比, 求此半球體 S 之質量中心.

【解】依題意知此半球體之密度函數爲 $\rho\colon [0, r] \to \mathbb{R} : \rho(x) = kx$, 內 k 爲一常數. 故

$$\tilde{M}_{yz} = \pi \int_0^r x\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \cdot kx\, dx = \pi k \int_0^r x^2(r^2 - x^2)\, dx$$
$$= \pi k \left[\frac{r^2 x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_0^r = \frac{2}{15}\pi k r^5$$
$$\tilde{V}(S) = \pi \int_0^r \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 \cdot kx\, dx = \pi k \int_0^r (r^2 - x^2) x\, dx$$
$$= \pi k \left[\frac{r^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^r = \frac{1}{4}\pi k r^4.$$

故得

$$\bar{x} = \frac{\tilde{M}_{yz}}{\tilde{V}(S)} = \frac{\frac{2}{15}\pi k r^5}{\frac{1}{4}\pi k r^4} = \frac{8}{15} r.$$

亦即 S 之質量中心爲 $\left(\dfrac{8r}{15}, 0, 0\right)$. □

- **形心之應用**

在微積分中,『形心』有一項十分重要之應用, 它可用以解決某些旋轉體體積問題, 尤其是旋轉軸不與 X 軸或 Y 軸平行之情形.

定理 7.11 **(Pappus 定理 I)**

設

(i) L 爲 XY 平面上一直線 ;

(ii) R 爲一平面區域, 其面積爲 $A(R)$, 形心爲 $(\bar{x},\bar{y})$;

(iii) R 在 L 之一側 (即 L 不貫穿 R) .

則 R 旋轉 L 所得之立體 S 之體積爲

$$V(S) = A(R)\cdot 2\pi d,$$

其中 d 爲 $(\bar{x},\bar{y})$ 至 L 之距離.

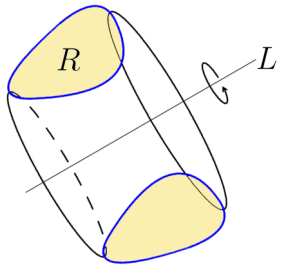


圖 7–34

【證】我們若能證明 : L 爲 X 軸之情形, 則一般情形只需利用轉軸方法即可解決. 爲方便計, 令 $f,\, g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 皆爲可積且 $0\le f\le g$, (參閱圖 7–35),

$$R=\{(x,y)\mid a\le x\le b, f(x)\le y\le g(x)\}.$$

利用切片法,

$$V(S)=\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx. \qquad ①$$

其次, 由定義 7.7, 知

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\frac{1}{2}\int_a^b |g(x)-f(x)|(g(x)+f(x))dx}{A(R)}\\ &= \frac{1}{2\pi A(R)}\cdot\pi\int_a^b (g^2(x)-f^2(x))dx\\ &= \frac{1}{2\pi A(R)}\cdot V(S),\quad (\text{由 ① 式})\end{aligned}$$

是以 $V(S)=A(R)\cdot 2\pi\bar{y}$, 其中 $\bar{y}$ 爲形心至旋轉軸之距離.

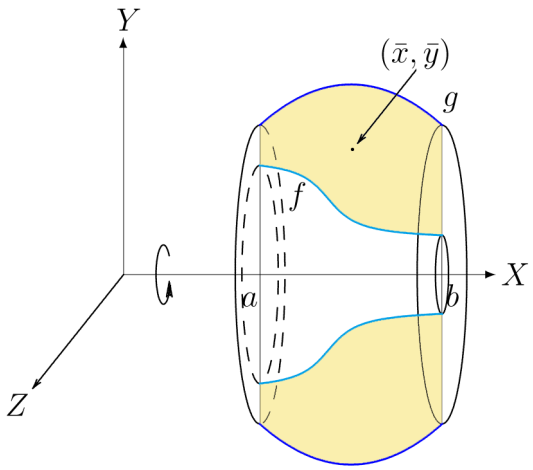


圖 7–35 □

例 8. 試求平面區域 $R=\{(x,y)\mid x\in[0,1],\ x^3\le y\le x\}$ 繞 $y=x$ 旋轉所得立體之體積.

【解】1° 先求 R 之形心：

$$M_y=\int_0^1 x(x-x^3)dx=\frac{2}{15},$$
$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^1 (x^2-x^6)\,dx=\frac{2}{21}.$$

而 $A(R)=\displaystyle\int_0^1 (x-x^3)dx=\frac{1}{4}$. 故

$$\bar{x}=\frac{M_y}{A(R)}=\frac{8}{15};\quad \bar{y}=\frac{M_x}{A(R)}=\frac{8}{21}.$$

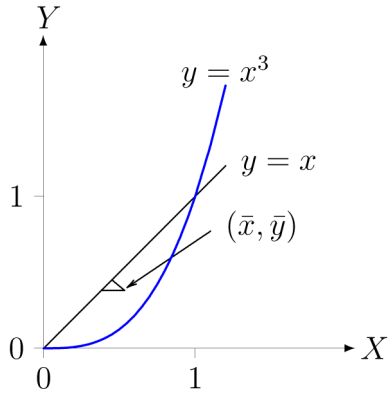


圖 7–36

2° 次求形心與直線 $y=x$ 之距離, 利用等腰直角三角形 (如圖) 觀念知形心與直線之距離爲

$$d=(\bar{x}-\bar{y})\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{8\sqrt{2}}{105}.$$

[**註**] 另一個方法是利用公式, 我們知道, 點 (x_0,y_0) 與直線 $ax+by+c=0$ 之距離爲 $d=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 在此, $a=1,\ b=-1,\ c=0$, 故

$$d=\frac{|\bar{x}-\bar{y}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{8}{15}-\frac{8}{21}}{\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{2}}{105}.$$

3° 由 Pappus 定理 I 得,

$$V(S)=A(R)\cdot 2\pi d=\frac{1}{4}\cdot 2\pi\cdot\frac{8\sqrt{2}}{105}=\frac{4\sqrt{2}\pi}{105}.$$ □

定理 7.12 （**Pappus 定理 II**）

設

(i) L 爲 XY 平面上一直線；

(ii) s 爲一平面曲線, 其弧長爲 $L(s)$, 形心爲 $(\bar{x}, \bar{y})$；

(iii) s 在 L 之一側.

則曲線 s 之圖形繞 L 所得曲面 $\mathcal{S}$ 之表面積爲

$$A(\mathcal{S}) = L(s) \cdot 2\pi d,$$

其中 d 爲 $(\bar{x}, \bar{y})$ 至 L 之距離.

【證】仿 Pappus 定理 I, 讀者自證之. □

例 9. 將圓 $(x-1)^2 + y^2 = r^2$, $(0 < r < 1)$ 所圍內部區域, 繞 Y 軸旋轉一周, 形成一環狀立體, (稱爲一環體 (torus) 其形如輪胎). 試求此立體的體積及表面積.

【解】由於圓區域及圓周之形心皆爲該圓之圓心, 而圓面積及圓周長分別爲 πr^2, $2\pi r$, 利用 Pappus 定理 I 及 II, 知環體的體積及表面積分別爲

$$\begin{cases} V = 2\pi \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2, \\ A = 2\pi \cdot 2\pi r = 4\pi^2 r. \end{cases}$$

(註：本題亦可不利用 Pappus 定理, 但計算稍爲麻煩些.) □

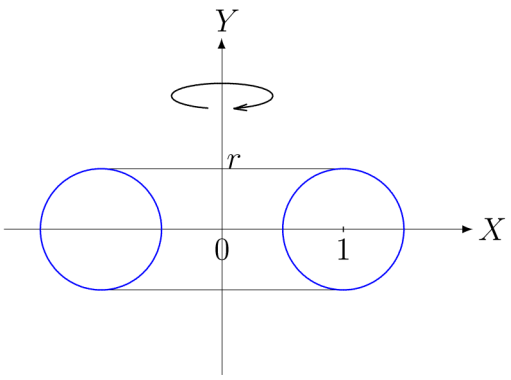


圖 7–37

§ 7.6 函數之平均值

本節之目的在運用積分的概念, 將人盡皆知的平均值觀念作一合理的推廣, 當然這也算是積分的一種應用.

我們平常所謂有限個數之算數平均值 (arithmetic mean), 乃是指 n 個數 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 之和的 n 分之一, 即

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

但對於無限多個數的平均值, 又該如何去界定呢? 尤其, 當 f 爲一函數且 D_f 包含 $[a, b]$ 時, 集合 $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ 通常是無限的. 我們現在考慮應如何去界定這些函數值的平均值, 才是最自然而合理.

定義 7.13

設 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 爲可積, 則 f 之**平均值** (mean value) 爲

$$M=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

上述規定之理由是：

1° 我們知道有限集合 $\{a_1,\cdots,a_n\}(\subset\mathbb{R})$ 之 (算術) 平均 (arithmetic mean) 爲

$$A=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j.$$

2° 對於序列 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$, 我們可規定其平均爲

$$A=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}a_j,\ (\text{若其存在}).$$

3° 對於函數 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$, 我們先取如下之正則分割

$$P_n=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\},$$

並於每一子區間 $[x_{k-1},x_k]$ 上取其中點 $t_k=(x_k+x_{k-1})/2,\ \forall\,k=1,\cdots,n$, 則這些點之函數值的平均爲

$$\begin{aligned}A(n)&=\{f(t_1),\cdots,f(t_n)\}\text{ 之平均}\\&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(t_k)=\frac{1}{b-a}\sum_{j=1}^{n}f(t_k)\Delta x_k.\end{aligned}$$

利用 2° 之觀念, 可規定：

$$\begin{aligned}f\text{ 之平均值}&=\lim_{n\to+\infty}A(n)\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b-a}\sum_{j=1}^{n}f(t_k)\Delta x_k\\&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

註：幾何意義：若 $f>0$, 則 f 之平均值乃爲正數 M 使得

$$\underbrace{M(b-a)}_{\text{矩形面積}}=\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{f\text{ 下之面積}}$$

(參見圖 7–38).

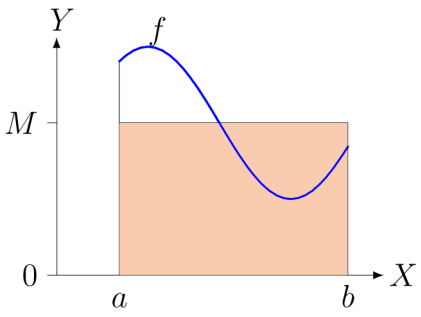


圖 7–38

例 1. 設 a 與 b 爲二正實數, 試求函數 $f:[-a,a]\to\mathbb{R}:f(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 之平均值.

【解】所求之平均值爲

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{a-(-a)}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \\ &= \frac{b}{2a^2}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx \\ &= \frac{b}{2a^2}\cdot\frac{\pi a^2}{2}, \quad [\star] \\ &= \frac{\pi b}{4}. \end{aligned}$$

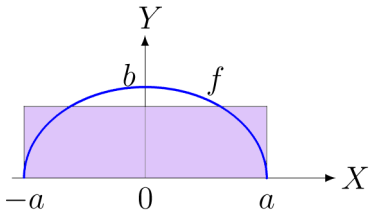


圖 7–39

[⋆] 參見第一節例 2. □

例 2. 設 S 乃圓心在原點且半徑等於 r 之球體,

$$A\colon[-r,r]\to\mathbb{R}:A(x)=\text{“ 垂直 } X \text{ 軸於點 } x \text{ 之平面與 } S \text{ 之截面面積 ”}.$$

試求在區間 $[0,r]$ 上, 截面積 $A(x)$ 之平均值.

【解】由於 $A(x)=\pi\left(\sqrt{r^2-x^2}\right)^2=\pi(r^2-x^2)$, 故所求之截面積之平均值爲

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{r}\int_0^r A(x)\,dx = \frac{1}{r}\int_0^r \pi(r^2-x^2)\,dx \\ &= \frac{\pi}{r}\left[r^2x-\frac{x^3}{3}\right]_0^r = \frac{2}{3}\pi r^2. \end{aligned}$$

§ 7.7 近似積分法

在上一章中, 我們曾探討過如何求出一 Riemann 積分或瑕積分之值之方法.

法一： 利用 第二型微積分基本定理, 若能求出被積函數 f 之不定積分

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C,$$

則

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a).$$

法二： 利用 變數代換法, 例如：第六章第五節之例 4,

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^k x}{\sin^k x+\cos^k x}\,dx, \text{ 內 } k \text{ 爲一正實數}.$$

法三： 利用 積分之定義或定理, 如第六章第三節之例 1, $\int_n^{n+1} [x]\,dx$.

法四： 其他方法, 如 $\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$, (見第十一章第二節例 2).

然而有些定積分問題並非以上諸方法所能解決, 例如 :

$$\int_1^2 \frac{\sin x}{x}\,dx,\ \int_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx,\ \int_0^1 \sin x^2\,dx,\ \int_0^1 \exp(x^2)\,dx.$$

上述積分之被積函數皆非十分複雜, 我們可以想像, 如果函數更加繁複, 必然有許多定積分問題難以解決, 因此近似值方法乃成爲解決問題之另一種選擇. 由於近年來電腦軟體快速發展, 許多定積分問題皆能以軟體迅速求出其近似值, 這些軟體所使用之公式正是我們所要探討的; 了解理論之來龍去脈, 更能使我們在使用電腦軟體以解決積分問題時, 得心應手.

定義 7.14 [梯形法 **(trapezoidal rule)**]

設函數 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 爲可積, $P_n = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 爲 $[a,b]$ 上一正則分割, 則 $\int_a^b f(x)\,dx$ 之**梯形法近似值**爲

$$T = \frac{\Delta x}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n),$$

其中 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$, $y_k = f(x_k)$, $\forall\, k = 0, 1, \cdots, n$.

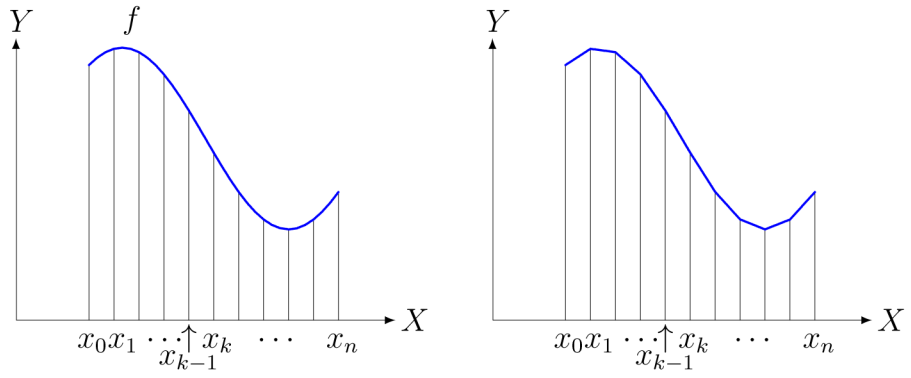


圖 7–40

梯形法之原理十分簡單, 爲方便計令 $f > 0$ (若非爲正僅需平移之), 次設 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 爲一正則分割, $y_k = f(x_k)$, $\forall\, k = 0, \cdots, n$, 則 f 與 X 軸所圍之區域被分割爲 n 個部分, 我們以 $(x_0, 0)$, $(x_1, 0)$, (x_1, y_1), (x_0, y_0) 四點所圍之梯形面積 $\dfrac{(y_0 + y_1)\cdot \Delta x}{2}$ 做爲 $\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx$ 之近似值, 其他各"條"同理, 則 n 條梯形面積之和爲

$$\frac{\Delta x}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)).$$

若函數 f 在區間 $[a,b]$ 上爲二階連續可微分, 在高等微積分中可證明存在 $c\in(a,b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = T - \frac{b-a}{12}f''(c)(\Delta x)^2.$$

亦即以 T 做爲積分近似值時, 其誤差爲 $-\dfrac{b-a}{12}f''(c)(\Delta x)^2$.

定義 7.15 [**Simpson 法**]

設 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 爲可積, $P_n=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 爲 $[a,b]$ 上一正則分割, 其中 n 爲一偶數, 則 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 之 **Simpson 法近似值**爲

$$S=\frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\cdots+4y_{n-1}+y_n),$$

其中 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, $y_j=f(x_j)$, $\forall\, j=0,1,\cdots,n$.

採用上述近似值之理由是:

1° 預備工作:

考慮 (x_0,y_0), $(0,y_1)$ 及 (x_2,y_2) 等三點, 其中 $x_0=-x_2$. 並設 $h=-x_0=x_2$, 通常恰有一拋物線過此三點, 且其軸平行於 Y 軸, 設其方程式爲

$$y=ax^2+bx+c, \tag{1}$$

則

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h}(ax^2+bx+c)\,dx &= \left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2+cx\right]_{-h}^{h}\\ &=\frac{2a}{3}h^3+2ch=(*).\end{aligned}$$

今以 $(-h,\,y_0)$, $(0,\,y_1)$, $(h,\,y_2)$ 分別代入 (1) 式, 得

$$\begin{cases} y_0=ah^2-bh+c,\\ y_1=c,\\ y_2=ah^2+bh+c.\end{cases}$$

故

$$\begin{cases} y_0-y_1=ah^2-bh,\\ y_2-y_1=ah^2+bh,\\ y_0-2y_1+y_2=2ah^2.\end{cases}$$

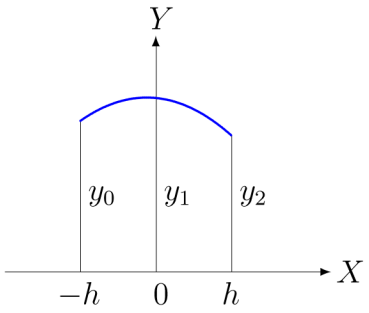


圖 7–41

由是

$$\begin{aligned}(*)&=\frac{1}{3}h(y_0-2y_1+y_2)+2hy_1\\ &=\frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).\end{aligned}$$

2° 近似值公式之由來：

現將上述結果加以推廣：設 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, (n 爲偶數), 其次又設

$h = \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$,

含 (x_0, y_0), (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2) 三點之拋物線在 $[x_0, x_2]$ 之積分爲 $\dfrac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$;

含 (x_2, y_2), (x_3, y_3) 及 (x_4, y_4) 三點之拋物線在 $[x_2, x_4]$ 之積分爲 $\dfrac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$;

含 (x_4, y_4), (x_5, y_5) 及 (x_6, y_6) 三點之拋物線在 $[x_4, x_6]$ 之積分爲 $\dfrac{h}{3}(y_4 + 4y_5 + y_6)$;

$\vdots$

含 (x_{n-2}, y_{n-2}), (x_{n-1}, y_{n-1}) 及 (x_n, y_n) 三點之拋物線在 $[x_{n-2}, x_n]$ 之積分爲

$$\frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n);$$

將此等積分予以加總, 得

$$S = \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-1} + y_n),$$

以 S 作爲 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ 之近似值的方法稱爲 Simpson 法.

若函數 f 在區間 $[a, b]$ 上爲四階連續可微分, 在高等微積分中可證明存在 $c \in (a, b)$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,dx = S - \frac{b-a}{180}f^{(4)}(c)(\Delta x)^4,$$

亦即以 S 做爲積分近似值時, 其誤差爲 $-\dfrac{b-a}{180}f^{(4)}(c)(\Delta x)^4$.

例 1. 爲求積分 $\displaystyle\int_0^1 \exp(-x^2)dx$ 之近似值, 利用以下方法而欲使誤差之絕對值小於 10^{-5}, 若將區間 $[0, 1]$ 分割爲 n 等分, 試問 n 至少爲多少?

(1) 梯形法; (2) Simpson 法.

【解】令 $f(x) = \exp(-x^2)$, 則

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2x\exp(-x^2),\\
f''(x) &= -2\exp(-x^2) + 4x^2\exp(-x^2) = 2(2x^2-1)\exp(-x^2),\\
f'''(x) &= (12x - 8x^3)\exp(-x^2),\\
f^{(4)}(x) &= (12 - 48x^2 + 16x^4)\exp(-x^2).
\end{aligned}$$

(1) 梯形法：由於

$$\begin{aligned} 0<x<1 &\Rightarrow\ 0<x^2<1\\ &\Rightarrow\ -1<2x^2-1<1\\ &\Rightarrow\ |2x^2-1|<1\\ &\Rightarrow\ |f''(x)|<2. \end{aligned}$$

是以

$$\begin{aligned} \Big|\text{誤差}\Big|<10^{-5} &\Leftrightarrow\ \Big|\frac{b-a}{12}f''(c)(\Delta x)^2\Big|<10^{-5}\\ &\Leftarrow\ \frac{1}{12}\cdot 2\cdot\frac{1}{n^2}<10^{-5}\\ &\Leftarrow\ n\geq 130. \end{aligned}$$

此時, 利用電腦可算出積分之近似值爲 $T=0.7468205$.

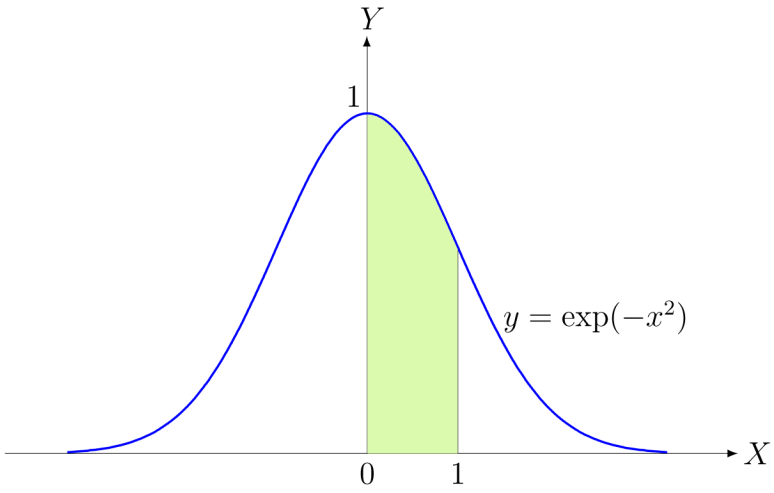


圖 7–42 (註 : 二軸單位不同)

(2) Simpson 法 : 令 $g(x)=12-48x^2+16x^4$, 因 $g'(x)=16x(4x^2-6)<0$, $\forall\, x\in(0,1)$, 知 g 在區間 $(0,1)$ 爲遞減, 而

$$\begin{aligned} 0<x<1 &\Rightarrow\ g(0)>g(x)>g(1)\\ &\Rightarrow\ 12>g(x)>-20\\ &\Rightarrow\ |g(x)|<20\\ &\Rightarrow\ |f^{(4)}(x)|<20. \end{aligned}$$

是以

$$\begin{aligned} \Big|\text{誤差}\Big|<10^{-5} &\Leftrightarrow\ \Big|\frac{b-a}{180}f^{(4)}(c)(\Delta x)^4\Big|<10^{-5}\\ &\Leftarrow\ \frac{1}{180}\cdot 20\cdot\frac{1}{n^4}<10^{-5}\\ &\Leftarrow\ n\geq 10.27\\ &\Leftarrow\ n\geq 12. \end{aligned}$$

此時, 利用電腦可算出積分之近似值爲 $S=0.7468245$.

第 七 章 習 題

注意：以下各題儘可能繪出相關圖形.

面積

7-1 試求曲線 $x=\dfrac{y^3}{4}+\dfrac{y^2}{8}-\dfrac{y}{4}$ 與 $8x=y^3$ 所圍區域之面積.

7-2 試求曲線 $y=|\sin x|$ 與 $y=x^2-2\pi x$ 所圍區域之面積.

7-3 試求直線 $y=x,\ y=-x+2$ 與曲線 $y=(x-1)^2$ 所圍區域且含點 $(1,0)$ 之面積. (積分後代入上下限即可, 不必化簡).

7-4 試求曲線 $f(x)=\sin x$ 與 $g(x)=\cos x$ 在區間 $[0,2\pi]$ 所圍區域之面積.

7-5 某曲線之參數方程式爲

$$\begin{cases} x(t)=\cos t, \\ y(t)=\sin 2t, \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi.$$

(a) 試描繪此曲線之簡圖;

(b) 試求曲線所圍區域之面積.

7-6 設 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}:\ f(x)=1-\cos x$, 點 A 與點 B 之座標分別爲 $(-b,\ 1-\cos b)$ 與 $(b,\ 1-\cos b)$, $(0<b<\pi/2)$, $S(b)$ 爲直線 $y=1-\cos b$ 與曲線 f 所圍區域 (圖中斜線部分) 之面積; 次設 $T(b)$ 爲 $\triangle ABO$ (圖中綠色部分) 之面積, 其中 O 爲原點. 試求 $\lim\limits_{b\to 0^+}\dfrac{T(b)}{S(b)}=?$

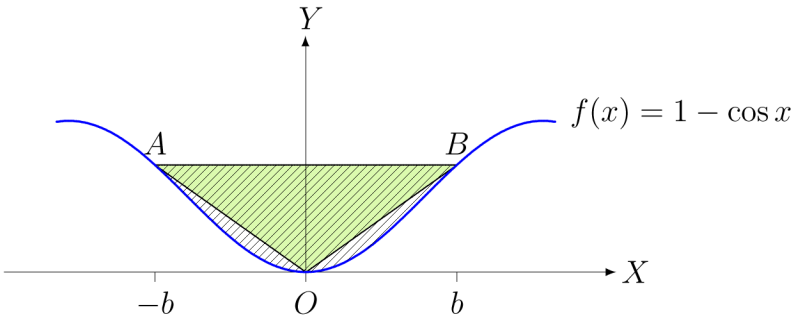


圖 7–43

體積

7-7 試利用切片法與殼法分別求：由曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 與直線 $x+y=1$ 所圍區域繞 X 軸迴轉所得立體之體積.

7-8 試求曲線 $y=-x^2-2x+4$ 與直線 $x+y=2$ 所圍區域繞 (a) $x=2$; (b) X 軸; 迴轉所得立體之體積.

7-9 試求擺線 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t, \end{cases} t\in[0,2\pi]$, 與 X 軸所圍區域繞 X 軸迴轉所得立體之體積.

7-10 設某立體 S 之底爲橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所圍之區域; 而垂直於 X 軸且平行於 Y 軸之橫截面爲等邊三角形. 試求 S 之體積.

7-11 從半徑 R 的圓上割去一個扇形, 把剩下的部分圍成一個圓錐, 試求割去扇形的角度爲多少時, 所作的圓錐體積最大?

7-12 設連續函數 $f\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 之圖形與 X 軸在區間 $[0,a]$ 所圍區域, 繞 X 軸所得之立體體積爲 a^2+a, 內 $a\geq 0$, 試求 $f(x)=?$
[提示] 利用微積分基本定理.

弧長與表面積

7-13 試求函數 $f(x)=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$ 之圖形上自點 $\left(1,\ \dfrac{2}{3}\right)$ 至點 $\left(3,\dfrac{14}{3}\right)$ 之弧 s 之長度.

7-14 試求函數 $y=\left(\dfrac{4x^2}{9}+1\right)^{3/2}$ 之圖形上自點 $(0,1)$ 至點 $\left(2,\dfrac{125}{27}\right)$ 之弧 s 之長度.

7-15 試求半立方拋物線 $5y^3=x^2$ 在圓 $x^2+y^2=6$ 內之弧 s 之長度.

7-16 試求曲線 $y=\sqrt{x-x^2}+\sin^{-1}\sqrt{x}$ 之長度.

7-17 試求由曲線 $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{1}{4x}$ 介於 $x=1$ 與 $x=2$ 之間的弧繞 X 軸迴轉所得之曲面之表面積.

7-18 試求橢圓 $3x^2+4y^2=3$ 繞 X 軸所得迴轉面之面積.

7-19 設橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 及 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2$ 之周長分別爲 $l,\ m$. 試求 $\dfrac{l}{m}=?$
[提示] 第一橢圓之參數方程式爲 $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases} t\in[0,2\pi].$

註：橢圓周長是個很難的數學問題, 近數百年來不少數學家嘗試求得其解或較佳之近似解, 有興趣者可在英文搜尋網站鍵入『perimeter of an ellipse』, 有相當多的討論.

7-20 一隻羊以一條長爲 50 公尺之繩套住一端, 另一端則固定在一座半球形之山頂上, 球半徑爲 100 公尺, 試求此羊之最大活動範圍之面積.
[提示] 此範圍爲一迴轉曲面.

積分之其他應用

7-21 一半徑爲 2 公尺之球形容器, 由頂端每分鐘注入 0.5 立方公尺之水, 試問當 水高爲 h 時, 容器內水之體積爲何? 水面上升之速率爲何?

7-22 一半徑爲 1 之球體, 今欲一刀切爲二塊使得其體積比爲 $2:1$, 試求分割此球體之平面與球心之距離的近似值至小數第三位.

7-23 設蜘蛛沿曲線 $y=7-x^2$ 之最高點向下爬行, 碰到 X 軸就向 X 軸正向前進, 而蒼蠅停在點 $(4,0)$ 處不動. 當蜘蛛第一次看到蒼蠅時, 始前往捕食. 試問蜘蛛前往捕食之爬行路程的長爲若干?

7-24 一半徑爲 r, 高度爲 L 之圓柱形油桶, 平放於地面上 (即二底面垂直於地面), 桶之上方開一口, 並以每秒 k 公升之速度注入汽油. 試問 : 當油之高度爲 h 時, $(0<h<2r)$, 油上升之速度爲若干?

7-25 試求由曲線 $y=x^2$ 與 $y=x+2$ 所圍區域 R 之形心. 並進而求 R 繞 $y=x+2$ 旋轉所成之立體的體積.

近似積分法

7-26 爲求積分 $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sin x}{x}dx$ 之近似值, 若利用梯形法, 而欲使誤差之絕對值小於 10^{-3}, 試問分割之區間數 n 至少爲多少?

7-27 設函數 f 爲一二次多項式. 試證 :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{6}(f(a)+4f(c)+f(b)),$$

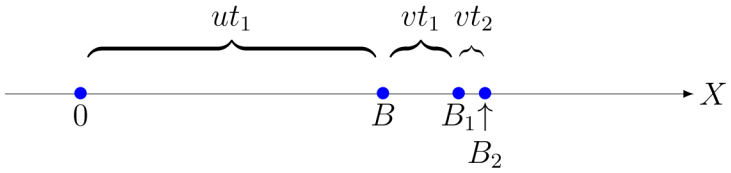
其中 $c=(a+b)/2$.

Chapter 8

序列與級數

在級數觀念尚未成熟之前, 人們以爲 『無限個正數之和必爲無限大』, 於是有人以荷馬 (Homer) 史詩中之英雄人物 Achilles 創造了一個詭論 (Paradox), 認爲他追不上一隻烏龜, 因爲當 Achilles 跑到烏龜現在之位置時, 烏龜已往前跑了幾步, 如此繼續下去, 這就是有名的 Zeno 詭論 (Zeno's paradox).

設一開始 Achilles 在 X 軸上之原點, 而烏龜則在 X 軸上之點 B (其座標爲 L), 二者以同一方向順 X 軸而跑, Achilles 之速度爲 u 大於烏龜之速度爲 v, Achilles 跑至點 B 之時間爲 t_1, 此時烏龜已跑至點 B_1 (座標爲 $L+vt_1$), 其後 Achilles 跑至點 B_1 又費時 $t_2=\dfrac{vt_1}{u}$, 此時烏龜已跑至點 B_2 (座標爲 $L+vt_1+vt_2$), 如此繼之, 我們將 Achilles 所費之時間加總起來,



$$T=t_1+t_2+\cdots=t_1+t_1\left(\frac{v}{u}\right)+t_1\left(\frac{v}{u}\right)^2+\cdots=\frac{t_1}{1-\frac{v}{u}}=\frac{L}{u-v}. \qquad (*)$$

換言之 Achilles 只需花時間 $\dfrac{L}{u-v}$ 即可追上烏龜. 在上面的 $(*)$ 式中我們使用了等比級數之和的概念, 對於尚未建立極限概念的古希臘數學而言, 自然形成一項難以解釋的矛盾.

在中國, 莊子的《天下篇》中曾提及『一尺之棰, 日取其半, 萬世不竭 。』這相當於等比級數之首項與公比皆爲二分之一時, 其和爲一之概念. 然而這些概念只有等到文藝復興之後, 微積分成爲數學之主流時, 才有較爲完整的結果.

級數之應用極爲廣泛, 在數學領域中高等微積分、實變函數論、複變函數論、機率論等, 序列和級數皆爲不可或缺之工具, 在物理學方面, 早在 1822 年數學家 Fourier 就以研究熱學而創出有名的 Fourier 級數, 其他與週期性運動有關之聲學、光學、電子學等, Fourier 級數乃爲極重要之基礎.

級數可視爲"部分和"之序列 (稍後詳論), 因此我們先討論序列.

§ 8.1 序列

有人說, 以下這些都是 (無限) 序列 :

- $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$
- $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \cdots,\ \dfrac{1}{n+2},\ \cdots$
- $-1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots$
- $\sin 1,\ \sin 2,\ \sin 3,\ \cdots,\ \sin n,\ \cdots$
- $e^0,\ \ln 1,\ e^2,\ \ln 3,\ \cdots,\ e^{2k-2},\ \ln(2k-1),\ \cdots$

但是, 我們希望以數學語言, 嚴格界定所謂的『序列』, 以方便今後的討論. 由以上諸例中, 可發現每一序列包括兩個要素, 其一 : 它有無限可數項, 其二 : 對於任一自然數 n 必須指明第 n 項之『值』. 我們將利用『函數』觀念以達到界定序列之目的.

定義 8.1

所謂**序列** (sequence) 係指一函數 $f\colon \mathbb{N} \to S : n \mapsto f(n) = a_n$, 其中 S 爲一集合, 通常寫爲 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 、$\{a_n\}_n$ 、$\{a_n\}_{n\geq 1}$ 或 $\{a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$. 若 S 爲 $\mathbb{R}$ 之一子集, 則稱 $\{a_n\}_n$ 爲一實數序列.

本章中若無特別聲明, 所指之序列皆爲實數序列.

定義 8.2 (序列之斂散性定義)

(1) 我們稱序列 $\{a_n\}_n$ 爲**收斂** (convergent), 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ 存在, 亦即

$$\exists\, l \in \mathbb{R},\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall\, n \in \mathbb{N})(n > n_0\ \Rightarrow\ |a_n - l| < \epsilon).$$

(參閱圖 8–1).

(2) 我們稱序列 $\{a_n\}_n$ 爲**發散** (divergent), 如果 $\{a_n\}_n$ 不爲收斂.

(3) $\{a_n\}_n$ 稱爲一**零序列** (null sequence), 如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

關於序列斂散性之討論, 大部分問題可利用以下定理解決, 但對於部分定理之證明以及某些較困難之問題, 使用 $\forall\epsilon > 0,\ \cdots$ 之方法仍爲不可避免.

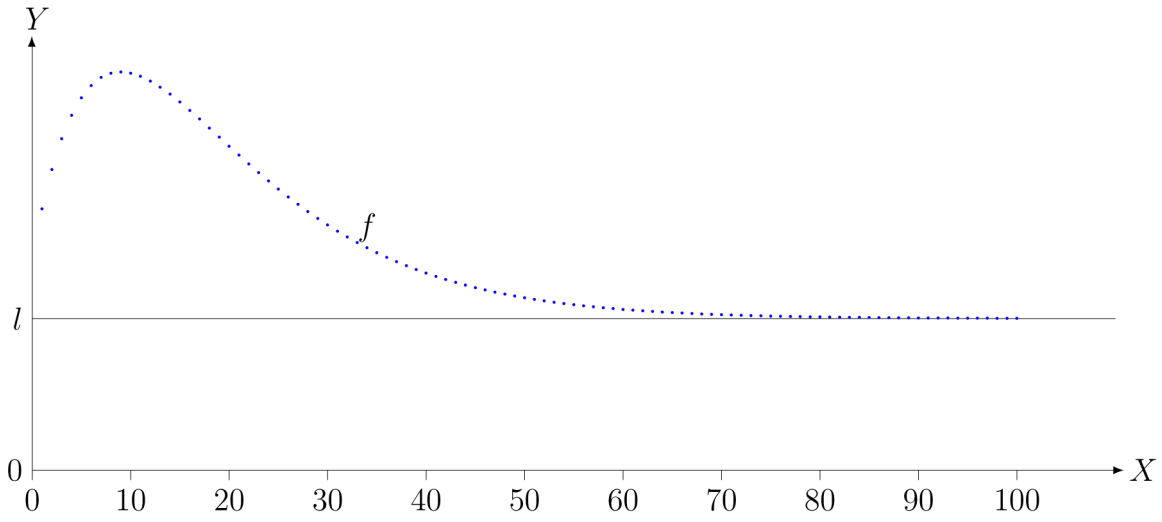


圖 8–1　收斂序列

定理 8.3 （序列斂散性定理）

(1) 設 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = l$ 且 $g|_{\mathbb{N}}(n) = a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, 則 $\lim_{n\to+\infty} a_n = l.$

(2) 若一序列爲收斂, 則必爲有界.

(3) 若一序列爲單調且有界, 則必爲收斂.

(4) 設 $f(n) = a_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$, 若存在 $\mathbb{N}$ 之無上界子集 A 與 B 使得

$$\lim_{n\to+\infty} f|_A(n) \neq \lim_{n\to+\infty} f|_B(n),$$

則 $\{a_n\}_n$ 爲發散.

(5) (三明治原理)
若 $a_n \le b_n \le c_n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ 且 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l,$ 則 $\lim_{n\to+\infty} b_n = l.$

【證】我們只證 (2) 與 (3), 其餘部分讀者可利用第一章定理自行證明之.

(2) 取 $\epsilon = 1$,

$$\begin{aligned}
\{a_n\}_n \text{ 爲收斂} \ &\Rightarrow\ \Big[\exists\, l \in \mathbb{R}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, (\forall n \in \mathbb{N})(n > n_0 \ \Rightarrow\ |a_n - l| < \epsilon = 1)\Big] \\
&\Rightarrow\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ l - 1 < a_n < l + 1) \\
&\Rightarrow\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \min\{a_1, \cdots, a_{n_0}, l - 1\} \le a_n \le \max\{a_1, \cdots, a_{n_0}, l + 1\} \\
&\Rightarrow\ \{a_n\}_n \text{ 爲有界.}
\end{aligned}$$

(3) 設序列 $\{a_n\}_n$ 爲不減且有界 (不增情況同理), 令集合 $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, 由實數系之完全性知 $\sup A$ 存在, 令 $a = \sup A$,

$$\begin{aligned} a = \sup A &\Rightarrow (\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \text{使得 } a_{n_0} > a - \epsilon) \\ &\Rightarrow \Big[\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall\, n \in \mathbb{N})(n > n_0 \ \Rightarrow\ a - \epsilon < a_n \le a)\Big] \\ &\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = a. \end{aligned}$$

故知序列 $\{a_n\}_n$ 收斂. □

例 1. 試問序列 $\{\sqrt[n]{n}\}_{n\ge1}$ 是否爲收斂? 若爲收斂, 並求其極限.

【解】設 $g\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R} : g(x) = x^{1/x}$, 利用 l'Hospital 規則,

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = \exp\Big(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}\Big) = \exp\Big(\lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1}\Big) = e^0 = 1,$$

故知 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} g\big|_{\mathbb{N}}(n) = 1$. □

例 2. 設 $p > 0$, 試問序列 $\{\sqrt[n]{p}\}_{n\ge1}$ 是否爲收斂? 若爲收斂, 並求其極限.

【解】$\lim\limits_{n\to+\infty} p^{1/n} = \exp\Big(\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln p\Big) = e^0 = 1$. □

例 3. 試問序列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是否爲收斂?

【解】令 $g\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R} : g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, 第四章第七節中我們利用 l'Hospital 規則已證明 : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = e$, 是以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} g|_{\mathbb{N}}(n) = e$. □

例 4. 設 $a_n = \dfrac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. 試證序列 $\{a_n\}_n$ 爲收斂並求其極限.

【解】若欲證此序列爲收斂, 僅需以下之 (a), 若證其爲收斂且爲一零序列, 則只需 (b).

(a) 由於,

- $\{a_n\}_n$ 爲有界, 因爲 $0 < a_n < 1$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;
- $\{a_n\}_n$ 爲一遞減序列, 因爲

$$a_{n+1} = \frac{1\cdot3\cdots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot4\cdots(2n)(2n+2)} = a_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} < a_n\ .$$

是以知 $\{a_n\}_n$ 爲收斂.

(b) 由於 $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \\ \Rightarrow\ a_n^2 &= a_n\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right) \\ &< a_n\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots\frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} \\ \Rightarrow\ 0 < a_n &< \frac{1}{\sqrt{2n+1}}. \end{aligned}$$

利用三明治原理, 得 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. □

例 5. 設 $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \left(\dfrac{1-n}{n}\right)^n$, 試問序列 $\{a_n\}_n$ 是否爲收斂?

【解】設 $A = \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\},\ B = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\}$,

$$g\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R} : g(x) = \left(1-\frac{1}{x}\right)^x,$$

顯然 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = e^{-1}$.

1° 若 $n \in A$, 則

$$\lim_{n\to+\infty,n\in A} a_n = \lim_{n\to+\infty,n\in A} -\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} -g|_A(n) = -e^{-1};$$

2° 若 $n \in B$, 則

$$\lim_{n\to+\infty,n\in B} a_n = \lim_{n\to+\infty,n\in B} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} g|_B(n) = e^{-1};$$

由以上二點知 $\{a_n\}_n$ 爲發散. (參閱圖 8–2).

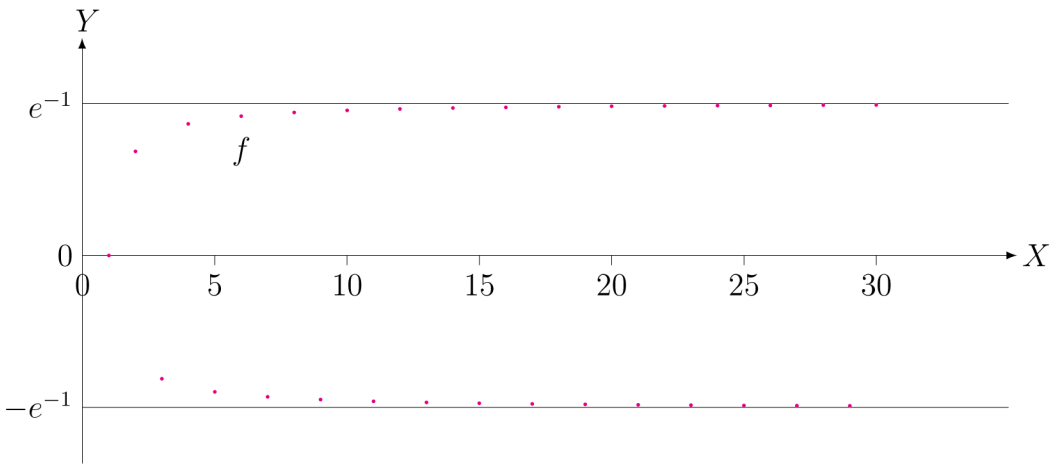


圖 8–2 發散序列

§ 8.2 實數級數

定義 8.4

設 $\{a_n\}_n$ 爲一實數序列, 令

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ s_n = a_1 + \cdots + a_n,$$

我們稱 $\{s_n\}_n$ 爲一(**無限**) **級數** ((infinite) series) 且表爲 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. 其中之 s_n 則爲此級數之第 n 個**部分和** (partial sum).

定義 8.5

(1) 若 $\{s_n\}_n$ 爲收斂 (即 $\lim_{n\to+\infty} s_n = s$), 則稱級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂, 且稱 s 爲此級數之**和** (sum).

(2) 若 $\{s_n\}_n$ 爲發散, 則稱級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲發散.

定理 8.6 (線性性質)

設級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂且其和爲 a, 級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 爲收斂且其和爲 b; $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, 則級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ 爲收斂且其和爲 $\alpha a + \beta b$.

【證】設級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$ 之第 n 個部分和爲 s_n, 則

$$s_n = \sum_{j=1}^{n}(\alpha a_j + \beta b_j) = \alpha \sum_{j=1}^{n} a_j + \beta \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

故 $\lim_{n\to+\infty} s_n = \alpha \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j + \beta \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} b_j = \alpha a + \beta b.$ □

註 1: 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂, 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 爲發散, 則 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ 必爲發散. 理由如下 : 令 $c_n = a_n + b_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$, 假定 $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ 爲收斂, 則由定理知 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(c_n - a_n)$ 爲收斂, 顯爲矛盾.

註 2： 若上述二級數皆爲發散, 則 $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$ 可能爲收斂或爲發散. 讀者不妨自行出舉例以證之.

定理 8.7 （小尾性）

> 若級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂, 則 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

【證】設 s_n 爲級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 之第 n 個部分和, 則

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 爲收斂} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n \text{ 存在, 令之爲 } s$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(s_n - s_{n-1}) = s - s = 0. \qquad \square$$

註 1： 若一級數之通項之極限爲 0, 即 $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, 我們稱級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 具**小尾性**, 本定理說明： 一收斂級數必具小尾性. 讀者宜注意： 本定理之逆敍述不眞, 一具小尾性之級數未必爲收斂, 反例：級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 雖具小尾性但爲發散, (發散性稍後再證).

註 2： 本定理之主要用途爲： 若一級數不具小尾性, 則其必爲發散. 因此某些學者稱此一方法爲**通項審斂法** (general term test).

註 3： 利用序列收斂之定義, 我們立即可證得

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0.$$

因此, 若 $\lim_{n\to+\infty} |a_n| \neq 0$, 我們亦可斷言級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 不具小尾性, 是爲發散.

例 1. 試問級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{1+n}$ 是否爲收斂?

【解】令 $a_n = (-1)^n\frac{n}{1+n}$, 由於

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{1+n} = 1 \neq 0,$$

故知原級數不具小尾性, 是爲發散. $\square$

例 2. 試討論**幾何級數** (geometric series)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

之斂散性, 並求收斂者之和, 其中 $a > 0$.

【解】1° 當 $|r| < 1$ 時, 設 s_n 爲此級數之第 n 個部分和, 則

$$\begin{aligned} s_n - rs_n &= \left(a + ar + \cdots + ar^{n-1}\right) - \left(ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n\right) \\ &= a - ar^n = a(1 - r^n), \end{aligned}$$

而有 $s_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$, 是以

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to+\infty} (1 - r^n) = \frac{a}{1-r}.$$

知此級數爲收斂, 其和爲 $\dfrac{a}{1-r}$.

2° 當 $|r| \geq 1$ 時, 由於此級數通項之絕對值極限爲

$$\lim_{n\to+\infty} a|r^{n-1}| = \begin{cases} a, & \text{若 } |r| = 1, \\ +\infty, & \text{若 } |r| > 1, \end{cases}$$

亦即此級數不具小尾性, 故爲發散. □

定理 8.8 (尾部對等性)

> 設 k 爲一 (固定) 自然數, 若 $b_n = a_{n+k}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 則級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收斂之充要條件爲 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收斂.

【證】設 s_n 與 t_n 分別爲級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 與 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 之第 n 個部分和, 則我們有

$$\begin{aligned} s_{n+k} &= a_1 + \cdots + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} \\ &= a_1 + \cdots + a_k + b_1 + b_2 + \cdots + b_n \\ &= s_k + t_n, \end{aligned}$$

即 $t_n = s_{n+k} - s_k$. 若設級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收斂於 l, 則 $\lim_{n\to+\infty} s_{n+k} = l$, (參見習題 8-4), 故 $\lim_{n\to+\infty} t_n = l - s_k$. 亦即級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收斂於 $l - s_k$. 反之, 若設級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收斂於 m, 由於 $s_n = t_{n-k} + s_k$, 則

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} t_{n-k} + s_k = m + s_k,$$

故證得級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收斂於 $m + s_k$. □

註 1： 本定理說明一級數不因刪去或增加有限項而改變其斂散性.

註 2： 今後凡遇定理之前提中有『$\forall n \geq 1, \cdots$』之條件時, 吾人皆可利用本定理將之改爲『$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ 使得 $\forall n \geq n_0, \cdots$』.

例 3. 試問級數

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

是否爲收斂?

【解】由於原級數之第三項以後爲一幾何級數, 公比爲 1/2, 故由本定理知原級數爲收斂. □

定理 8.9 （**Cauchy 準則**）

級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收斂之充要條件爲

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, (\forall k,\ m)\Big(k > m > n_0 \ \Rightarrow\ \Big|\sum_{n=m+1}^{k} a_n\Big| < \epsilon\Big).$$

(此條件稱爲級數之 Cauchy 準則.)

【證】若級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂於 l, 則

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ (\forall n \in \mathbb{N})\Big(n > n_0 \ \Rightarrow\ |s_n - l| < \frac{\epsilon}{2}\Big),$$

其中 s_n 爲 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 之第 n 個部分和, 故

$$\begin{aligned} k > m > n_0 \ &\Rightarrow\ \Big(|s_k - l| < \frac{\epsilon}{2} \ \wedge\ |s_m - l| < \frac{\epsilon}{2}\Big) \\ &\Rightarrow\ |s_k - s_m| < \epsilon \\ &\Rightarrow\ \Big|\sum_{n=m+1}^{k} a_n\Big| < \epsilon. \end{aligned}$$

反之, 若級數滿足 Cauchy 準則, 證明級數爲收斂需使用高等微積分概念, 略之. □

註： Cauchy 準則多半用於定理之證明.

§ 8.3 正項級數

一級數若其諸項皆爲非負, 則稱其爲一**正項級數** (positive term series).

定理 8.10 (部分和有界)

> 設 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲一正項級數, 若其部分和序列 $\{s_n\}_{n\geq 1}$ 爲有界, 亦即 $0 \leq s_n \leq M$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, 則 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂.

【證】正項級數之部分和序列 $\{s_n\}_n$ 顯然爲單調不減, 又已知其爲有界, 故知 $\{s_n\}_n$ 爲收斂. □

例 1. 試討論級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5+(-1)^n}\right)^n$ 之 斂散性, 若爲收斂試求其和.

【解】1° 此級數爲收斂, 因爲其部分和

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{2}{5+(-1)^j}\right)^j \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \left(\frac{2}{5+(-1)^n}\right)^n \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1. \end{aligned}$$

2° 當 n 偶數時, 令 $n = 2k$, 則

$$\begin{aligned} s_n = s_{2k} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2k-1}} + \frac{1}{3^{2k}} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{2k-1}}\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \cdots + \frac{1}{3^{2k}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(\frac{1}{4})^k}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1-(\frac{1}{9})^k}{1-\frac{1}{9}} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) + \frac{1}{8} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{9}\right)^k\right). \end{aligned}$$

由 1° 知級數爲收斂, 故

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{5+(-1)^n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{k\to+\infty} s_{2k} = \frac{19}{24}.$$ □

定理 8.11 [比較審斂法 (comparison test)]

設 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 皆爲正項級數.

(1) 若 $a_n \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, 則 $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 爲收斂} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 爲收斂} \right)$.

(2) 若 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$.

1° 若 $c \in (0, +\infty)$, 則 $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 爲收斂} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 爲收斂} \right)$.

2° 若 $c = 0$, 則 $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 爲收斂} \Leftarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 爲收斂} \right)$.

3° 若 $c = +\infty$, 則 $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 爲收斂} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 爲收斂} \right)$.

【證】(1) 設 s_n 與 t_n 分別爲級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 與 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 之第 n 個部分和,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \text{ 爲收斂} &\Rightarrow \{t_n\}_n \text{ 爲收斂} \\ &\Rightarrow \{t_n\}_n \text{ 爲有界} \\ &\Rightarrow \{s_n\}_n \text{ 爲有界}, \quad (\because\ s_n \le t_n) \\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 爲收斂}. \end{aligned}$$

(2) 只證 $0 < c < +\infty$ 之情形, 由於

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c &\Rightarrow \left(\text{對於 } \frac{c}{2} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{a_n}{b_n} - c \right| < \frac{c}{2} \right) \\ &\Rightarrow \left(\text{對於 } \frac{c}{2} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2} \right) \\ &\Rightarrow \left(\text{對於 } \frac{c}{2} > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n > n_0 \Rightarrow \frac{c}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3c}{2} \cdot b_n \right), \end{aligned}$$

利用 (1) 可證 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 爲收斂之充要條件爲 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂. □

比較審斂法之使用, 必須在事先已知一級數爲收斂或發散, 再與另一級數『比較』, 以證明後者爲收斂或發散, 在此我們暫不舉例, 稍後我們有較多已知斂散性之級數時, 當可用以與需要判別斂散性之級數『比較』.

定理 8.12 [積分審斂法 (integral test)]

設 $g\colon [1,+\infty)\to\mathbb{R}_+$ 爲一不增函數, 且 $g(n)=a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, 則

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}a_n \text{ 爲收斂} \quad\Leftrightarrow\quad \int_1^{+\infty}g(x)\,dx \text{ 爲收斂}\right).$$

【證】設 $n\in\mathbb{N}$, 因 g 爲單調不增, 故 g 在任一緊緻區間上皆爲可積, 令

$$b_n=\int_n^{n+1}g(x)\,dx\ (\geq 0),$$

而得 $\lim\limits_{k\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}b_n=\int_1^{+\infty}g(x)\,dx$, 今因 (參閱圖 8–3)

$$b_n=\int_n^{n+1}g(x)\,dx\leq\int_n^{n+1}g(n)\,dx=g(n)=a_n, \tag{1}$$

$$b_n=\int_n^{n+1}g(x)\,dx\geq\int_n^{n+1}g(n+1)\,dx=g(n+1)=a_{n+1}, \tag{2}$$

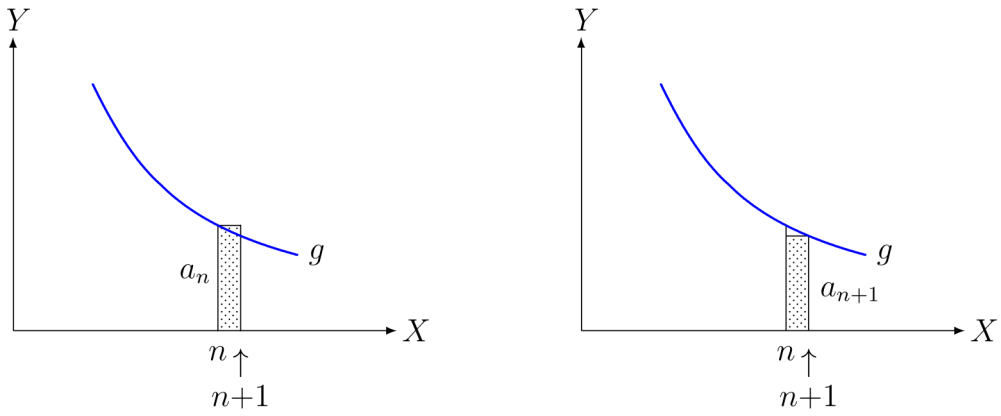


圖 8–3: 左圖網點部分面積等於 a_n, 右圖網點部分面積等於 a_{n+1}.

1° 若級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 爲收斂, 則由 (1) 式知級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 亦爲收斂, 亦即 $\int_1^{+\infty}g(x)\,dx$ 爲收斂.

2° 若瑕積分 $\int_1^{+\infty}g(x)\,dx$ 爲收斂, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ 爲收斂, 由 (2) 式知, 級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ 亦爲收斂. □

如果沒有積分審斂法, 討論以下級數斂散性將是一件不容易之事.

例 2. 試討論 p **級數** (p-serirs) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 之斂散性 .

【解】1° 當 $p \le 0$ 時, 則 $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$, 故級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 爲發散.

2° 當 $p > 0$ 時, 令函數

$$g\colon [1, +\infty) \to \mathbb{R} : g(x) = \frac{1}{x^p},$$

則 g 爲一非負之不增函數, 且 $g(n) = \frac{1}{n^p}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$;

(i) 當 $p > 1$ 時, 因 $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ 爲收斂, 故知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 爲收斂 ;

(ii) 當 $0 < p \le 1$ 時, 因 $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ 爲發散, 故知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ 爲發散 . □

註 : 由本例知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, 而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 則爲收斂, 在高等微積分教本中, 我們知道它收斂於 $\frac{\pi^2}{6}$.

定理 8.13 [**比值審斂法 (ratio test)**]

設 $a_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ 且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$.

(1) 若 $r < 1$, 則級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂 ;

(2) 若 $r > 1$, 則級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲發散 ;

(3) 若 $r = 1$, 則此法不靈 (即級數可能爲收斂亦可能爲發散) .

【證】(1) 若 $r < 1$, 令 $\epsilon = \frac{1-r}{2} > 0$, $b = r + \epsilon$, 則

- $0 < b < 1$;
- 因 $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$, 對於上述 $\epsilon = \frac{1-r}{2} > 0$, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$n \ge n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \epsilon,$$

是以

$$(n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \frac{a_{n+1}}{a_n} < r+\epsilon = b) \ \Rightarrow\ (n \geq n_0 \ \Rightarrow\ a_{n+1} < a_n b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{n_0+1} < a_{n_0} b \\ a_{n_0+2} < a_{n_0+1} b < a_{n_0} b^2 \\ a_{n_0+3} < a_{n_0+2} b < a_{n_0} b^3 \\ \quad \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \forall\, j \in \mathbb{N},\ a_{n_0+j} < b^j\, a_{n_0}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{j=1}^{+\infty} a_{n_0+j} \text{ 爲收斂, (比較審斂法)}$$

$$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 爲收斂.}$$

(2) 若 $r > 1$, 令 $\epsilon = \dfrac{r-1}{2} > 0, b = r - \epsilon$, 則 $b > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \ \Rightarrow\ \left[\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ 使得 } n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right| < \epsilon\ \right]$$

$$\Rightarrow\ \left[\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ b = r - \epsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n}\ \right]$$

$$\Rightarrow\ \left[\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ a_n < a_n b < a_{n+1}\ \right],\ (\because b > 1)$$

$$\Rightarrow\ a_{n_0} < a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < \cdots$$

$$\Rightarrow\ \text{原級數無小尾性}$$

$$\Rightarrow\ \text{原級數爲發散.}$$

(3) 由 p 級數知, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 爲發散, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ 爲收斂, 但二者之 r 值皆爲 1. □

例 3. 試判斷級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ 之斂散性.

【解】令 $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$, 則因

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

利用比值審斂法, 知正項級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ 爲收斂. □

定理 8.14 [**根值審斂法 (root test)**]

設 $a_n \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = \rho$.

(1) 若 $\rho < 1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂 ;

(2) 若 $\rho > 1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲發散 ;

(3) 若 $\rho = 1$, 則此法不靈 .

【證】(1) 若 $\rho < 1$, 令 $\epsilon = \dfrac{1-\rho}{2} > 0,\ b = \rho + \epsilon$, 則 $0 < b < 1$; 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = \rho$ 知, 存在 $n_0 \in \mathbb{N}$, 使得

$$n > n_0 \ \Rightarrow\ \left|a_n^{1/n} - \rho\right| < \epsilon,$$

是以

$$\begin{aligned}(n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n^{1/n} < \rho + \epsilon = b) \ &\Rightarrow\ (n > n_0 \ \Rightarrow\ a_n < b^n)\\ &\Rightarrow \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} a_n \text{ 爲收斂, (比較審斂法)}\\ &\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ 爲收斂.}\end{aligned}$$

(2) 若 $\rho > 1$, 令 $\epsilon = \dfrac{\rho-1}{2} > 0,\ b = \rho - \epsilon$, 則 $b > 1$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} a_n^{1/n} = \rho \ &\Rightarrow \left[\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ 使得 } n \geq n_0 \ \Rightarrow\ \left|a_n^{1/n} - \rho\right| < \epsilon\ \right]\\ &\Rightarrow \left[\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ 1 < b = \rho - \epsilon < a_n^{1/n}\ \right]\\ &\Rightarrow \left[\ n \geq n_0 \ \Rightarrow\ 1 < a_n\ \right]\\ &\Rightarrow \text{原級數無小尾性}\\ &\Rightarrow \text{原級數爲發散.}\end{aligned}$$

(3) 由 p 級數知, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ 爲發散, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 爲收斂, 但二者之 ρ 值皆爲 1. □

例 4. 試討論級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-\alpha n}}{n},\ \alpha \in \mathbb{R}$, 之斂散性.

【解】1° 若 $\alpha = 0$, 則原級數 $= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$, 顯爲發散.

2° 若 $\alpha \neq 0$, 利用根值審斂法, 因

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^{-\alpha n}}{n}\right)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-\alpha}}{n^{1/n}} = e^{-\alpha}.$$

- 若 $\alpha < 0$, 則 $\rho > 1$, 此級數爲發散.
- 若 $\alpha > 0$, 則 $\rho < 1$, 此級數爲收斂. □

本節比較審斂法定理之後, 由於已知收斂和發散之級數不多, 難以舉例, 故至今方予討論.

例 5. 試判斷級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$ 之斂散性.

【解】我們已知 p 級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ 爲收斂, 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+1} = 1,$$

利用比較審斂法, 知此級數爲收斂. □

§ 8.4 交錯級數之審斂法

一級數若其各項爲正負相間, 則稱其爲一**交錯級數** (alternating series), 亦即級數可表爲

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$$

或

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^{n}a_n + \cdots$$

內 $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

定理 8.15 [**Leibniz 審斂法 (Leibniz' rule)**]

設交錯級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ 滿足 :

1° $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$;

2° $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} \leq a_n$;

3° $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

則此交錯級數爲收斂 .

【證】設 s_n 爲此級數之第 n 個部分和, 則

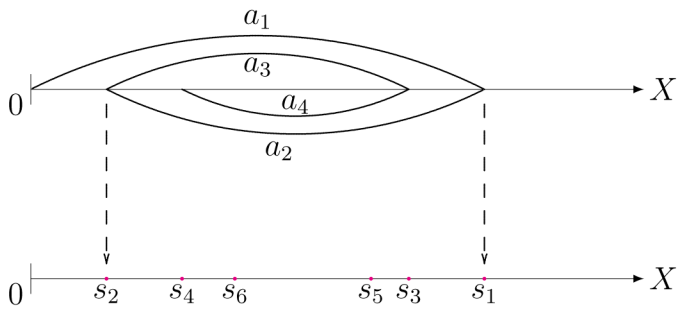


圖 8–4

$$s_{2n} = s_{2n-2} + a_{2n-1} - a_{2n} \geq s_{2n-2},\ (\text{因 } a_{2n-1} \geq a_{2n}),$$

此說明 $\{s_{2n}\}_n$ 爲單調不減序列. 又由於 $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

亦即 $\{s_{2n}\}_n$ 爲有上界, 是以 $\{s_{2n}\}_n$ 之極限存在, 設其爲 l.

同理諸奇數項之部分和所組成之序列 $\{s_{2n-1}\}_n$ 爲單調不增而且 $a_1 - a_2$ 爲其一下界, 是以 $\{s_{2n-1}\}_n$ 之極限存在, 設其爲 m. 由於

$$\begin{aligned} l - m &= \lim_{n\to+\infty} s_{2n} - \lim_{n\to+\infty} s_{2n-1} \\ &= \lim_{n\to+\infty} (s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim_{n\to+\infty} (-a_{2n}) = 0. \end{aligned}$$

故 $l = m$, 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ 存在. □

例 1. 試判斷級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 是否爲收斂?

【解】令 $a_n = \dfrac{\ln n}{n}$, 因原級數爲一交錯級數, 且

1° $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},\ a_n > 0$;

2° $\forall\, n \geq 3,\ a_{n+1} < a_n$, 此因 $D\Big(\dfrac{\ln x}{x}\Big) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2} < 0,\ \forall\, x > e.$

3° 利用 l'Hospital 規則,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

知 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0.$

由 Leibniz 審斂法知原級數爲收斂. □

提醒讀者：一交錯級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$, 若其滿足 $a_{n+1}\le a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, 而 $\lim_{n\to+\infty}a_n\neq 0$, 則此級數不具小尾性, 故爲發散.

例 2. 試判斷級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ 是否爲收斂?

【解】令 $a_n=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, 儘管 $0<a_{n+1}<a_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$, (參見習題 3-24), 但

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}=e^{-1}>0.$$

此級數雖爲一交錯級數, 因其不具小尾性, 故爲發散. □

例 3. 試證：級數

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$$

爲收斂且其和爲 $\ln 2$.

【解】利用 Leibniz 審斂法知此級數顯然爲收斂. 其次, 考慮

$$f\colon[0,\,1]\to\mathbb{R}:f(x)=\ln(1+x).$$

因爲

$$\begin{aligned}
Df(x)&=(1+x)^{-1},\\
D^2f(x)&=-(1+x)^{-2},\\
D^3f(x)&=2!(1+x)^{-3},\\
D^4f(x)&=-3!(1+x)^{-4},\\
&\vdots\\
D^nf(x)&=(-1)^{(n+1)}(n-1)!(1+x)^{-n};
\end{aligned}$$

由 Taylor 定理知, 存在 $c\in(0,1)$ 使得

$$f(1)=\ln(1+0)+\frac{(1+0)^{-1}}{1!}+\frac{-(1+0)^{-2}}{2!}+\frac{2!(1+0)^{-3}}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{(n-2)!(1+0)^{-n+1}}{(n-1)!}+R_n(1),$$

其中餘項 $R_n(1)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n-1)!(1+c)^{-n}}{n!}=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n(1+c)^n}$. 亦即

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n-1}+R_n(1),\qquad(*)$$

令 s_n 爲原級數之 n 項部分和, 則

$$(*) \Rightarrow s_{n-1} = \ln 2 - R_n(1),\ \forall n \geq 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = \ln 2 - 0,\ \left(\text{因 } 0 \leq |R_n(1)| = \frac{1}{n(1+c)^n} < \frac{1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \qquad \square$$

例 4. 試證: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ 爲收斂.

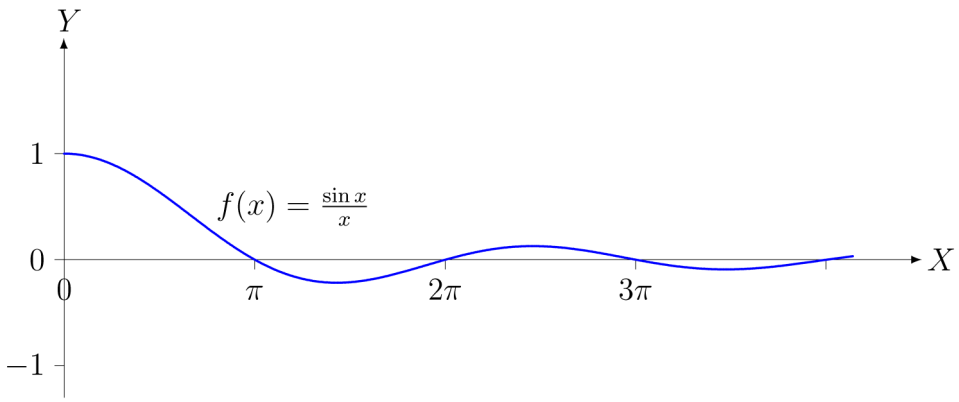


圖 8–5

【解】本題可利用瑕積分之定義證明之, (第六章習題). 在此我們提供另一證明方法. 令

$a_n = \displaystyle\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx,\ \forall n \in \mathbb{N}$, (注意 : a_1 爲收斂之瑕積分), 則

1° $a_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$;

2° $n \in \mathbb{N}$;

$$a_{n+1} = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

$$= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t+\pi)|}{t+\pi}\,dt,\ (\text{令 } t = x - \pi)$$

$$= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t+\pi}\,dt < \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,dt = a_n;$$

3° $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

利用 Leibniz 審斂法知, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ 爲收斂, 其次, 令

$$F\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R} : F(t) = \int_1^t \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

顯然, $\forall t > 1$,

$$F(t) = \sum_{n=1}^{[t]} (-1)^n a_n + \int_{[t]}^{t-[t]} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

是以

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} F(t) &= \lim_{t\to+\infty} \sum_{n=1}^{[t]} (-1)^n a_n + \lim_{t\to+\infty} \int_{[t]}^{t-[t]} \frac{\sin x}{x}\, dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n, \ (\text{收斂}). \end{aligned}$$

□

§ 8.5 絕對收斂與條件收斂

本節中討論之級數爲一般之實數級數, 不限於正項級數或交錯級數, 其中之絕對收斂性影響一級數是否可以任意重排而不改其斂散性及其和.

定理 8.16

若 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 爲收斂, 則 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂 .

【證】設

$$b_n = a_n + |a_n| = \begin{cases} 2a_n, & \text{若 } a_n \geq 0, \\ 0, & \text{若 } a_n < 0, \end{cases}$$

應有 $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$; 利用比較審斂法知 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 爲收斂; 而上式移項得, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n - |a_n|$, 利用級數之線性性質知 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂. □

上述定理之逆敍述並不爲眞. 例如, 交錯級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, 利用 Leibniz 審斂法知其爲收斂, 但 $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 則爲發散. 我們可給收斂級數作如下之分類.

定義 8.17

若級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 爲收斂, 則稱級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 爲**絕對收斂** (absolutely convergent); 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$ 爲發散, 而級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 爲收斂, 則稱級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 爲**條件收斂** (conditionally convergent).

例 1. 試討論**交錯** p **級數** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 之斂散性 .

【解】爲方便計令 $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$.

1° 當 $p\le 0$ 時, 則 $\lim_{n\to+\infty}|a_n|\neq 0$, 知級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 不具小尾性, 是爲發散.

2° 當 $p>0$ 時,

(i) 當 $p>1$ 時, 因 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, 由第三節例 2 知其爲收斂, 是以原級數爲絕對收斂.

(ii) 當 $0<p\le 1$ 時, 因 $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, 由第三節例 2 知其爲發散, 但利用 Leibniz 審斂法知級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 爲收斂, 是以原級數爲條件收斂. □

一級數 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$, 若轉化爲 $a_2+a_1+a_3+a_4+\cdots+a_n+\cdots$, 我們可用簡單語言說第一及第二項對調, 但若對調情形不是十分簡單, 我們面臨如何嚴格界定的問題. 當我們考慮有限級數之重排時, 我們發現各項位置可以變動但各『項』不能增多也不能減少, 這就是對射的觀念, 於是有以下之定義.

定義 8.18

設 $T\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 爲一對射函數, 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 與 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 爲二級數, 其項間有如下之關係 : $b_n=a_{T(n)}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, 則稱級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ 爲級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 之一**重排** (rearrangement).

例 2. 設 $T\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}: T(n)=\begin{cases} n+1, & \text{若 } n \text{ 爲奇數,}\\ n-1, & \text{若 } n \text{ 爲偶數,}\end{cases}$ 則函數 T 顯然爲一對射, 且

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{T(n)} = a_2 + a_1 + a_4 + a_3 + a_6 + a_5 + \cdots$$

乃 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 之一重排. □

定理 8.19

設級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲絕對收斂並設其和爲 s, 則級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 之任一重排亦爲絕對收斂, 且其和爲 s.

【證】參閱附錄十. □

由上述定理可知, 一絕對收斂級數不因重排而更改其收斂性及其和. 但對於任一實數 r, 我們可將一條件收斂級數作一適當的重排, 使其和恰爲 r, 甚至可重排而使其成爲一發散級數, 這些觀念稍爲超出本課程之程度, 有興趣讀者可參閱 Rudin: Principles of Mathematical Analysis, 2nd ed. 在此我們僅舉一例以說明這種現象.

例 3. 在第四節例 3 我們曾證明

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots .$$

則

$$\begin{aligned} \ln 2 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \cdots\\ +)\quad \frac{1}{2}\ln 2 &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \cdots\\ \hline \frac{3}{2}\ln 2 &= 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + 0 + \cdots \end{aligned}$$

最末一式之右端乃原級數之一重排, 此乃說明一條件收斂級數之重排之和未必與原來之和相等. □

定理 8.20 (非正項級數之比值審斂法)

設 $a_n \neq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r.$

(1) 若 $r < 1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲絕對收斂 ;

(2) 若 $r > 1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲發散 ;

(3) 若 $r = 1$, 則此法不靈 .

【證】(1) 當 $r < 1$ 時, 由正項級數之比值審法知, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲收斂, 亦即此級數爲絕對收斂.

(2) 當 $r > 1$ 時, 由正項級數之比值審法之證明中, 我們知級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 無小尾性, 但

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| \neq 0 \ \Leftrightarrow\ \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0,$$

是以知級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 無小尾性, 故爲發散.

(3) 讀者若觀察例 1 之交錯 p 級數, 可發現其 r 值皆爲 1. 故當 $r = 1$ 時, 級數可爲絕對收斂可爲條件收斂, 亦可爲發散. □

定理 8.21 (非正項級數之根值審斂法)

設 $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = \rho,$

(1) 若 $\rho < 1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲絕對收斂;

(2) 若 $\rho > 1$, 則級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲發散 ;

(3) 若 $\rho = 1$, 則此法不靈 .

【證】仿定理 8.20 之證明, 讀者自證之. □

例 4. 試問級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(1 - n^{1/n})^n$ 爲絕對收斂? 條件收斂? 或爲發散?

【解】令 $a_n=(1-n^{1/n})^n$, 則由第一節例 1 知 $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1/n}=1$, 是以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}|a_n|^{1/n} &= \lim_{n\to+\infty}((n^{1/n}-1)^n)^{1/n}\\ &= \lim_{n\to+\infty}(n^{1/n}-1)=0<1,\end{aligned}$$

故知原級數爲絕對收斂. □

§ 8.6 冪級數與收斂區間

以上各節所討論的都是以常數爲項的所謂常數級數. 很自然的我們會連帶想起, 以函數爲項的級數. 今設有一函數序列 $\{f_0,f_1,\ldots,f_n,\ldots\}$, 其中每一 f_n 均以 D 爲其共同的定義域. 對於任一 $x\in D$, 皆可形成級數 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$, 當然 D 中可能有些 x 使得級數 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$ 爲收斂, 有些也許就使得 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$ 爲發散. 我們將可在本節的討論中發現, 這種函數級數不但是常數級數的一種推廣, 而且這將使函數的討論得到許多方便.

爲方便計, 對於一般函數級數 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)$, 我們不擬詳加討論, 僅舉少數範例, 而就其中最簡單且用途最廣的冪級數詳加探討. 其實, 單是冪級數就使我們足以研究夠多的函數.

定義 8.22

設 p, c_0, $c_1,\cdots$, $c_n,\cdots\in\mathbb{R}$, 則級數

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x-p)^n=c_0+c_1(x-p)+c_2(x-p)^2+\cdots$$

稱爲含 $x-p$ 之**冪級數** (power series), 而 c_n 稱爲**第 n 個係數** (the n-th coefficient).

對於一冪級數而言, 首要之問題當然是：x 爲何值時, 可使此冪級數爲收斂? 利用上一節的定理我們有：

1° **直接比值法**：由不等式 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{c_{n+1}(x-p)^{n+1}}{c_n(x-p)^n}\right|<1$ 解出 x 之範圍, 若其爲一有界非退化區間, 則應討論端點之收斂性.

2° **直接根值法**：由不等式 $\lim\limits_{n\to+\infty}|c_n(x-p)^n|^{1/n}<1$ 解出 x 之範圍, 若其爲一有界非退化區間, 則應討論端點之收斂性.

例 1. 試問 x 爲何值時, 可使冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ 爲收斂?

【解】由於

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} |x| \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

是以知 $\forall x \in \mathbb{R}$, 原冪級數皆爲收斂. □

例 2. 試問 x 爲何值時, 可使冪級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ 爲收斂?

【解】由於

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n\to+\infty} |x| \frac{n}{n+1} = |x|,$$

是以知當 $|x| < 1$ 時, 原冪級數爲收斂, 當 $|x| > 1$ 時, 原冪級數爲發散. 其次討論端點,

- 當 $x = 1$ 時, 原級數 $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ 顯爲發散.
- 當 $x = -1$ 時, 原級數 $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 利用 Leibniz 審斂法知級數爲收斂.

因之, 當 $x \in [-1, 1)$ 時, 方使冪級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ 爲收斂. □

定理 8.23

設 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 爲一冪級數, 則以下三情形恰有其一成立 :

(1) 此冪級數僅於 $x = p$ 一點爲收斂;

(2) 此冪級數於 $\mathbb{R}$ 上每一點均爲收斂;

(3) 存在一正數 r, 使得此冪級數於區間 $(p-r,\ p+r)$ 爲絕對收斂, 而於 $(-\infty, p-r) \cup (p+r, +\infty)$ 則爲發散.

【證】參見附錄十一. □

定義 8.24

定理 8.23 (3) 中所述之 r 稱爲冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 之**收斂半徑** (radius of convergence). 我們特稱定理 8.23 (1) 之情形者其收斂半徑爲 0, 而 (2) 之情形者其收斂半徑爲 $+\infty$. 此外我們稱使冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 爲收斂之最大範圍爲其**收斂區間** (interval of convergence).

尋求一冪級數之收斂區間之另一方法乃是先找出其收斂半徑, 若此半徑爲一正實數, 則需討論在端點是否爲收斂, 除稍早討論過之直接比值法及直接根值法外, 尙可簡化而成如下之間接法.

定理 8.25 (間接比值法)

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 之各係數 c_n 均不爲零,

(1) 若 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0$, 則此冪級數之收斂半徑爲 $+\infty$;

(2) 若 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l \in (0,+\infty)$, 則此冪級數之收斂半徑爲 $\frac{1}{l}$;

(3) 若 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = +\infty$, 則此冪級數之收斂半徑爲 0.

【證】(1) 設 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0$, 則 $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{p\}$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-p)^{n+1}}{c_n(x-p)^n}\right| = |x-p|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = 0 < 1.$$

故知此冪級數於 $\mathbb{R}$ 上每一點均爲收斂.

(2) 設 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = l \in (0,+\infty)$, 由

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-p)^{n+1}}{c_n(x-p)^n}\right| = |x-p|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |x-p|\,l,$$

知當 $|x-p| < 1/l$, 此冪級數爲絕對收斂, 當 $|x-p| > 1/l$, 此冪級數爲發散.

(3) 設 $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = +\infty$, 則 $\forall\, x \neq p$,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-p)^{n+1}}{c_n(x-p)^n}\right| = |x-p|\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = +\infty > 1.$$

故知此冪級數僅於 $x = p$ 一點爲收斂. □

定理 8.26 （間接根值法）

設 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 爲一冪級數.

(1) 若 $\lim_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n} = 0$, 則此冪級數之收斂半徑爲 $+\infty$;

(2) 若 $\lim_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n} = l \in (0,+\infty)$, 則此冪級數之收斂半徑爲 $\dfrac{1}{l}$;

(3) 若 $\lim_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n} = +\infty$, 則此冪級數之收斂半徑爲 0 .

【證】仿定理 8.25 之證明, 讀者自證之. □

例 3. 試求冪級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{(n+2)(n+3)} x^n$ 之收斂區間.

【解】1° 先求收斂半徑, 由

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n+2}{(n+3)(n+4)}}{\dfrac{(n+1)}{(n+2)(n+3)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+4)} = 1,$$

知收斂半徑爲 1.

2° 在點 $x=1$, 已知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ 爲發散, 而

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{n+1}{(n+2)(n+3)}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)} = 1,$$

知 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{(n+2)(n+3)}$ 爲發散.

3° 在點 $x=-1$, 我們利用 Leibniz 審斂法, 令

$$g\colon [1,+\infty) \to \mathbb{R} : g(x) = \frac{x+1}{(x+2)(x+3)},$$

則 $g'(x) = -\dfrac{x^2+2x-1}{(x+2)^2(x+3)^2} < 0,\ \forall x \geq 1.$ 是以 g 在 $[1,+\infty)$ 爲遞減, 且因 $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$, 故知級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n+1)(-1)^n}{(n+2)(n+3)}$ 爲收斂.

4° 綜合以上三點知此冪級數之收斂區間爲 $[-1,1)$. □

例 4. 試求級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{x^{2n}+5}$ 之收斂範圍.

【解】本題之級數並非冪級數, 因此定理 8.25 間接比值法與定理 8.26 間接根值法皆不能使用, 唯有使用直接比值 (根值) 法.

1° 若 $|x|>1$, 令 $a_n=\dfrac{1}{x^{2n}+5}$, 由於

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{2n+2}+5}}{\dfrac{1}{x^{2n}+5}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{x^{2n}+5}{x^{2n+2}+5}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{5}{x^{2n}}}{x^2+\dfrac{5}{x^{2n}}}=\frac{1}{x^2}<1.$$

故知級數於 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 爲收斂.

2° 若 $|x|=1$, 則因

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x^{2n}+5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\neq 0,$$

級數不具小尾性, 是爲發散.

3° 若 $|x|<1$, 則因

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x^{2n}+5}=\frac{1}{5}\neq 0,$$

級數不具小尾性, 是爲發散.

綜合以上三點知此級數僅於集合 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 爲收斂. □

例 5. 試問哪些 $x\in\mathbb{R}$ 可使 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^n}{n!}+\frac{n^2}{x^n}\right)$ 爲收斂?

【解】我們可將原級數拆爲以下二級數之和: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$ 及 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{x^n}$.

1° 對於級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, 由例 1 知此級數之收斂區間爲 $\mathbb{R}$.

2° 對於級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{x^n}$, 顯然當 $x=0$ 時, 此級數無意義, 當 $x\neq 0$ 時, 由於

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\dfrac{(n+1)^2}{x^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{x^n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{|x|}=\frac{1}{|x|},$$

知當 $|x|>1$ 時, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{x^n}$ 爲收斂; 當 $0<|x|<1$ 時, $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{x^n}$ 爲發散. 其次當 $x=1$ 時, 顯然級數 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{1^n}$ 爲發散. 當 $x=-1$ 時, 級數 $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{(-1)^n}$ 亦爲發散.

3° 綜合以上二點, 當 $|x|>1$ 時, 方可使原級數爲收斂. □

§ 8.7 級數與解析函數

定義 8.27

設 f 在點 p 之某一鄰近 $N_\delta(p)$ 爲 任意階可微分, 我們稱冪級數

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n+\cdots$$

爲 f 在點 p 之 **Taylor 級數**; 當 $p=0$ 時, 稱其爲 **Maclaurin 級數**. 若 $\exists\delta>0$, 使得 $\forall x\in N_\delta(p)$, $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n$, 則稱 f 在點 p 爲**解析** (analytic).

性質 8.28

函數 f 在點 p 爲解析之充要條件爲: 存在 $\delta>0$, 使得 $\forall x\in N_\delta^*(p)$, $\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0$. 其中 $R_n(x)$ 爲 f 在點 p 之 n 階 Taylor 展開式之餘項.

【證】設 $P_{n-1}(x)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(p)}{j!}(x-p)^j$, 此乃 f 在點 p 之 Taylor 級數之前 n 項部分和, 由第四章之 Taylor 定理知,

$$f(x)=P_{n-1}(x)+R_n(x),\ \forall x\in N_\delta^*(p).$$

是以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}R_n(x)=0 &\Leftrightarrow f(x)=\lim_{n\to+\infty}P_{n-1}(x)\\ &\Leftrightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n.\end{aligned}$$

□

例 1. 試求函數 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 之 Maclaurin 級數, 及此冪級數之收斂區間, 並證 f 在點 0 爲解析的.

【解】由於

$$\begin{aligned}
&f(x) = (1-x)^{-1}, && f(0) = 1,\\
&f'(x) = (1-x)^{-2}, && f'(0) = 1,\\
&f''(x) = 2!(1-x)^{-3}, && f''(0) = 2!,\\
&f'''(x) = 3!(1-x)^{-4}, && f'''(0) = 3!,\\
&\quad\vdots\\
&f^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}, && f^{(n)}(0) = n!.
\end{aligned}$$

是以 f 之 Maclaurin 級數爲

$$\sum_{0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$$

此乃一以 x 爲公比之等比級數, 顯然當 $x \in (-1,1)$, 上述級數收斂於函數 $\dfrac{1}{1-x} = f(x)$, 換言之, 此冪級數之收斂區間爲 $(-1,1)$; 此外, $\forall x \in (-1,1)$, $f(x)$ 等於其 Maclaurin 級數, 是以知 f 在點 0 爲解析的. □

在微積分發展之初期, 有人以爲任何函數皆可展爲 Taylor 級數而且二者相等, 其實這是不正確的. 縱使 f 在點 $N(p)$ 爲任意階可微分, 但 f 在點 p 之 Taylor 級數未必在 $N(p)$ 爲收斂, 甚至當 Taylor 級數在 $N(p)$ 爲收斂時, 亦未必收斂於 $f(x)$, 亦即 f 未必爲解析, 如下例所示 :

例 2. 試證函數

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & \text{若 } x \neq 0,\\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

在點 0 不爲解析.

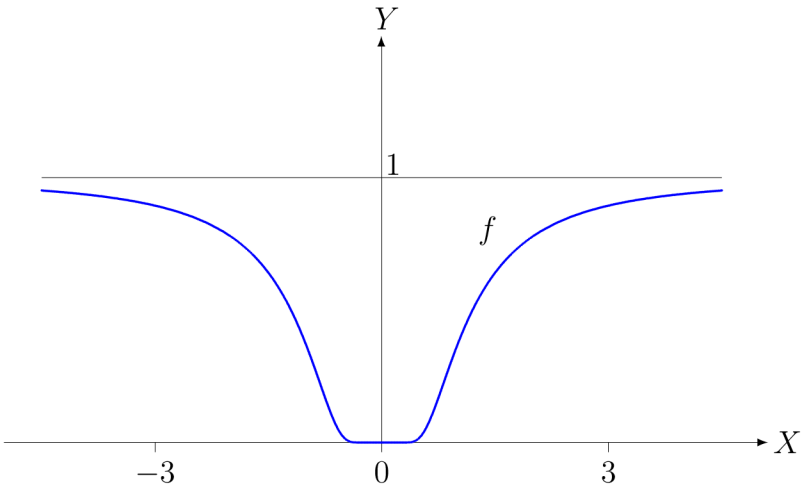


圖 8–6

【解】若 $x \neq 0$, 則 $f'(x) = D(\exp(-1/x^2)) = 2x^{-3}\exp(-1/x^2)$. 又

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\exp(-1/x^2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{\exp(1/x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1/x^2}{[\exp(1/x^2)](-2/x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2\exp(1/x^2)} = 0.$$

故得

$$f'(x) = \begin{cases} 2x^{-3}\exp(-1/x^2), & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$$

依次類推之, 可得 $f''(x)$, $f'''(x)$, $\cdots$, $f^{(n)}(x)$, $\cdots$ 等, 而由此可知, f 爲任意階可微分函數, 然而 f 在點 0 之 Maclaurin 級數爲

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}0\,x^n = 0+0+\cdots+0+\cdots = 0,\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

此一 Maclaurin 級數雖在任一 $x \in \mathbb{R}$ 均爲收斂, 但其收斂值均不等於 $f(x)$, 除非 $x = 0$, 是以 f 在點 0 不爲解析. (參閱圖 8–6).

§ 8.8 冪級數之運算

一般函數直接以定義 8.27 或性質 8.28 證明其於某點 p 爲解析, 並非易事, 我們需要一些有關冪級數的基本性定理, 本節中將詳細介紹. 以下之定理或定義中, 若提及收斂半徑 $r > 0$, 皆表示 r 爲一正數或 $+\infty$.

定理 8.29

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-p)^n$ 與 $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n(x-p)^n$ 之收斂半徑分別爲 $r_1(>0)$, $r_2(>0)$, 則 $\forall\, x\in(p-r,p+r)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-p)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}b_n(x-p)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)(x-p)^n,$$

其中 $r = \min\{r_1, r_2\}$.

【證】利用級數之線性性質立即可得證. □

二冪級數之差可視第一冪級數加上 -1 乘上第二冪級數, 故只需將上述定理中之加號改爲減號即可.

定理 8.30

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-p)^n$ 與 $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-p)^n$ 之收斂半徑分別爲 $r_1(>0)$, $r_2(>0)$, 則 $\forall\, x \in (p-r, p+r)$,

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-p)^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(x-p)^n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n,$$

其中 $r = \min\{r_1, r_2\}$, $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

【證】證明超出本課程之程度, 從略. □

二冪級數之商係利用『積之公式』逐項推導出來, 由於過分繁雜, 實用之價值不大, 故在此從略. 以下我們將探討有關冪級數之微分和積分之觀念, 這是冪級數最重要的貢獻, 它使許多冪級數得以衍生出更多有用的冪級數.

定理 8.31

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 之收斂半徑爲 r, 則 冪級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(x-p)^{n-1}$ 之收斂半徑亦爲 r.

【證】參閱附錄十二. □

定理 8.32

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 之收斂半徑 r 爲正或 $+\infty$, 若函數

$$f\colon (p-r, p+r) \to \mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n.$$

則 f 爲可微分, 且

$$\forall\, x \in (p-r, p+r),\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(x-p)^{n-1}$$

【證】參閱附錄十二. □

註： 在第二章中我們曾證明 n 個可微分函數之和的導數等於各函數導數之和, 亦即

$$D\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big) = \sum_{k=1}^{n} Df_k(x).$$

但當函數數目不爲有限時, 此一性質是否仍爲有效? 上述定理之結論提供我們部分答案：

$$D\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n\Big) = f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(x-p)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} Dc_n(x-p)^n,$$

說明對於收斂之冪級數, 微分運算子 "D" 可與『和』符號 $\sum$ 對調.

定理 8.33

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 之收斂半徑 r 爲正或 $+\infty$, 若函數

$$f\colon (p-r, p+r) \to \mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n.$$

則冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 恰爲 f 在點 p 之 Taylor 級數. (即 f 在點 p 爲解析).

【證】參閱附錄十二. □

定理 8.34

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 之收斂半徑 r 爲正或 $+\infty$, 若函數

$$f\colon (p-r, p+r) \to \mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n.$$

則 $\forall\, x \in (p-r, p+r)$, f 在區間 $[p, x]$ 爲可積, 且

$$\int_p^x f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-p)^{n+1}\ .$$

【證】參閱附錄十二. □

註： 和稍早之註相似, 在第六章中我們曾證明 n 個可積函數之和的積分等於個別積分之和, 亦即

$$\int_a^b \Big(\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\Big)\,dx = \sum_{k=1}^{n}\int_a^b f_k(x)\,dx.$$

由上述定理之結論我們得知：

$$\text{左端} = \int_p^x f(t)\,dt = \int_p^x \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t-p)^n\Big)\,dt,$$

$$\text{右端} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-p)^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_p^x c_n(t-p)^n\,dt.$$

說明對於收斂之冪級數, 積分符號 $\displaystyle\int_p^x$ 可與『和』符號 $\sum$ 對調.

例 1. 試證指數函數之存在性.

【解】考慮冪級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$, 在第六節中例 1 中, 我們知其於 $\mathbb{R}$ 上爲絕對收斂. 今設

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

由定理 8.32 知, $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x) = D\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} D\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f(x),$$

又 $f(0)=1$, 由第三章第四節指數函數之定義知, $f=\exp$. □

例 2. 試證正弦函數及餘弦函數之存在性.

【解】考慮二冪級數

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

由

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}|x^2|\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} = 0,$$

及

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}|x^2|\frac{1}{(2n+1)(2n+2)} = 0,$$

知以上二冪級數在 $\mathbb{R}$ 上爲絕對收斂. 今設

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots,$$
$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}\colon g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots,$$

由定理 8.32 知, $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots=g(x),$$
$$g'(x)=-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}-\cdots=-f(x),$$

又 $f(0)=0,\ g(0)=1$, 由第三章正弦函數及餘弦函數之定義知, $f=\sin,\ g=\cos.$ □

例 3. 試求雙曲正弦及雙曲餘弦函數之 Maclaurin 級數表示法.

【解】由例 1 知, $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

顯然, $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

$$e^{-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

是以 $\forall\, x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\sinh x&=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\Big)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2x^{2n+1}}{(2n+1)!}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh x&=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\Big)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2x^{2n}}{(2n)!}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots.\end{aligned}$$

□

例 4. 試求

(1) 函數 $f(x)=\ln(1+x)$ 之 Maclaurin 級數表示法;

(2) 函數 $g(x)=\ln(1-x)$ 之 Maclaurin 級數表示法;

(3) 函數 $h(x)=\ln x$ 之冪級數表示法.

【解】(1) 等比級數 $\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n$, 當公比 $-x$ 之絕對值小於 1 時, 爲收斂, 亦即 $\forall\, x\in(-1,1)$,

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n.$$

由定理 8.34 知, $\forall\, x\in(-1,\,1)$,

$$\begin{aligned}f(x)=\ln(1+x)&=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^x(-t)^n\,dt\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\\&=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots.\end{aligned}$$

(2) 利用 (1) 之結果, $\forall\, x\in(-1,1)$,

$$g(x)=\ln(1-x)=f(-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots-\frac{x^n}{n}-\cdots.$$

(3) 利用 (1) 之結果, $\forall\, x\in(0,2)$,

$$\begin{aligned}h(x)=\ln x&=f(x-1)\\&=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\cdots\\&\qquad+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\cdots.\end{aligned}$$

□

註: 本章第四節例 3 業已證明:

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots.$$

所以我們可將它與本例之 (1) 合併而寫爲

$$\forall\, x\in(-1,1],\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots.$$

例 5. 試求函數 $\dfrac{1}{1-x}\ln\dfrac{1}{1-x}$ 之 Maclaurin 級數表示法 .

【解】由等比級數之和的公式知, $\forall\, x\in(-1,1)$,

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots.$$

其次由例 4 知,

$$g(x)=\ln\frac{1}{1-x}=-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots,$$

利用冪級數之積公式可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x}=f(x)g(x)&=\Big(\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\Big)\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}\Big)\\&=x+\Big(1+\frac{1}{2}\Big)x^2+\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\Big)x^3+\cdots.\end{aligned}$$ □

例 6. 設 $f(x)=(1+x)^\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$.

(1) 試求 f 之 Maclaurin 級數 ;

(2) 試求上述 Maclaurin 級數之收斂半徑 ;

(3) 設由上述級數所界定之函數爲 $g(x)$. 試證 :

$$(1+x)g'(x)=\alpha g(x)\ 及\ \ (1+x)^\alpha=g(x).$$

【解】(1) 由於

$$\begin{aligned}f'(x)&=\alpha(1+x)^{\alpha-1},\\f''(x)&=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\\&\vdots\\f^{(n)}(x)&=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\end{aligned}$$

故 $f'(0)=\alpha,\ f''(0)=\alpha(\alpha-1),\cdots,f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$, 是以 f 之 Maclaurin 級數爲

$$1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

其中, 有關二項係數, 我們規定如下 : 設 $\alpha\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z}_+$.

$$\binom{\alpha}{n}=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, & 若\ n\in\mathbb{N},\\ 1, & 若\ n=0,\end{cases}$$

(2) 若 $\alpha\in\mathbb{N}$, 顯然 f 之 Maclaurin 級數爲一有限級數, 收斂半徑爲 $+\infty$, 若 $\alpha\notin\mathbb{N}$, 則因

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}}{\binom{\alpha}{n}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=1,$$

故知收斂半徑爲 1.

(3) 令 $g\colon (-1,\,1)\to\mathbb{R}:g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n$, 則

$$\begin{aligned}
g(x)&=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n}x^n+\cdots\\
&\Rightarrow\ g'(x)=\binom{\alpha}{1}+2\binom{\alpha}{2}x+\cdots+n\binom{\alpha}{n}x^{n-1}+\cdots\\
&\Rightarrow\ xg'(x)=\binom{\alpha}{1}x+2\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+n\binom{\alpha}{n}x^n+\cdots\\
&\Rightarrow\ (1+x)g'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)\binom{\alpha}{n+1}+n\binom{\alpha}{n}\right)x^n\\
&\qquad\qquad=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha\binom{\alpha}{n}x^n,\ (\text{括號內化簡})\\
&\qquad\qquad=\alpha g(x),
\end{aligned}$$

最後令 $h\colon(-1,1)\to\mathbb{R}:h(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x)^\alpha}$, 則

$$\begin{aligned}
h'(x)&=\frac{g'(x)(1+x)^\alpha-g(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}}\\
&=\frac{(1+x)^{\alpha-1}((1+x)g'(x)-\alpha g(x))}{(1+x)^{2\alpha}}=0,\ \forall\,x\in(-1,1)\\
&\Rightarrow\ h(x)=C,\ \forall\,x\in(-1,1)\\
&\Rightarrow\ h(x)=1,\ \forall\,x\in(-1,1),\ (\text{以 } x=0 \text{ 代入 } h)\\
&\Rightarrow\ g(x)=(1+x)^\alpha,\ \forall\,x\in(-1,1).
\end{aligned}$$

由以上之結果知, 當 $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n,\ \forall\,x\in(-1,1),$$

是以上述級數稱爲**二項級數** (binomial series). □

註：《 機率論 》中之負二項分配乃利用此處之二項級數.

或許有些讀者希望能將 $\tan x,\ \cot x,\ \sec x,\csc x$ 展爲 Maclaurin 級數, 它們的解法都相當繁複, 有興趣者可參考 Taylor, A.E.: Advanced Calculus, (1955), §19.3. 若僅需展開式之前幾項係數, 較快的方法是使用數學軟體, 如 Mathematica, Maple, MathCAD 等.

§ 8.9 積分之冪級數近似法

冪級數在許多應用學科皆被廣泛使用, 就以積分而言, 以下僅舉一例以說明如何以冪級數以解決積分之近似值問題, 唯近年來已有多種電腦軟體可輕易算出 Simpson 法之積分近似值, 以級數法解積分近似值似乎稍嫌麻煩, 但在《 數值分析 》中, 級數法仍具相當分量.

例 1. 試求 $\int_0^1 \exp(t^2)\,dt$ 的近似值以使誤差之絕對值小於 0.005.

【解】由上節之例 1 知, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!},$$

以 t^2 代 x, 則 $\forall\, t \in \mathbb{R}$,

$$\exp(t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{n!},$$

利用冪級數之積分公式可得

$$\int_0^1 \exp(t^2)\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n}}{n!}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(2n+1)},$$

若以上述級數之前 m 項部分和 (註 : 自第 0 項至第 $m-1$ 項) 爲積分值之近似值, 其餘部分爲誤差, 令之爲 $E(m)$, 由於

$$\begin{aligned}
E(m) &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} \\
&= \frac{1}{m!(2m+1)} + \frac{1}{(m+1)!(2m+3)} + \frac{1}{(m+2)!(2m+5)} + \cdots \\
&\le \frac{1}{m!(2m+1)} + \frac{1}{m!(m+1)(2m+1)} + \frac{1}{m!(m+1)^2(2m+1)} + \cdots \\
&= \frac{1}{m!(2m+1)} \left(1 + \frac{1}{(m+1)} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{m!(2m+1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}} = \frac{m+1}{m \cdot m!(2m+1)},
\end{aligned}$$

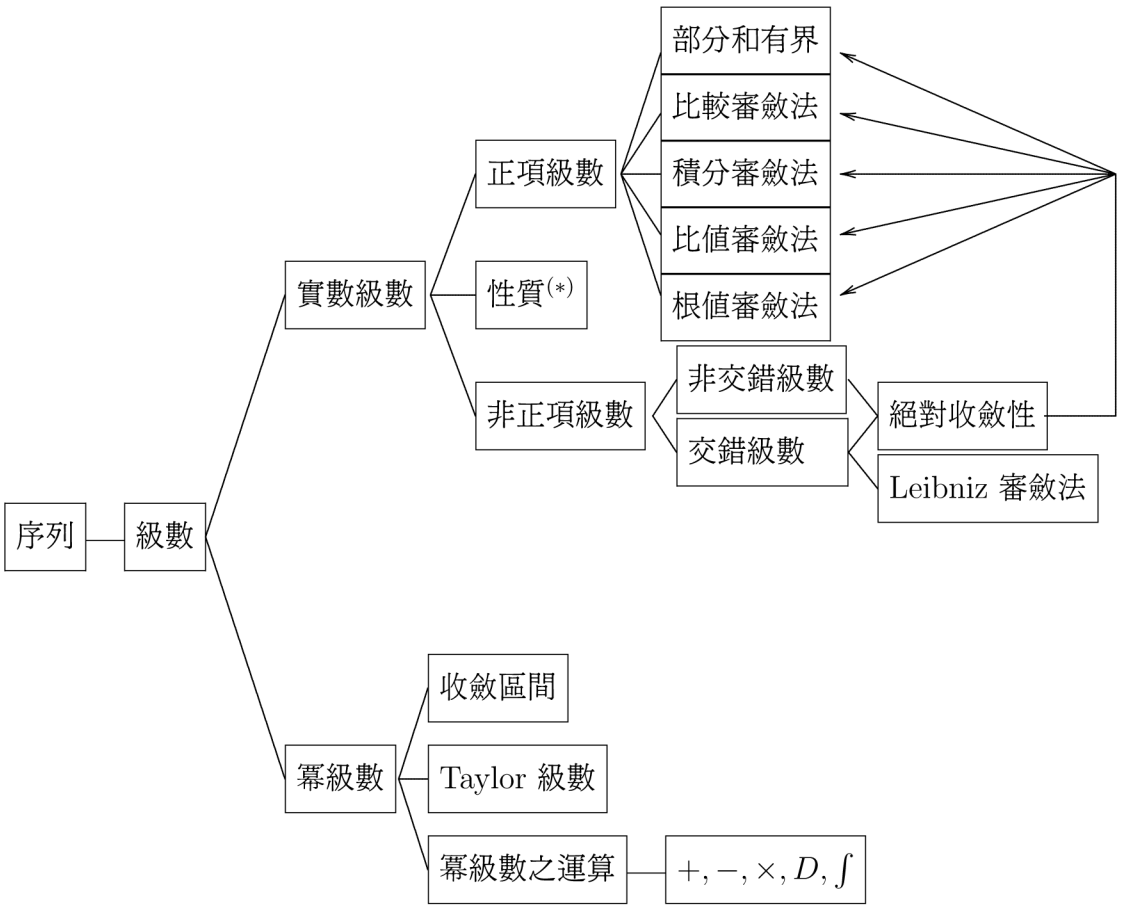
由題意

$$\begin{aligned}
|E(m)| < 0.005 &\Leftarrow \frac{m+1}{m \cdot m!(2m+1)} < 0.005 \\
&\Leftarrow\ m \ge 5.
\end{aligned}$$

是以 $\int_0^1 \exp(t^2)\,dt$ 的近似值爲級數之前五項, 即

$$\sum_{n=0}^{4} \frac{1}{n!(2n+1)} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 1.46177. \qquad \square$$

序列與級數系統圖



(*) 線性性質、小尾性、柯西性質.

第 八 章 習 題

序列

8-1 試問下列各序列是否爲收斂? 若爲收斂則求其極限.

(a) $\left\{\dfrac{e^n}{n^n}\right\}_{n\geq 1}$;

(b) $\left\{\dfrac{e^n}{n!}\right\}_{n\geq 1}$;

(c) $\left\{\dfrac{\cos(n\pi/2)}{n}\right\}_{n\geq 1}$;

(d) $\left\{\dfrac{n}{3}-\left[\dfrac{n}{3}\right]\right\}_{n\geq 1}$;

(e) $\left\{n(p^{1/n}-1)\right\}_{n\geq 1}$, 其中 $p>0$.

8-2 若 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{(n+k)(2n+k)}$, 試證 : 序列 $\{a_n\}_n$ 爲 收斂, 並求其極限.

[提示] 將 a_n 化爲某函數之 Riemann 和數.

8-3 若 $a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, 試證 : 序列 $\{a_n\}_n$ 爲收斂, 且

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\frac{a_1+2a_2}{3}.$$

8-4 設 $\{a_n\}_n$ 爲一實數序列, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=l\in\mathbb{R}$, 試利用『定義 8.2』證明: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}=l$.

8-5 設序列 $\{a_n\}_n$ 及 $\{b_n\}_n$ 滿足 :

(i) $a_1>b_1>0$;

(ii) $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$;

試證 : $\{a_n\}_n$ 及 $\{b_n\}_n$ 二序列皆爲收斂且其極限相等.

[提示] 利用『算幾不等式』.

實數級數

8-6 試判別下列各級數是否爲收斂? 若爲收斂, 試求其和.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$;

(b) $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n+1}$, 內 $|t|<1$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$;

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}$;

(e) $\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)0.5^n$;

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}$;

(g) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(h) $\sum_{n=1}^{+\infty}\tan^{-1}\frac{1}{1+n+n^2}$.

8-7 試判別下列各正項級數是否爲收斂?

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}n^3e^{-n}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-(1+\frac{1}{n})}$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n^3+n\right)^{-1/2}$;

(d) $\sum_{n=2}^{+\infty}\left(n^2-1\right)^{-1/2}$;

(e) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$;

(f) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n+1}}{(9+n)!}$.

8-8 試討論級數 $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{p^k-q^k}$, 內 $0<p<q$, 之斂散性.

8-9 若 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 爲絕對收斂級數, 試證 : 級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ 爲收斂.

8-10 試判別下列各交錯級數爲絕對收斂、條件收斂或發散?

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$;

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$;

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{\sqrt{n}}$;

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$, 其中 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 爲奇數,}\\ \frac{1}{(n-1)n}, & \text{若 } n \text{ 爲偶數.}\end{cases}$

8-11 試證 : 若 $a_n\geq 0, \forall n\in\mathbb{N}$ 且 $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ 爲收斂, 則 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ 亦爲收斂.

[提示] 利用算幾不等式.

冪級數

8-12 試求下列各冪級數之收斂半徑及收斂區間.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}2^{-n^2}x^n$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{2^n}$.

8-13 試問冪級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 於其收斂區間上收斂於何函數?

[提示] 考慮等比級數; 並利用定理 8.27 .

8-14 (a) 利用 $\tan^{-1}x=\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$, 試求 $\tan^{-1}x$ 之 Maclaurin 級數表示法.

(b) 試證 : $\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots$.

8-15 試問哪些 x 可使級數 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}|\ln x|^n$ 爲收斂.

8-16 試證 : $\forall\, x\in\mathbb{R}^*,\ \dfrac{x^8}{8!}-\dfrac{x^9}{9!}+\dfrac{x^{10}}{10!}-\dfrac{x^{11}}{11!}+\cdots>0.$

8-17 試求 $\sin^{-1}x$ 之 Maclaurin 級數表示法.

[提示] 先微分之, 再利用二項級數.

8-18 試解釋爲何函數

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x<0,\\ x^4, & \text{若 } x\geq 0,\end{cases}$$

不能以 Maclaurin 級數表示之.

Chapter 9

n維空間與向量函數

在預篇中我們已提及, 微積分中之函數 $f\colon A \to B$, 其內 A 有一維及多維二種, B 亦然, 是以我們可以分以下四大類 :

	$B \subset \mathbb{R}$	$B \subset \mathbb{R}^m$
$A \subset \mathbb{R}$	(1)	(2)
$A \subset \mathbb{R}^n$	(3)	(4)

(1) 若 A 與 B 皆爲一維, 我們稱 f 爲一**實值之實變函數** ;

(2) 若 A 爲一維, B 爲多維, 我們稱 $\mathbf{f}$ 爲一**實變向量函數**, 簡稱爲向量函數;

(3) 若 A 爲多維, B 爲一維, 我們稱 f 爲一**多變實值函數**, 簡稱爲多變函數;

(4) 若 A, B 皆爲多維, 我們稱 $\mathbf{f}$ 爲一**多變向量函數**.

在前面八章中, 我們所討論的函數絕大部分爲第一類的實值實變函數, 本章起我們將討論第二及第三類函數, 至於第四類函數在初等微積分中不討論, 留待高等微積分再詳細研究. 在此之前, 我們曾多次提及一維、多維甚至 n 維, 大家都知道所謂二維就是 2D, 三維就是 3D, 但數學需要更爲明確的定義, 因此, 我們將從多維空間談起, 其次是介紹有關向量之運算, 接下來則是向量函數及其極限、連續、微分、積分等概念.

§ 9.1 n 維空間

在前八章中, 我們考慮之元素幾乎都是實數, 今後我們需要在多維空間上探討, 其中之運算及某些基本概念乃爲不可或缺之工具.

一. 實數系 $\mathbb{R}$ 中有 $+,\ \cdot,\ \leq,\quad (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ 成爲一很好的體系, 我們稱其爲一具完全性之序體.

二. $\mathbb{R}^2 \underset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$, 我們又規定 :

- 加法：$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$,
- 外運算乘法：$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 通常 $\mathbb{R}^2$ 不賦與次序觀念.

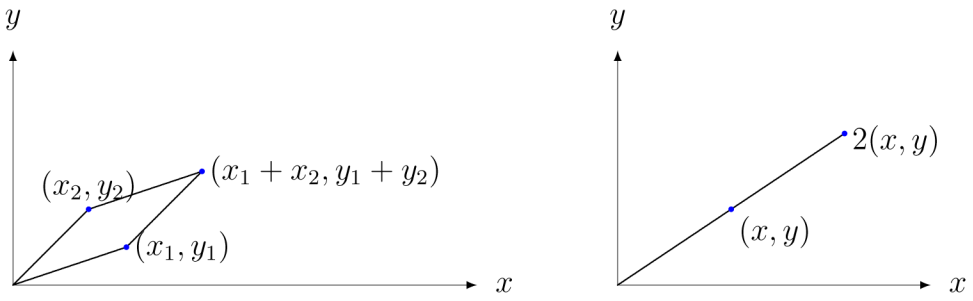


圖 9–1

三. $\mathbb{R}^3 \underset{\text{def}}{=} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x,\ y,\ z \in \mathbb{R}\}$, 我們規定：

- 加法 (addition)：$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2)$,
- 外運算乘法或純量乘法 (scalar multiplication)： $\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 通常 $\mathbb{R}^3$ 不賦與次序觀念.

四. $\mathbb{R}^n \underset{\text{def}}{=} \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1,\ \cdots,\ x_n \in \mathbb{R}\}$, 我們規定：

- 加法：$(x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) = (x_1 + y_1,\ \cdots,\ x_n + y_n)$;
- 外運算乘法：$\alpha(x_1, \cdots, x_n) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n)$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$.
- 絕對值 † : $|(x_1, \cdots, x_n)| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$;
- 距離：$d((x_1, \cdots, x_n),\ (y_1, \cdots, y_n)) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2}$;
- $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, d)$ 稱爲 n **維歐氏空間** (Euclidean space);
- 此時, $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 稱爲**一向量** (vector), 書寫時, 常寫爲 $\vec{x}$.
- $n > 1$ 時通常 $\mathbb{R}^n$ 不賦與次序觀念.
- 鄰近：$N_\epsilon(\mathbf{p}) \underset{\text{def}}{=} \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, |\mathbf{p} - \mathbf{x}| < \epsilon\right\}$, 內 $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n,\ \epsilon > 0$;
- 去心鄰近：$N_\epsilon^*(\mathbf{p}) \underset{\text{def}}{=} N_\epsilon(\mathbf{p}) \setminus \{\mathbf{p}\}$;
- 聚點：若 $A \subset \mathbb{R}^n,\ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, 我們稱 $\mathbf{p}$ 爲 A 之**一聚點** (accumulation point), 如果 $\forall\, \epsilon > 0,\ N_\epsilon^*(\mathbf{p}) \cap A \neq \varnothing$; 我們以 A' 表 A 之所有聚點集合, 稱爲 A 之**導來集** (derived set).

† 部分學者將絕對值寫爲 $\|(x_1, \cdots, x_n)\|$.

- 內點：設 $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$, 我們稱 $\mathbf{p}$ 爲 A 之一**內點** (interior point), 如果存在 $\delta > 0$ 使得 $N_\delta(\mathbf{p}) \subset A$. 我們以 $\overset{\circ}{A}$ 表A 之所有內點所成之集合, 稱爲 A 之**內部** (interior).

設 $A \subset \mathbb{R}^n$, 我們稱 A 之一**開集** (open set), 如果 $A = \overset{\circ}{A}$. 我們稱 A 之一**閉集** (closed set), 如果 $A' \subset A$. 我們稱 A 之一**有界** (bounded), 如果 A 包含於某鄰近之內. 又, 若 A 爲一有界閉集, 我們亦稱 A 爲一**緊緻集合** (compact set).

例 1. 設 $\mathbf{p} = (2,1) \in \mathbb{R}^2$, $A = \left\{(x,y) \,\middle|\, \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1\right\}$.

(1) 試問 $\mathbf{p}$ 是否爲 A 之聚點?

(2) 試問 $\mathbf{p}$ 是否爲 A 之內點?

(3) 試問 A 是否爲一開集?

(4) 試問 A 是否爲一閉集?

(5) 試問 A 是否爲一緊緻集合?

【解】(1) 由於 $\mathbf{p} = (2,1)$ 滿足

$$\frac{2^2}{9} + \frac{1^2}{4} = \frac{25}{36} < 1,$$

知點 $\mathbf{p}$ 在 A 內, 顯然 $\mathbf{p}$ 之任一去心鄰近與 A 之交集皆爲非空, 故知 $\mathbf{p}$ 爲 A 之聚點.

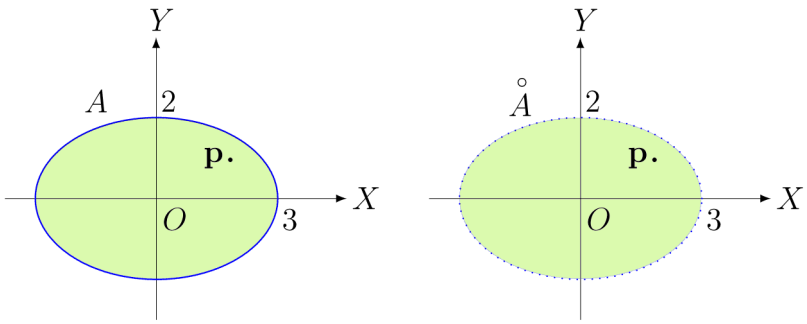


圖 9–2

(2) 由於點 $\mathbf{p}$ 在 A 內且不在邊界上, 若取 δ 爲夠小之正數, 例如 $\delta = 0.01$, 顯然 $N_\delta(\mathbf{p}) \subset A$, 是以 $\mathbf{p}$ 爲 A 之一內點.

(3) 不, A 不爲一開集, 因爲 $\overset{\circ}{A} = \left\{(x,y) \,\middle|\, \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} < 1\right\}$ 爲無邊界之橢圓區域 (參閱圖 9–2 之右圖), 與 A 不相等.

(4) 是, 因爲 $A' = \left\{(x,y) \,\middle|\, \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1\right\} = A$, 故知 A 爲一閉集.

(5) 顯然 $A \subset N_4(0,0)$, 故知其爲有界, 而由 (4) 知其爲一閉集, 故爲一緊緻集合. □

五. 點向量與自由向量

如同在一維空間 $\mathbb{R}$ 之情形, 我們以一直線之點表之, 在二維空間 $\mathbb{R}^2$ 我們以一平面之點表之. 對於三維空間 $\mathbb{R}^3$ 我們則以立體空間表之, 首先在立體空間中選定一點做爲原點, 再決定單位 1 之長度, 則 $\mathbb{R}^3$ 中任一元素 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ 均可唯一表示於此立體空間之中. 爲方便今後之討論, 令

$$\mathbf{i} = (1,0,0),\ \mathbf{j} = (0,1,0),\ \mathbf{k} = (0,0,1),\ ^{\ddagger}$$

並稱其爲**坐標向量** (coordinate vectors), 則對於 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, 皆可寫爲 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$.

自立體空間中之一點 $A(x_1, x_2, x_3)$ 至另一點 $B(y_1, y_2, y_3)$ 可決定自 A 至 B 之有向線段 $\overrightarrow{AB}$, 當然, 亦可決定一自 B 至 A 之有向線段 $\overrightarrow{BA}$, 凡此種種不同起點不同終點之有向線段通常稱爲**自由向量** (free vector), 顯然, 對於任意自由向量 $\overrightarrow{AB}$, 我們均可找到唯一點 $C(z_1, z_2, z_3)$, 使得以原點 O 爲起點以 C 爲終點之自由向量 $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{AB}$ 同向且等長, 其實, 只需令 $z_1 = y_1 - x_1,\ z_2 = y_2 - x_2,\ z_3 = y_3 - x_3$ 即可. 上述觀念在 $\mathbb{R}^2$ 上則更爲簡單.

爲了便於說明, 我們稱 $\mathbb{R}^n$ 之元素爲一『點向量』. 對於任意自然數 n, 我們皆可討論一 n 維點向量, 而當 $n = 1, 2, 3$ 時, 我們又有自由向量, 我們將以二維之情形說明『點向量』與『自由向量』基本上並無差異, 令

$$V^2 = \{\overrightarrow{OA} \mid \overrightarrow{OA} \text{ 以原點爲起點之自由向量}\}.$$

	點向量	自由向量
元素	$(x,y) \in \mathbb{R}^2$	↗
集合	$\mathbb{R}^2$	V^2

$\mathbb{R}^2$ 雖與 V^2 不同, 但二者卻爲同構, 理由是 :

---

‡ 有些學者將單位向量 $\mathbf{u}$ 一律記爲 $\hat{\mathbf{u}}$, 因此 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 乃被記爲 $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$.

(1) $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to V^2 : \phi(a,b) = \overrightarrow{OA}$, 內 $A = (a,b)$, 爲一對射,
(有"點"就可找到"箭", 有"箭"就可找到"點"(箭頭)).

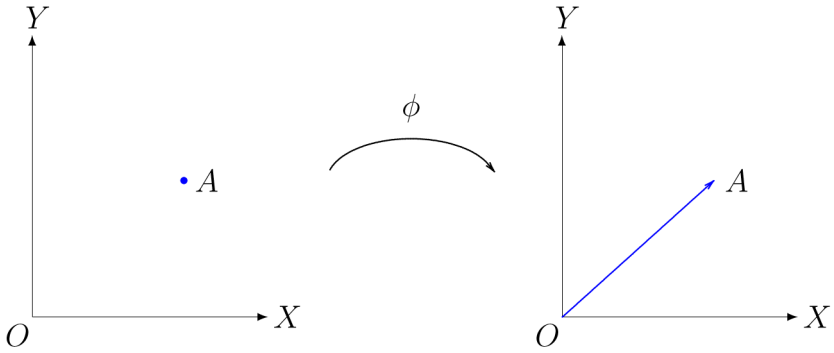


圖 9–3

(2) $\phi((a,b)+(c,d)) = \phi(a,b) + \phi(c,d)$,

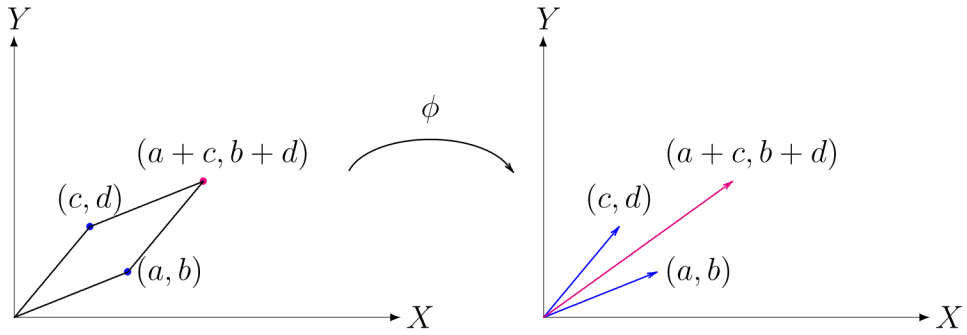


圖 9–4

(3) $\phi(\alpha \cdot (a,b)) = \alpha \cdot \phi(a,b)$.

有一部汽車在公路上跑, 爲研究其運動, 我們將其視爲一點. 自由向量與點向量正如汽車與其代表點之關係. 同理, $\mathbb{R}^3$ 雖與 V^3 不同, 二者亦爲同構. $n > 3$ 時, 只有 $\mathbb{R}^n$ 卻無 V^n.

§ 9.2 向量之運算

向量之運算除上述之內運算 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ 及純量乘法 $\alpha\mathbf{x}$ 外, 尚有以下二種運算.

定義 9.1

(1) 對於任意 $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)\in\mathbb{R}^3$, 我們規定 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 之**叉積** (cross product) 爲

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\times\mathbf{y}&=(x_2y_3-x_3y_2)\mathbf{i}+(x_3y_1-x_1y_3)\mathbf{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\mathbf{k}\\&=\begin{vmatrix}x_2&x_3\\y_2&y_3\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}x_1&x_3\\y_1&y_3\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{vmatrix}\mathbf{k}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

(2) 對於任意 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$, $\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbb{R}^n$, 我們規定 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 之**內積** (inner product or scalar product) 爲

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\sum_{j=1}^{n}x_jy_j.$$

由上述定義顯知, 兩個「三維向量」之叉積仍爲一「三維向量」, 但兩個「n 維向量」之內積則爲一實數. 初學者往往將純量乘法 (scalar multiplication) 與內積 (scalar product) 相混, 前者是一純量 (即實數) 乘以一向量, 而得一向量, 後者則是二 n 維向量相乘 (dot product) 而得一純量.

有關內積之一些性質

性質一 $\forall\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}=|\mathbf{x}|^2$. (易明)

性質二 若 $\mathbf{x}$ 與 $\mathbf{y}$ 均爲三維 (或二維) 之非零向量, 其夾角爲 $\theta\in[0,\pi]$, 則

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\theta.$$

$$\left[\text{因此, 二向量之夾角爲 }\theta=\cos^{-1}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|}.\right]$$

【證】由於 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}-\mathbf{x}$ 形成一三角形, 如圖 9–5 所示. 利用餘弦定律知

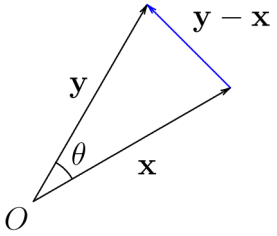


圖 9–5

$$|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2=|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2-2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta.$$

是以

$$\begin{aligned}2|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\cos\theta&=|\mathbf{x}|^2+|\mathbf{y}|^2-|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2\\&=x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2-(y_3-x_3)^2\\&=2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)=2(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}).\end{aligned}$$

故得證 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\theta$. □

由性質二知：二非零向量互相垂直之充要條件爲二者之內積爲 0.

性質三 若 $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, 則

(i) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x}$;

(ii) $\alpha\mathbf{x}\cdot\beta\mathbf{y} = \alpha\beta(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})$;

(iii) $\mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$;

(iv) $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$. (此乃 Cauchy 不等式).

【證】(i) 至 (iii) 讀者自證之;

(iv) 若 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 同爲二或三維向量, 由性質二立即可得證, 但若 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, n 爲任意自然數時, 證明見第十章定理 10.24 之證. □

方向餘弦與方向數

設向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0)$ 與坐標向量 $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ 之夾角分別爲 α, β, γ, 我們稱其爲 $\mathbf{x}$ 之**方向角** (direction angles), 而

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{x}||\mathbf{i}|} = \frac{x_1}{|\mathbf{x}|},$$

$$\cos\beta = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{j}}{|\mathbf{x}||\mathbf{j}|} = \frac{x_2}{|\mathbf{x}|},$$

$$\cos\gamma = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{x}||\mathbf{k}|} = \frac{x_3}{|\mathbf{x}|},$$

則稱爲 $\mathbf{x}$ 之**方向餘弦** (direction cosines). 顯然

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{|\mathbf{x}|^2} = 1.$$

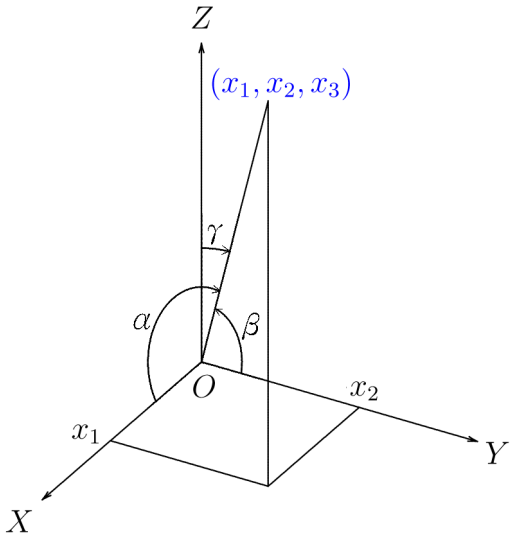


圖 9–6

任何與 $\mathbf{x}$ 之方向餘弦成比例 (當然也和 x_1, x_2, x_3 成比例) 之三數 l, m, n, 則稱爲 $\mathbf{x}$ 之一組**方向數** (direction numbers).

三維直線之表示法

法一： 利用向量表示法, 我們可以將經過點 $\mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3)$ 而以向量 $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$ 爲方向之直線 L 表爲

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{p}+t\mathbf{v},\ t\in\mathbb{R},$$

(此即所謂直線 L 之向量參數表示法). 我們稱 $\mathbf{v}$ 爲此直線之**方向向量** (direction vector). 若以其分量表示上述之直線, 則爲

$$\begin{cases} x_1=p_1+tv_1, \\ x_2=p_2+tv_2, \\ x_3=p_3+tv_3, \end{cases} \quad t\in\mathbb{R},$$

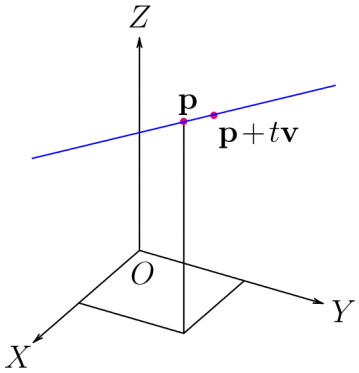


圖 9–7

法二： 若 $v_1,\ v_2,\ v_3$ 均不爲 0, 則 L 又可以對稱式表爲

$$\frac{x_1-p_1}{v_1}=\frac{x_2-p_2}{v_2}=\frac{x_3-p_3}{v_3},$$

法三： 又若 $l,\ m,\ n$ 爲 $\mathbf{v}$ 之方向數且皆爲非零, 則 L 亦可表爲

$$\frac{x_1-p_1}{l}=\frac{x_2-p_2}{m}=\frac{x_3-p_3}{n}.$$

註： 以上三法中, $x_1,\ x_2,\ x_3$ 亦可寫爲 $x,\ y,\ z$.

三維平面之表示法

利用向量表示法, 我們可將經過一點 $\mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3)$ 而垂直於某非零向量 $\mathbf{N}=(A,B,C)$ 之平面 Q 表爲

$$(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{N}=0,$$

亦即

$$A(x_1-p_1)+B(x_2-p_2)+C(x_3-p_3)=0,$$

其實 $\mathbf{N}$ 之任一組方向數 l,m,n 皆可將平面 Q 表爲

$$l\,(x_1-p_1)+m(x_2-p_2)+n(x_3-p_3)=0,$$

在此, 向量 $\mathbf{N}$ 稱爲平面之**法向量** (normal vector).

例 1. 試證 : 在 $\mathbb{R}^3$ 內, 點 $P(x_0,y_0,z_0)$ 與平面 $E:ax+by+cz+k=0$ 之距離爲

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+k|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

【證】若點 P 在 E 上, 則上述結論顯然爲眞. 以下只證 P 不在 E 上之情形. 設過點 P 且垂直於平面之直線 (即法線) 與平面之交點爲 M, 又設 $Q(x,y,z)$ 爲平面上 M 除外之任一點, 則

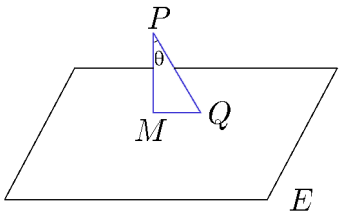


圖 9–8

- $\triangle PQM$ 爲一直角三角形,
- PM 等於點 P 與平面 E 之距離 d,
- 向量 $\overrightarrow{MP}$ 與法向量 $\mathbf{N}(a,b,c)$ 平行, 是以

$$PM = |\overrightarrow{QP}| \cdot |\cos\theta|, \ (\text{內 } \theta = \overrightarrow{QP} \text{ 與法向量 } \mathbf{N} \text{ 之夾角})$$

$$= |\overrightarrow{QP}| \frac{|\mathbf{N}\cdot\overrightarrow{QP}|}{|\mathbf{N}|\cdot|\overrightarrow{QP}|}$$

$$= \frac{|\mathbf{N}\cdot\overrightarrow{QP}|}{|\mathbf{N}|}$$

$$= \frac{|a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= \frac{|ax_0+by_0+cz_0+k|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

有關叉積之一些性質

以下有內關叉積之性質, 證明很容易, 留給讀者自研.

性質一 $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = -(\mathbf{y}\times\mathbf{x})$.

性質二 $\mathbf{x}\times\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

性質三 $(\alpha\mathbf{x})\times(\beta\mathbf{y}) = \alpha\beta(\mathbf{x}\times\mathbf{y})$.

性質四 $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}+\mathbf{z}) = \mathbf{x}\times\mathbf{y}+\mathbf{x}\times\mathbf{z}$.

性質五 $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{x} = 0 = (\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{y}$.

性質六 $|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2 - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2$.

性質七 若 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 皆爲非零向量, 則 $|\mathbf{x}\times\mathbf{y}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\sin\theta$, 內 $\theta\in[0,\pi]$ 爲此二向量之夾角.

性質八 若 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 皆爲非零向量, 則 $\mathbf{x}\times\mathbf{y} = \mathbf{0}$ 之充要條件爲此二向量之夾角等於 0 或 π.

叉積之幾何意義 :

由性質五及性質七, 我們知道 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ 與 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 均爲垂直. 且

$$|\mathbf{x}\times\mathbf{y}| = |\mathbf{x}||\mathbf{y}|\sin\theta$$

實乃以 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 爲鄰邊之平行四邊形之面積, 雖然我們有了 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ 之長 (絕對值), 又知其與 $\mathbf{x},\mathbf{y}$ 均爲垂直, 至於其方向, 若我們採 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 爲右手系統, 我們應以使 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ 亦爲右手系統爲 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ 之方向, (理由是 $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$), 即如圖 9–9 所示.

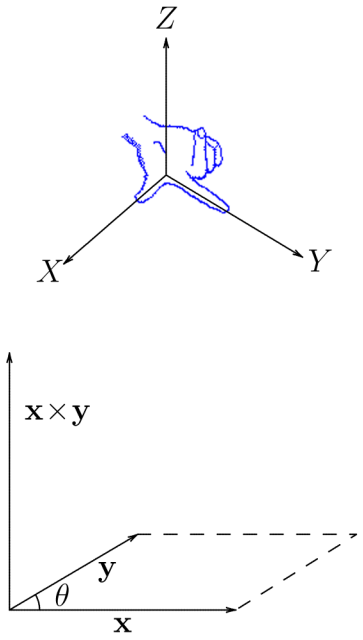


圖 9–9

例 2. 設空間二直線分別爲

$$L_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{4}, \quad L_2 : x = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{-2}.$$

(1) 試證此二直線相交, 並求交點;

(2) 試求包括 L_1 與 L_2 之平面方程式.

【解】(1) 由於

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t+3, & (1)\\ y = 3t+5, & (2)\\ z = 4t+7, & (3)\end{cases}$$

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z-5}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = s, & (4)\\ y = 2s, & (5)\\ z = -2s+5, & (6)\end{cases}$$

內 $t,\ s\in\mathbb{R}$, 我們將由 $(1)\sim(6)$ 六方程式解出 s,t,x,y,z, 首先, 由 $(1)-(4)$ 得

$$2t+3-s=0 \tag{7}$$

由 $(2)-(5)$ 得

$$3t+5-2s=0 \tag{8}$$

(7), (8) 二式聯立可得 $t=-1,\ s=1$, 代入 (1), (2), (3) 及 (4), (5), (6) 六式中皆得 $x=1,\ y=2,\ z=3$, 故知此二直線相交, 且其交點爲 $(1,2,3)$.

(2) 由於平面之法向量與二直線之方向向量垂直, 故二直線方向向量之叉積乃爲平面之一法向量, 因爲

$$(2,3,4)\times(1,2,-2)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&3&4\\1&2&-2\end{vmatrix}=-14\,\mathbf{i}+8\,\mathbf{j}+\mathbf{k},$$

故知所求平面爲 $-14(x-1)+8(y-2)+(z-3)=0$. □

例 3. 設三維直線 L 之方向數爲 $\mathbf{v}=(l,m,n)$ 且過點 $Q(a,b,c)$, 即

$$L:(x,y,z)=t(l,m,n)+(a,b,c),\ \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

試證 : 點 $P(x_0,y_0,z_0)$ 與 L 之距離爲

$$d(P,L)=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_0-a&y_0-b&z_0-c\\l&m&n\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.\qquad(*)$$

【證】1° 若 P 在 L 上, 則 $(*)$ 內之各項皆爲 0.

2° 若 P 不在 L 上, 設過點 P 且垂直於直線 L 與直線之交點爲 M, 如果 $Q=M$, 則向量 $\overrightarrow{QP}$ 與向量 $\mathbf{v}$ 之夾角爲 $\pi/2$; 如果 $Q\neq M$, 由於

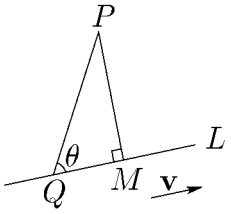


圖 9–10

- $\triangle PQM$ 爲一直角三角形,
- PM 等於點 P 與直線 L 之距離,
- 向量 $\overrightarrow{QP}$ 與向量 $\mathbf{v}$ 之夾角爲 $\theta\in(0,\pi)$, (它等於 $\angle MQP$ 或 $\pi-\angle MQP$),

利用叉積之性質七,

$$|\overrightarrow{QP}\times\mathbf{v}|=|\overrightarrow{QP}|\cdot|\mathbf{v}|\cdot\sin\theta$$

$$\Rightarrow\ PM=|\overrightarrow{QP}|\cdot\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{QP}\times\mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

$$=\frac{\left|\det\begin{pmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_0-a&y_0-b&z_0-c\\l&m&n\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

□

§ 9.3 向量函數

在第三章中, 我們曾提及二維參數方程式乃爲一二維之向量函數, 在本章中我們將加以推廣至 n 維之情況, 當然最主要的用途仍是二維之平面曲線及三維之空間曲線.

定義 9.2

設 $I \subset \mathbb{R}$, 對於函數

$$\mathbf{f}\colon I \to \mathbb{R}^n : t \mapsto \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t)),$$

可得以下 n 個實值實變函數 :

$$\begin{cases} f_1\colon I \to \mathbb{R} : f_1(t) = \mathbf{f}(t) \text{ 之第一分量}, \\ \quad \vdots \\ f_n\colon I \to \mathbb{R} : f_n(t) = \mathbf{f}(t) \text{ 之第 } n \text{ 分量}, \end{cases}$$

我們稱 $f_1, \cdots, f_n$ 爲**向量函數 $\mathbf{f}$ 之分量函數** (component functions), 並寫爲 $\mathbf{f} = (f_1, \cdots, f_n)$. 若 I 爲一區間且諸 f_j 皆爲連續, 則稱 $\mathbf{f}$ 爲一(**空間**) **曲線** ((space) curve), (特別是當 $n = 3$ 或 $n = 2$ 時).

例 1. 參數方程式 $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi]$, 乃向量函數

$$\mathbf{f}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t)$$

之古典寫法, 其分量函數分別爲 $f_1(t) = \cos t$, $f_2(t) = \sin t$, 我們若視 t 爲時間, $\mathbf{f}(t)$ 爲質點之位置, 則

時間 t	質點之位置 $\mathbf{f}(t)$
0	$(1, 0)$
$\pi/6$	$(\sqrt{3}/2, 1/2)$
$\pi/4$	$(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$
$\pi/2$	$(0, 1)$
π	$(-1, 0)$
$3\pi/2$	$(0, -1)$
2π	$(1, 0)$

爲不使 $\mathbf{f}$ 之值域之圖形過小, 在下圖之左右二坐標系統中, 我們採用之單位不相同.

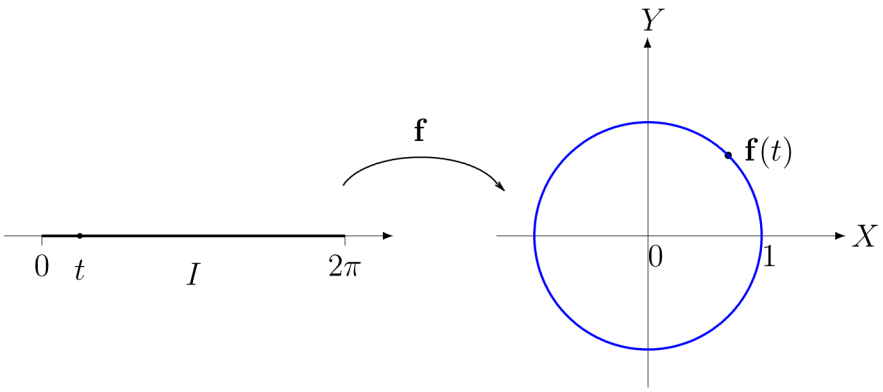


圖 9–11 □

定義 9.3

設 $\mathbf{f}\colon I(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$,

1° 若 $t_0 \in I'$, 我們稱 $\mathbf{f}$ 在點 t_0 之**極限存在**, 如果各分量函數在點 t_0 之極限皆存在, 此時規定

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) \underset{\text{def}}{=} \big(\lim_{t\to t_0} f_1(t), \cdots, \lim_{t\to t_0} f_n(t)\big),$$

2° $\mathbf{f}$ 在點 t_0 爲**連續** $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\big(t_0 \in I' \Rightarrow \lim_{t\to t_0} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0)\big)$

$\Leftrightarrow$ ($f_1, \cdots, f_n$ 在點 t_0 皆爲連續).

若 I 爲一區間, $\mathbf{f}\colon I \to \mathbb{R}^3$ 連續於 I 上每一點, 則其值域之圖形爲一不中斷之空間曲線, (參閱稍後之例 4).

定義 9.4

設 $\mathbf{f}\colon I \to \mathbb{R}^n, t_0 \in I \cap I'$, 我們規定 $\mathbf{f}$ 在點 t_0 之**導數**爲

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'(t_0) &\underset{\text{def}}{=} \lim_{t\to t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t\to t_0} \Big(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \cdots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0}\Big) \\ &= (f_1'(t_0), \cdots, f_n'(t_0)), \quad (\text{若諸 } f_j'(t_0) \text{ 皆存在}).\end{aligned}$$

註： 當 $n = 3$ 時, 亦表爲

$$\mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)) = f_1(t)\,\mathbf{i} + f_2(t)\,\mathbf{j} + f_3(t)\,\mathbf{k};$$
$$\mathbf{f}'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)) = f_1'(t)\,\mathbf{i} + f_2'(t)\,\mathbf{j} + f_3'(t)\,\mathbf{k}.$$

導數之意義：設 $\varnothing \neq I \subset \mathbb{R}$,

- 當 $n = 1, 2, 3$ 時, 若視 $\mathbf{f}(t)$ 爲某質點在時間 t 之位置 (通常稱 $\mathbf{f}$ 爲**位置向量函數** (position vector function)), 則 $\mathbf{f}'(t_0)$ 表示在時間 t_0 時之**速度向量** (velocity vector), 而 $|\mathbf{f}'(t_0)|$ 則表示其**速率** (speed).
- 當 $n = 2, 3$ 時, 若視 $\mathbf{f}$ 爲一空間曲線, 則 $\mathbf{f}'(t_0)$ 表示點 $\mathbf{f}(t_0)$ 之**切向量** (tangent vector), 是以過點 $\mathbf{f}(t_0)$ 之切線爲

$$\mathbf{g}\colon I \to \mathbb{R}^n : \mathbf{g}(t) = \mathbf{f}(t_0) + t\,\mathbf{f}'(t_0).$$

例 2. (續例 1) 試求向量函數 $\mathbf{f}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{f}(t) = (\cos t,\ \sin t)$ 之速度向量及速率.

【解】速度向量爲 $\mathbf{f}'(t) = (-\sin t,\ \cos t)$, 速率爲 $|\mathbf{f}'(t)| = 1$.

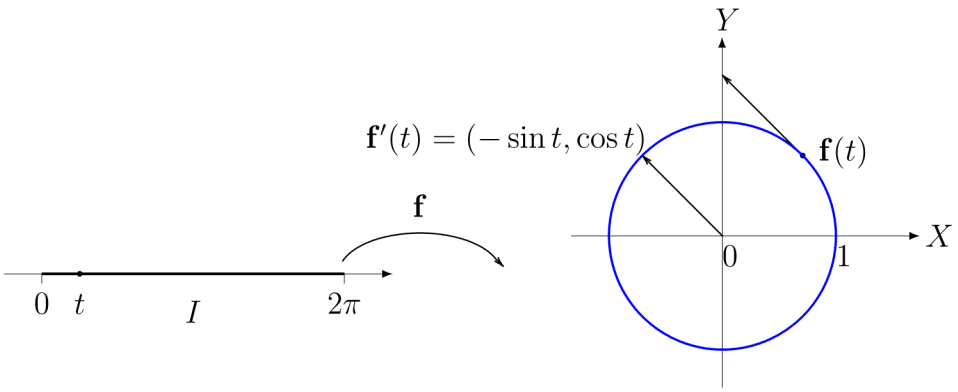


圖 9–12 □

例 3. 試以向量函數表示由以下二圓柱面相交而成之二橢圓：

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = 1,$$

並求過點 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 之切線.

【解】二方程式相減可得 $y^2 - z^2 = 0$, 亦即 $y = \pm z$, 若令 $x = \cos t$, $y = \sin t$, 應有 $z = \pm \sin t$, 故二橢圓之向量函數表示法分別爲

$$\mathbf{f}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{f}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ \sin t),$$
$$\mathbf{g}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{g}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ -\sin t).$$

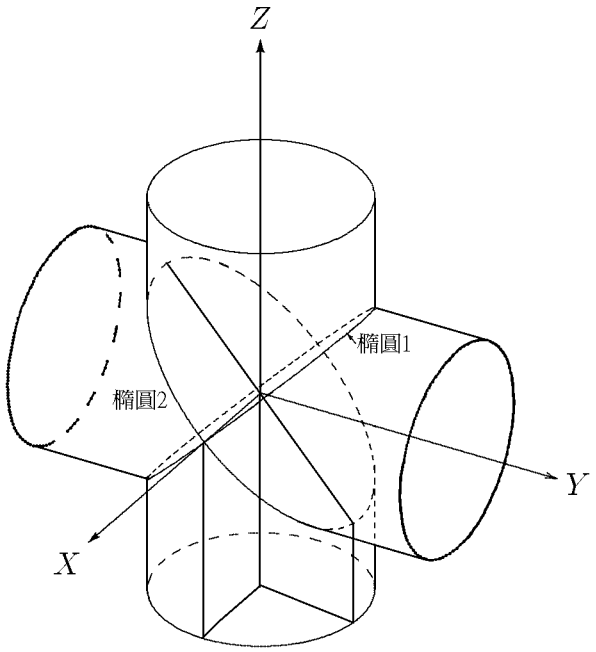


圖 9–13

其次, 點 $\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)=\mathbf{g}\big(\dfrac{\pi}{4}\big)$ 顯然在 $\mathbf{g}$ 之值域 (圖中之橢圓 2) 上, 而 $\mathbf{g}'(t)=(-\sin t,\cos t,-\cos t)$, 故切線爲

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(t)&=\mathbf{g}(\frac{\pi}{4})+t\,\mathbf{g}'(\frac{\pi}{4}),\\&=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)+t\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-t,1+t,-1-t),\forall\, t\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

若以參數方程式表之, 則爲

$$\begin{cases}x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t-1),\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t+1),\qquad t\in\mathbb{R}.\\ z=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(t+1),\end{cases}$$

又由 $\mathbf{g}'\big(\dfrac{\pi}{4}\big)=\Big(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Big)$ 知, 切線之一組方向數爲 $1,-1,1$, 故切線亦可表爲

$$x-\frac{\sqrt{2}}{2}=(-1)\Big(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)=z+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

讀者不妨設法將上述切線繪於上圖之內. □

例 4. 試求位置向量函數

$\mathbf{f}\colon [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{f}(t) = \left(\cos t, \sin t, \frac{t}{2}\right) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \frac{t}{2}\,\mathbf{k}$$

之速度向量及速率. (這種曲線稱爲**螺旋線** (helix)).

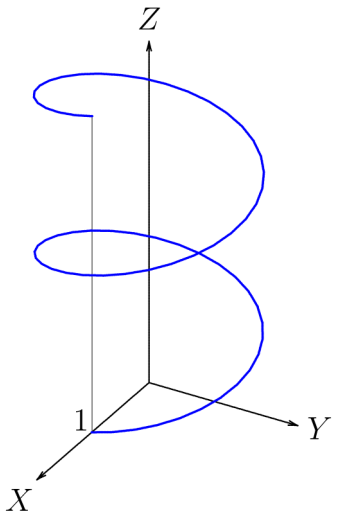


圖 9–14

【解】螺旋線之圖形如圖 9–14.

其速度向量及速率分別爲

$\mathbf{f}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1/2), \quad |\mathbf{f}'(t)| = \sqrt{5}/2.$ □

例 5. 設一質點之位置向量函數 (position vector function) 爲 $\mathbf{r}\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$, 已知其加速度向量爲 $\mathbf{a}(t) = (3, 0, -4e^{2t})$, 在時間 0 之速度向量爲 $\mathbf{v}(0) = (1, 6, 0)$ 而最初位置爲 $\mathbf{r}(0) = (1, 2, 3)$. 試求 $\mathbf{r}(t) = ?$

【解】由於 $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$, 故

$$\mathbf{a}(t) = (3, 0, -4e^{2t}) = 3\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} - 4e^{2t}\,\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)\,dt = \int (3\,\mathbf{i} - 4e^{2t}\,\mathbf{k})\,dt$$

$$= (3t + c_1)\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + (-2e^{2t} + c_3)\,\mathbf{k}, \quad (c_1,\ c_2,\ c_3 \text{ 爲待定常數})$$

$$\Rightarrow\ (1, 6, 0) = \mathbf{v}(0) = c_1\,\mathbf{i} + c_2\,\mathbf{j} + (-2e^0 + c_3)\,\mathbf{k} = (c_1, c_2, -2 + c_3)$$

$$\Rightarrow\ c_1 = 1,\ c_2 = 6,\ c_3 = 2$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{v}(t) = (3t + 1)\,\mathbf{i} + 6\,\mathbf{j} + (-2e^{2t} + 2)\,\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{r}(t) = (\frac{3t^2}{2} + t + m_1)\,\mathbf{i} + (6t + m_2)\,\mathbf{j} + (-e^{2t} + 2t + m_3)\,\mathbf{k},$$

$$(m_1, m_2, m_3 \text{ 爲待定常數})$$

$$\Rightarrow\ (1, 2, 3) = m_1\,\mathbf{i} + m_2\,\mathbf{j} + (-1 + m_3)\,\mathbf{k} = (m_1, m_2, -1 + m_3)$$

$$\Rightarrow\ m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ m_3 = 4$$

$$\Rightarrow\ \mathbf{r}(t) = \left(\frac{3t^2}{2} + t + 1\right)\mathbf{i} + (6t + 2)\,\mathbf{j} + (-e^{2t} + 2t + 4)\,\mathbf{k}.$$ □

在第七章中, 我們曾討論過參數方程式之弧長,

$$L=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt,$$

這是二維向量函數, 稍加推廣可得 n 維向量函數之弧長公式如下.

定義 9.5

設 $\mathbf{f}=(f_1,\cdots,f_n)\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$, 其中諸分量函數 f_j 皆爲連續可微 (亦稱 $\mathbf{f}$ 爲**一平滑曲線** (smooth curve)), 則曲線 $\mathbf{f}$ 之**弧長**爲

$$L(s)\underset{\text{def}}{=}\int_a^b\sqrt{(f_1'(t))^2+\cdots+(f_n'(t))^2}\,dt=\int_a^b|\mathbf{f}'(t)|\,dt.$$

(通常應用於二維或三維之空間曲線).

例 6. 試求例 4 螺旋線

$$\mathbf{f}\colon[0,4\pi]\to\mathbb{R}^3:\mathbf{f}(t)=\left(\cos t,\,\sin t,\,\frac{t}{2}\right)$$

之弧長.

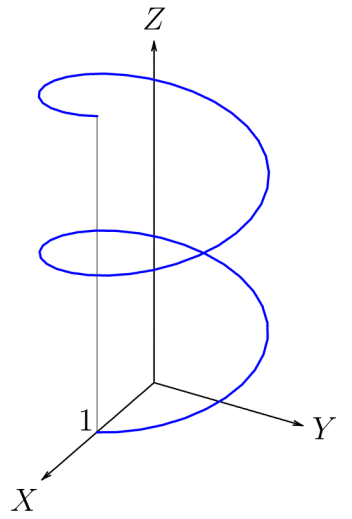


圖 9–14 (與上頁之圖相同)

【解】由於 $\mathbf{f}$ 之分量函數分別爲

$$f_1\colon[0,4\pi]\to\mathbb{R}:f_1(t)=\cos t,$$

$$f_2\colon[0,4\pi]\to\mathbb{R}:f_2(t)=\sin t,$$

$$f_3\colon[0,4\pi]\to\mathbb{R}:f_3(t)=\frac{t}{2},$$

是以

$$f_1'(t)=-\sin t,\ \ f_2'(t)=\cos t,\ \ f_3'(t)=\frac{1}{2},$$

故弧長

$$\begin{aligned}L(s)&=\int_0^{4\pi}\sqrt{(f_1'(t))^2+(f_2'(t))^2+(f_3'(t))^2}\,dt\\&=\int_0^{4\pi}\frac{\sqrt{5}}{2}\,dt=2\sqrt{5}\pi.\end{aligned}$$

□

定義 9.6

設 $\mathbf{f}=(f_1,f_2,f_3)\colon[a,b]\to\mathbb{R}^3$ 爲一三維之空間曲線,

(1) 若 $\mathbf{f}'(t)$ 存在且不爲零向量, 我們界定

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}$$

爲於時間 t 之**單位切向量** (unit tangent vector).

(2) 若 $\mathbf{T}'(t)$ 存在且不爲零向量, 我們界定

$$\mathbf{N}=\mathbf{N}(t)=\frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$$

爲於時間 t 之**主單位法向量** (principal unit normal vector). 此時令

$$\mathbf{B}=\mathbf{B}(t)=\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)$$

並稱其爲於時間 t 之**單位副法向量** (unit binormal vector).

由於 $\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}(t)=\dfrac{\mathbf{f}'(t)\cdot\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|^2}=1$, 左右兩端分別對 t 微分之, 則得

$$2\mathbf{T}'(t)\cdot\mathbf{T}(t)=0.$$

此即說明主單位法向量 $\mathbf{N}(t)$ 與 $\mathbf{T}(t)$ 單位切向量必互相垂直, 而 $\mathbf{B}(t)=\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)$ 亦即單位副法向量 $\mathbf{B}(t)$ 又與 $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$ 垂直, 且 $\mathbf{T}(t)$, $\mathbf{N}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ 乃爲右手系統 (參閱圖 9–15).

例 7. 試求例 4 螺旋線 $\mathbf{f}\colon[0,4\pi]\to\mathbb{R}^3:\mathbf{f}(t)=(\cos t,\sin t,t/2)$ 在 $t=\pi/6$ 之 $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ 與 $\mathbf{B}$.

【解】$\mathbf{f}(t)=(\cos t,\sin t,t/2)$,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\ \mathbf{f}'(t)=(-\sin t,\cos t,1/2),\\
&\Rightarrow\ \mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|}=\frac{2}{\sqrt{5}}(-\sin t,\cos t,1/2),\\
&\Rightarrow\ \mathbf{T}'(t)=\frac{2}{\sqrt{5}}(-\cos t,-\sin t,0),\\
&\Rightarrow\ \mathbf{N}(t)=\frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}=(-\cos t,-\sin t,0),\\
&\Rightarrow\ \mathbf{B}(t)=\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\sin t&\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t&\frac{1}{\sqrt{5}}\\ -\cos t&-\sin t&0\end{vmatrix}\\
&\qquad=\frac{\sin t}{\sqrt{5}}\,\mathbf{i}-\frac{\cos t}{\sqrt{5}}\,\mathbf{j}+\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}\\
&\qquad=\Big(\frac{\sin t}{\sqrt{5}},-\frac{\cos t}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\Big).
\end{aligned}$$

是以

$$\mathbf{T}\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \frac{2}{\sqrt{5}}\Big(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\Big),$$

$$\mathbf{N}\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\Big),$$

$$\mathbf{B}\Big(\frac{\pi}{6}\Big) = \Big(\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\Big).$$

參閱右圖, 讀者宜留意上述三單位向量爲互相垂直且爲右手系統, 此外, 單位主法向量 $\mathbf{N}$ 指向曲線之內側. □

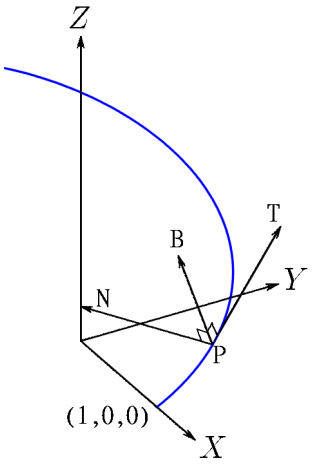


圖 9–15

依據定義 9.5, 若

$$\mathbf{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)),$$

則自點 a 至點 t 之弧長應爲

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{(f_1'(\tau))^2 + (f_2'(\tau))^2 + (f_3'(\tau))^2}\, d\tau.$$

若上述被積函數爲連續, 由第一型微積分基本定理, 得

$$s'(t) = \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2 + (f_3'(t))^2} = |\mathbf{f}'(t)|.$$

此乃說明速率乃是弧長對時間之變率. (二維曲線同理).

定義 9.7

設向量函數 $\mathbf{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $(n = 2 \text{ 或 } 3)$, 之諸分量函數皆爲連續可微, 若 $\mathbf{f}'(t_0) \neq \mathbf{0}$, 則稱

$$k(t_0) = \Big|\frac{\mathbf{T}'(t_0)}{s'(t_0)}\Big| = \frac{|\mathbf{T}'(t_0)|}{|\mathbf{f}'(t_0)|} \tag{CV1}$$

爲曲線 $\mathbf{f}$ 在點 $\mathbf{f}(t_0)$ 之**曲率** (curvature). 當 $k(t_0) \neq 0$ 時, 其倒數, 即

$$\rho(t_0) = \frac{1}{k(t_0)}$$

稱爲在點 $\mathbf{f}(t_0)$ 時之**曲率半徑** (radius of curvature).

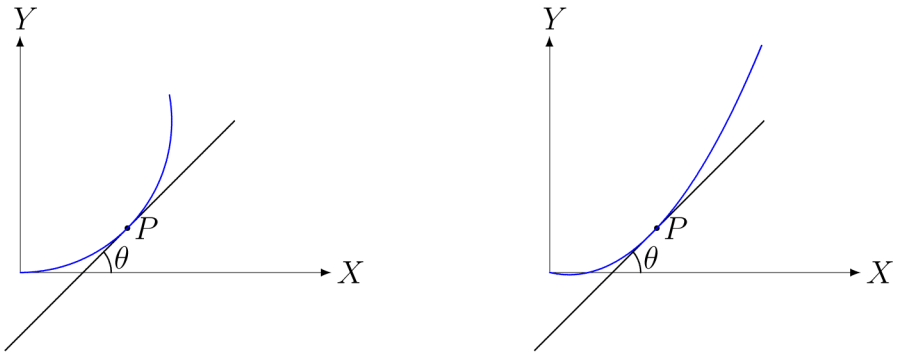


圖 9–16

註： 爲何我們界定 曲率 $k(t)=\left|\dfrac{\mathbf{T}'(t)}{s'(t)}\right|$, 我們以二維曲線解釋如下：

1° 每增加一小段弧長 Δs, 圖 9–16 之左圖切線與 X 軸之夾角變化大, 右圖夾角之變化小;

2° 於是我們希望以『夾角對弧長之變率』做爲 (在時間 t_0 之) 曲率, (易言之：每增加單位弧長相對之角度變化率).

3° 因 $\mathbf{T}(t)$ 爲一單位向量, 故可表爲

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}(t)=(\cos\theta)\,\mathbf{i}+(\sin\theta)\,\mathbf{j},\quad (\,\theta \text{ 爲 } t \text{ 之函數}\,)$$

由是得

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=-\sin\theta\cdot\frac{d\theta}{ds}\,\mathbf{i}+\cos\theta\cdot\frac{d\theta}{ds}\,\mathbf{j},\quad (\,s \text{ 亦爲 } t \text{ 之函數}\,)$$

是以

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|=\left|\frac{d\theta}{ds}\right|\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\left|\frac{d\theta}{ds}\right|,$$

右端顯然爲角度對弧長變率之絕對值, 亦即爲曲率, 但

$$\left.\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right|_{t=t_0}=\lim_{t\to t_0}\frac{\mathbf{T}(t)-\mathbf{T}(t_0)}{s(t)-s(t_0)}=\lim_{t\to t_0}\frac{\dfrac{\mathbf{T}(t)-\mathbf{T}(t_0)}{t-t_0}}{\dfrac{s(t)-s(t_0)}{t-t_0}}=\frac{\mathbf{T}'(t_0)}{s'(t_0)}.$$

上式再取絕對值, 則爲 $k(t_0)$.

如果我們探討一圓曲線之曲率的倒數時, 它恰好等於該圓之半徑, 於是我們規定曲率半徑爲 (非零) 曲率之倒數.

例 8. (續例 7) 試證螺旋線 $\mathbf{f}\colon[0,4\pi]\to\mathbb{R}^3:\mathbf{f}(t)=(\cos t,\,\sin t,\,t/2)$ 在曲線上任一點之曲率皆相同, 並求曲率半徑.

【解】由例 7 知,

$$\begin{cases} \mathbf{f}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1/2), \quad |\mathbf{f}'(t)| = \sqrt{1+\dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}, \\ \mathbf{T}'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}(-\cos t, -\sin t, 0), \quad |\mathbf{T}'(t)| = \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \end{cases}$$

是以 $\forall\, t \in [0, 4\pi]$,

$$k(t) = \left|\frac{\mathbf{T}'(t)}{s'(t)}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|} = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}.$$

故曲率半徑爲 $\rho(t) = \dfrac{1}{k(t)} = \dfrac{5}{4}$. □

定理 9.8

設 I 爲一實數區間, 且 $y = y(x)$, $x \in I$, 爲二階可微實值函數, 則 y 之圖形在點 $(x_0, y(x_0))$ 之曲率爲

$$k(x_0) = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}\bigg|_{x=x_0} \tag{CV2}$$

【證】y 之圖形可以如下之向量函數表之 :

$$\mathbf{f}\colon I \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{f}(t) = (t,\, y(t)) \tag{$*$}$$

在討論單變數函數時, 我們常以 x 爲自變數, 在討論向量函數時則以 t 爲自變數, 在此 $t = x$. 爲方便計, 我們以 y 表 $y(t)$, 由曲率公式 (CV1),

$$\begin{aligned}
(*) \;&\Rightarrow\; \mathbf{f}'(t) = (1,\, y'), \quad |\mathbf{f}'(t)| = \sqrt{1+(y')^2} \\
&\Rightarrow\; \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} = \Big((1+(y')^2)^{-1/2},\, (1+(y')^2)^{-1/2} y'\Big) \\
&\Rightarrow\; \mathbf{T}'(t) = \Big(-\frac{1}{2}(1+(y')^2)^{-3/2} 2y'y'' \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}(1+(y')^2)^{-3/2} 2(y')^2 y'' + (1+(y')^2)^{-1/2} y''\Big) \\
&\qquad = (1+(y')^2)^{-3/2} y''\Big(-y',\; -(y')^2 + (1+(y')^2)\Big) \\
&\qquad = (1+(y')^2)^{-3/2} y''(-y',\; 1) \\
&\Rightarrow\; |\mathbf{T}'(t)| = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}} \sqrt{1+(y')^2} \\
&\Rightarrow\; k(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{f}'(t)|} = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}} \\
&\Rightarrow\; k(x_0) = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}\bigg|_{x=x_0}.
\end{aligned}$$

□

例 9. 試求 $y = x^2$ 之圖形在點 (1,1) 之曲率半徑及曲率中心.

【解】由於本題之函數爲一實值單變函數, 故求曲率時, 有二種解法, 即利用公式 (CV1) 及 (CV2), 本題利用後者較爲迅速, 我們二者皆予使用.

1° 先求曲率.

法一： 利用 (CV2),

$$k(1) = \frac{|y''|}{(1+(y')^2)^{3/2}}\bigg|_{x=1} = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}\bigg|_{x=1} = \frac{2\sqrt{5}}{25}.$$

法二： 利用 (CV1); 先將曲線化爲向量函數：

$$\mathbf{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{f}(t) = (t, t^2),$$

若令 $t_0 = 1$, 則指定點爲 $\mathbf{f}(t_0) = (1,1)$. 利用公式 (CV1),

$$\begin{aligned}
&\mathbf{f}(t) = (t, t^2) \ \Rightarrow\ \mathbf{f}'(t) = (1, 2t),\ |\mathbf{f}'(t)| = \sqrt{1+4t^2},\\
&\quad\Rightarrow\ \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{f}'(t)}{|\mathbf{f}'(t)|} = \Big(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\Big)\\
&\quad\Rightarrow\ \mathbf{T}'(t) = \big(-4t(1+4t^2)^{-3/2}, 2(1+4t^2)^{-1/2} - 8t^2(1+4t^2)^{-3/2}\big)\\
&\quad\Rightarrow\ \mathbf{T}'(1) = \Big(-\frac{4}{5^{3/2}}, \frac{2}{5^{1/2}} - \frac{8}{5^{3/2}}\Big) = \Big(-\frac{4}{5\sqrt{5}}, \frac{2}{5\sqrt{5}}\Big)\\
&\quad\Rightarrow\ |\mathbf{T}'(1)| = \frac{2}{5}\\
&\quad\Rightarrow\ k(1) = \frac{|\mathbf{T}'(1)|}{|\mathbf{f}'(1)|} = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}.
\end{aligned}$$

2° 是以, 曲率半徑爲 $\rho(1) = \dfrac{1}{k(1)} = \dfrac{25}{2\sqrt{5}} \approx 5.590$.

3° 最後求曲率中心. 曲率中心 $C(x_0, y_0)$ 乃爲以曲率半徑爲半徑, 則以此點爲圓心所繪之圓滿足：

- 在指定點 P (在此爲 (1,1)), 與原曲線相切,
- 二者之曲率半徑相同,
- C 位於過點 P 之主法線上且 $\overrightarrow{PC}$ 與主法向量 $\mathbf{N}(t_0)$ 之方向相同, 由於

$$\mathbf{N}(1) = \frac{\mathbf{T}'(1)}{|\mathbf{T}'(1)|} = \Big(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big),$$

應有

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) &= \rho(t_0)\mathbf{N}(t_0) + \mathbf{f}(t_0) = \rho(1)\mathbf{N}(1) + (1,1)\\
&= \frac{25}{2\sqrt{5}}\cdot\Big(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\Big) + (1,1)\\
&= (-4,\ 3.5).
\end{aligned}$$

參閱圖 9–17.

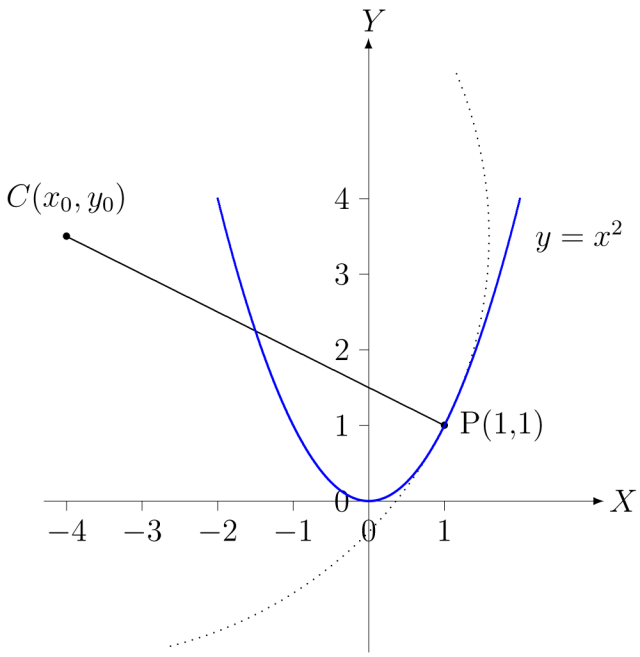


圖 9–17　虛線係以曲率中心及曲率半徑所繪之圓弧

第 九 章 習 題

向量之運算

9-1 設 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^3,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, 試證以下有內關叉積之性質：

(a) $\mathbf{y}\times\mathbf{x}=-(\mathbf{x}\times\mathbf{y})$;

(b) $\mathbf{x}\times\mathbf{x}=\mathbf{0}$;

(c) $(\alpha\mathbf{x})\times(\beta\mathbf{y})=\alpha\beta(\mathbf{x}\times\mathbf{y})$;

(d) $\mathbf{x}\times(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\times\mathbf{y}+\mathbf{x}\times\mathbf{z}$;

(e) $(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{x}=0=(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\cdot\mathbf{y}$;

(f) $|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|^2=|\mathbf{x}|^2|\mathbf{y}|^2-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2$;

(g) 若 $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ 皆爲非零向量, 則 $|\mathbf{x}\times\mathbf{y}|=|\mathbf{x}||\mathbf{y}|\sin\theta$ 內 $\theta\in[0,\pi]$ 爲此二向量之夾角;

(h) 若 $\mathbf{x},\ \mathbf{y}$ 皆爲非零向量, 則 $\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\mathbf{0}$ 之充要條件爲此二向量之夾角等於 0 或 π.

9-2 試寫出過點 $\mathbf{p}=(1,2,3)$ 且與向量 $\mathbf{p}$ 垂直之平面方程式.

9-3 試求二平面 $2x-3y+5z+1=0,\ \ -4x+6y+10z-2=0$ 之夾角 θ, 其中 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$.

9-4 設二空間直線分別爲

$$L_1: 2x+3c=y=\frac{2z+6c+5}{3},\quad L_2: 3x+c=3y+7c=z-c+2.$$

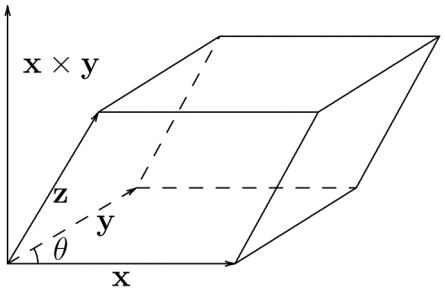
(a) 試求常數 c 以使二直線相交, 並求交點;

(b) 在上述情況下, 試利用叉積方法以求包括 L_1 與 L_2 之平面方程式.

9-5 試證：在 $\mathbb{R}^2$ 上, 點 $P(x_0,y_0)$ 與直線 $L: ax+by+c=0$ 之距離爲

$$d(P,L)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

9-6 設 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 之三非零向量, 試證右圖中平行立方體之體積等於 $|\mathbf{z}\cdot(\mathbf{x}\times\mathbf{y})|$.



向量函數 (空間曲線)

9-7 設

$$\mathbf{f}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{f}(t) = (\cos t,\, \sin t),$$
$$\mathbf{g}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{g}(t) = (\cos 2t,\, \sin 2t),$$
$$\mathbf{h}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{h}(t) = (\cos t,\, \sin(-t)).$$

(a) 試求上述三向量函數之定義域、值域及弧長;

(b) 其中是否有二函數之定義域、值域及弧長三者皆相同者? 若是, 我們能否說此二函數相等? 理由?

9-8 設函數 $\mathbf{f}\colon [0,3\pi] \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{f}(t) = (t - \sin t,\, 1 - \cos t)$,

(a) 先求 $t = k\pi/6,\ (k = 0,\, 1,\, 2, \cdots,\, 18)$ 時, $\mathbf{f}(t)$ 之值, 並據以描繪 $\mathbf{f}$ 之值域 ;

(b) 試求此曲線之弧長 .

9-9 設函數 $\mathbf{f}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{f}(t) = (\cos t,\, \sin t,\, 1 - \cos t)$, 其值域乃一圓柱體與一平面之交集.

(a) 試求此圓柱體與平面之方程式, 並繪出其圖形 ;

(b) 試求此曲線之弧長, (列出積分式子即可) .

9-10 某曲線之參數方程式定義如下:

$$\begin{cases} x(\theta) = \theta\cos\theta, \\ y(\theta) = \theta\sin\theta, \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

(a) 試證 : 該曲線上之點與原點之距離與夾角 θ 之正比; 繪出此曲線之圖形 ;

(b) 試求此曲線之弧長 .

9-11 設一質點之運動律爲 (Law of motion) $\mathbf{F}(t) = 3t\,\mathbf{i} - t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$, 試求在 $t = 2$ 處之

(a) 速度向量與速率 ;

(b) 切線與法平面方程式 .

9-12 試求螺旋線 $\mathbf{f}\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{f}(t) = (\cos t, \sin t, t/2)$ 在 $t = \pi/6$ 之曲率中心.
(註 : 單位主法線向量與曲率半徑可視爲已知, 參閱本章之範例).

9-13 設 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, \end{cases}$ 爲 $\mathbb{R}^3$ 上一曲線, 試求曲線上最接近原點之點.

9-14 試求 cosh 在點 $(0,1)$ 之曲率半徑及曲率中心.

9-15 試求二直線 $\begin{cases} \mathbf{f}(t) = (t,t,2t),\ t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{g}(s) = (1-s, 2+s, 1+2s),\ s \in \mathbb{R}, \end{cases}$ 之最短距離.

9-16 設二曲線 $\begin{cases} \mathbf{f}(t) = (t^2, t-1, 2t+1),\ t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{g}(s) = (5-s^2, 2-s, s+1),\ s \in \mathbb{R}. \end{cases}$

(a) 試求此二曲線之交點 ;

(b) 試求求過上述交點且與二曲線相切之平面方程式 .

9-17 設 $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$, (其中 $n = 2$ 或 3), 爲一向量函數, 則

$$\mathbf{s}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n : \mathbf{s}(t) \underset{\text{def}}{=} \mathbf{r}(a+b-t)$$

稱爲 $\mathbf{r}$ 之反向曲線 (opposite curve). 試將以下運動以一向量函數表之 :『質點由 (1,0) 沿單位圓之上半移至點 $(-1,0)$ 再沿 X 軸移至原點.』並求其反向曲線.

Chapter 10

多變數函數與偏導數

本書一至八章我們所討論的函數幾乎全是實值實變函數, 上一章則討論向量函數, 然而在實際的問題上, 我們所面臨的函數常不只有一個變數. 故基於應用上的要求, 勢必探討多變數函數. 其實, 在理論上, 我們發現以前所討論的許多觀念都可適當的予以推廣, 以配合應用的實際需要. 其中最爲重要的當屬極值問題, 尤其是附帶條件的極值問題更是必修之方法, 這也是微積分對於各應用科學最爲顯著之貢獻.

§ 10.1 多變數函數之極限與連續

定義 10.1

設 $D_f \subset \mathbb{R}^n,\ n > 1$, 則函數

$$f\colon D_f \to \mathbb{R} : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto f(x_1, \cdots, x_n) = \cdots,$$

稱爲一(**實值**) **多變數函數** (a read-valued function of several variables).

本節以下所提各函數, 除非特別聲明, 皆爲多變數函數.

例 1. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x, y) = x^2 + y^2$ 乃爲一二變數函數, 參閱圖 10–1.

例 2. 設 $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, 試求 f 之定義域.

【解】f 之定義域 $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 2^2\}$, 此乃以 $(0, 0)$ 爲中心以 2 爲半徑之圓區域, 參閱圖 10–2. □

正如單變數函數的情形, 極限是最根本的觀念, 其定義與定理皆由單變數函數之定義與定理推廣而得, 這一類的推廣對於數學及其應用之影響, 可謂既深且廣.

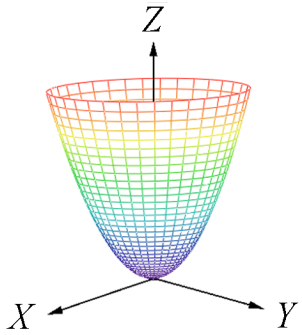


圖 10–1

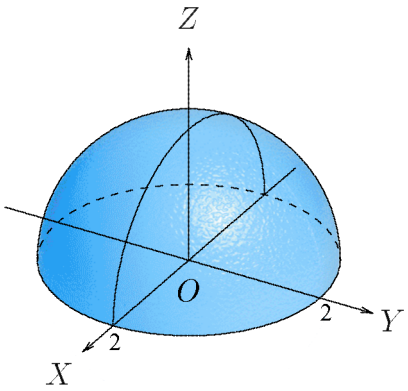


圖 10–2

定義 10.2

設 $f\colon D_f(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \mathbf{p} \in (D_f)'$, 我們稱 f 在點 $\mathbf{p}$ 之極限爲 l, 並表爲 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = l$, 如果

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0, (\forall\, \mathbf{x} \in D_f)(\mathbf{x} \in N_\delta^*(\mathbf{p}) \ \Rightarrow\ |f(\mathbf{x}) - l| < \epsilon).$$

在第一章中, 我們討論有關單變數函數之極限定義時, 曾利用圖形予以解釋, 對於二變數函數, 若以立體圖形表示, 一來繪製不易, 二來讀者亦難以領略其中奧祕, 因此我們特將其拆爲二圖形, 左圖表定義域 (二維), 而右圖則爲對應域 (一維). 10.2 定義乃說明：不論 l 之靶半徑 ϵ 有多麼小, 一定存在點 $\mathbf{p}$ 之一去心鄰近 $N_\delta^*(\mathbf{p})$, 使得其內之點經 f 對應後必落入“靶” $(l-\epsilon, l+\epsilon)$ 內.

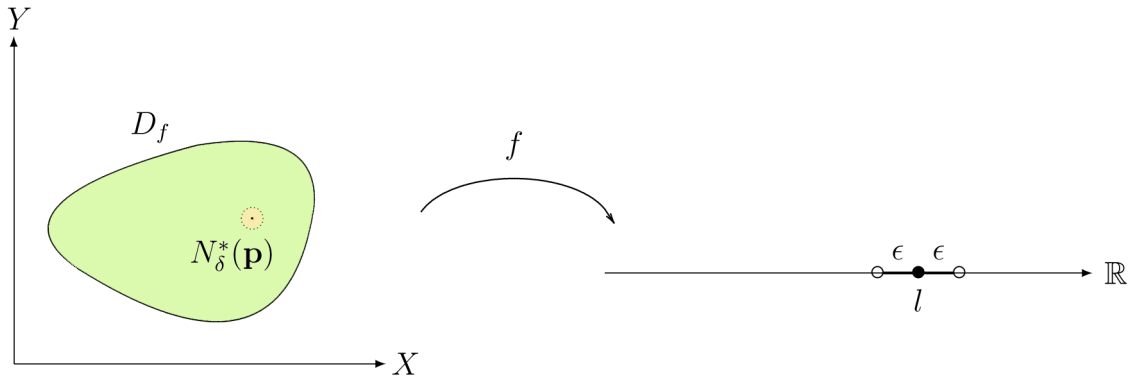


圖 10–3

以下我們將討論一些有關極限之定理, 限於篇幅, 我們將不予詳細證明, 稍後將舉出一些範例, 某些觀念與單變數函數相似, 但也有一些新的狀況, 遠超過單變數情況所能想像.

定理 10.3

設 f 與 g 爲二函數, 點 $\mathbf{p}$ 爲 $D_f \cap D_g$ 之一聚點. 若 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = a$ 且 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = b$, 則

(1) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (f+g)(\mathbf{x}) = a+b$;

(2) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (f-g)(\mathbf{x}) = a-b$;

(3) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (fg)(\mathbf{x}) = ab$;

(4) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (f/g)(\mathbf{x}) = a/b$, (其中 $b \neq 0$).

【證】我們只證 (1) 其餘與單變數之極限定理之證明相仿.

$\forall\, \epsilon > 0$, 由於

$$
\begin{aligned}
|f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) - (a+b)| < \epsilon \;&\Leftarrow\; |f(\mathbf{x}) - a| + |g(\mathbf{x}) - b| < \epsilon \\
&\Leftarrow\; |f(\mathbf{x}) - a| < \epsilon/2 \;\wedge\; |g(\mathbf{x}) - b| < \epsilon/2 \\
&\Leftarrow\; 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta_1 \;\wedge\; 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta_2, \\
&\qquad\qquad (\because \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = a,\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = b\,) \\
&\Leftarrow\; 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \delta, \quad (\text{令 } \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}\,),
\end{aligned}
$$

知 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} (f+g)(\mathbf{x}) = a+b$. □

定理 10.4 (三明治原理)

設

(i) $D_g \subset D_f \cap D_h$,

(ii) $f(\mathbf{x}) \le g(\mathbf{x}) \le h(\mathbf{x}),\ \forall\, \mathbf{x} \in N^*_\delta(\mathbf{p}) \cap D_g$,

(iii) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} h(\mathbf{x}) = l$.

則 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(\mathbf{x}) = l$.

【證】仿第一章三明治原理之證明. □

定理 10.5

設 A 爲 $\mathbb{R}^n$ 之子集, B, C 皆爲 $\mathbb{R}$ 之子集. 若

(i) $f\colon A \to B$ 且 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = b$,

(ii) $g\colon B \to C$ 連續於點 b,

則 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} g(f(\mathbf{x})) = g(b) = g(\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}))$.

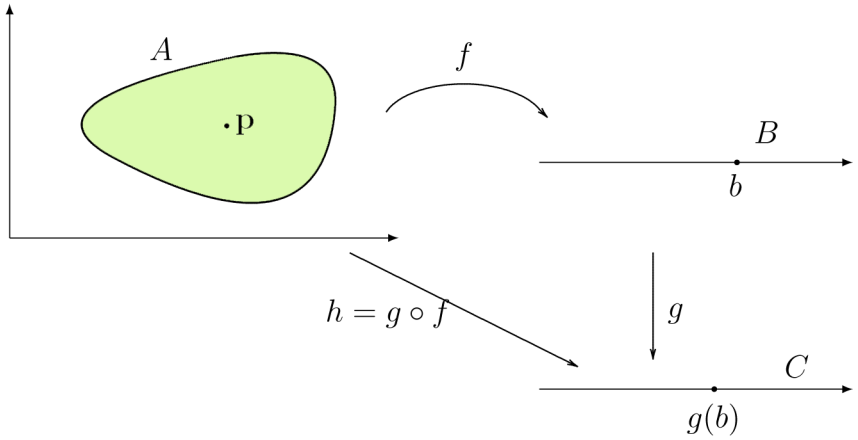


圖 10–4

【證】仿第一章定理 1.21 之證明. □

定理 10.6

設 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = l$, $A \subset D_f$, $\mathbf{p} \in A'$, 則 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f|_A(\mathbf{x}) = l$.

【證】仿第一章定理 1.16 之證. □

註： 本定理之主要用途：用以證明極限不存在. 對於一函數 f, 若存在 D_f 之二子集 A 與 B 且 $\mathbf{p} \in A' \cap B'$, 使得

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f|_A(x) \neq \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f|_B(x),$$

則由本定理知 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x})$ 不存在.

例 3. 設 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : f(\mathbf{x}) = c$, 則 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = c$.

例 4. 設 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 我們稱函數 $P_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : P_j(x_1, \cdots, x_n) = x_j$ 爲**第 j 投影函數** (the j-th projection), 試證 : $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} P_j(\mathbf{x}) = p_j = P_j(\mathbf{p})$.

【證】往證 : $\forall\,\epsilon>0,\ \exists\delta>0,\ (\forall\,\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n)(0<|\mathbf{x}-\mathbf{p}|<\delta\ \Rightarrow\ |P_j(\mathbf{x})-P_j(\mathbf{p})|<\epsilon)$.

$\forall\,\epsilon>0,$

$$\begin{aligned}|P_j(\mathbf{x})-P_j(\mathbf{p})|<\epsilon\ &\Leftrightarrow\ |x_j-p_j|<\epsilon\\ &\Leftarrow\ \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-p_k)^2}<\epsilon\\ &\Leftarrow\ 0<|\mathbf{x}-\mathbf{p}|<\epsilon\\ &\Leftarrow\ 0<|\mathbf{x}-\mathbf{p}|<\delta\,,\quad (\text{取 }\delta=\epsilon).\end{aligned}$$

□

例 5. 設 $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}: f(x,y,z)=xyz+\sin(x+y-z)$, 試求 $\lim\limits_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)=?$

【解】利用定理 10.3, 10.5 及例 4,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x,y,z)&=\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} xyz+\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)}\sin(x+y-z)\\ &=abc+\sin\Big(\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)}(x+y-z)\Big)\\ &=abc+\sin(a+b-c).\end{aligned}$$

□

例 6. 設

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

試求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$

【解】令 $L_m=\{(x,y)\mid y=mx,\ x\neq 0\}$, 內 $m\in\mathbb{R}$, (註 : L_m 乃斜率爲 m 之直線, 但扣除原點), 則因

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\big|_{L_m}(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-m^2x^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{2-m^2}{1+m^2},$$

因 m 而變, 故知極限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在. □

例 7. 設

$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

試求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=?$

【解】令

$$L = \{(x,y) \mid 0 \neq y = x\},$$
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \neq x = y^2\},$$

則

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\big|_L(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2+x^4} = 0,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f\big|_S(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2},$$

二者不相等, 故知 f 在原點之極限不存在. □

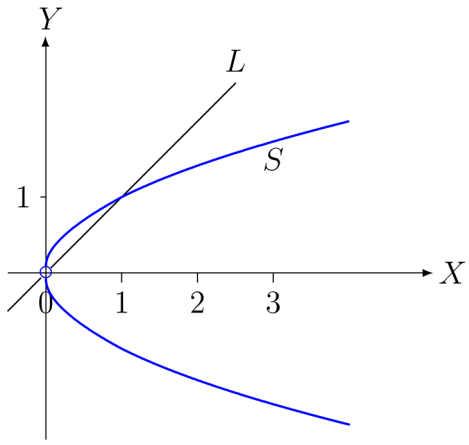


圖 10–5

如果我們希望證明某二變數函數之極限不存在, 通常利用二不同制限之極限不相等而證得; 如果希望證明其極限存在, 則需利用定理 10.3 至 10.5. 此外, 有個『極坐標』方法, 對於證明以下問題有所幫助：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = l.$$

對於 $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, 令 $r = \sqrt{x^2+y^2}$, θ 爲 (x,y) 與 X 軸之夾角, (若自X 軸以逆時針方向計, 則 θ 爲正, 否則爲負, 如圖 10–6), 顯然 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

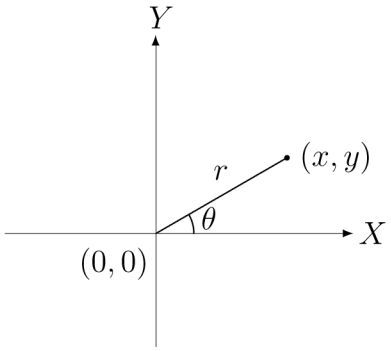


圖 10–6

例 8. 設 $f(x,y) = \dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2}$, 試求極限：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

【解】令 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 則

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \\ &= \left|\frac{2r^3\cos^3\theta - r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| \\ &= r|2\cos^3\theta - \sin^3\theta| \\ &\le r(|2\cos^3\theta| + |\sin^3\theta|) \le 3r = 3\sqrt{x^2+y^2}, \end{aligned}$$

又因

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 3\sqrt{x^2+y^2} = 3\sqrt{\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)} = 0,$$

利用三明治原理, 立可證得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^3-y^3}{x^2+y^2} = 0.$ □

定義 10.7

設 $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} \in D_f$, 若

$$\mathbf{p} \in (D_f)' \ \Rightarrow\ \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{p}),$$

則稱 f 於點 $\mathbf{p}$ 爲**連續**. 若 f 在 $A(\subset D_f)$ 上之每一點 $\mathbf{p}$ 均爲連續. 則稱 f 於 A 上爲**連續**, 若 f 於 D_f 上爲連續, 則稱 f 爲一**連續函數**.

例 9. 設 $P_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : P_j(x_1, \cdots, x_n) = x_j$, 則 P_j 爲一連續函數.

【解】由本節例 4 立即可得. □

例 10. 設 $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f(x, y, z) = xyz + \sin(x + y - z)$, 試證 f 爲一連續函數.

【解】由本節例 5 知, f 於任意點 (a, b, c) 上皆爲連續, 故 f 爲連續函數. □

例 11. 設 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x, y) = \begin{cases} (x - y)\sin\dfrac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ k, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$

試問 k 爲何值可使 f 於原點爲連續.

【解】設 $A = \{(x, y) \mid x = 0\}$, $B = \mathbb{R}^2 \setminus A$.

1° 由於當 $x \neq 0$ 時,

$$0 \leq |f(x, y)| \leq |x - y| \leq |x| + |y|,$$

因 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| + |y| = 0$, 故知 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f|_B(x, y) = 0$;

2° 若取 $k = 0$, 顯然 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f|_A(x, y) = k = 0$;

3° 若取 $k \neq 0$, 顯然 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f|_A(x, y) = k \neq 0$;

結論 : 由 1° 及 2° 知, 當 $k = 0$ 時,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0),$$

知 f 於原點爲連續. 由 1° 及 3° 知, 當 $k \neq 0$ 時, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ 不存在, 因此 f 於原點不爲連續. □

§ 10.2 方向導數與偏導數

在第二章中, 我們曾經詳細討論過實值之實變函數的導數, 及其所代表的幾何意義. 對於多變數函數而言, 情形遠較單變數函數情況爲複雜, 就以二變數函數爲例, 函數 f 之圖形在點 $(x, y, f(x, y))$ 上可能有無限條切線 (位於同一平面), 因此曲面的動向更不易捉摸. 解決之道, 必須沿定義域上之各條直線去探討函數的行徑, 這就是所謂方向導數的問題. 方向導數中最爲有用也是最簡易的乃爲平行於坐標軸的方向導數, 此即所謂之偏導數. 爲使初學者易於領會, 今後討論的函數除有特別聲明者外, 均限於二變數函數.

一個二變數函數的圖形通常爲三維空間裡的一個曲面, 但若將該函數局限於包含在其定義域中之一線段 (或一直線), 則其圖形便成爲一平面上之一曲線, 對於此種情況, 我們便可引用第二章的導數概念來研究這曲線. 經過定義域上之一點, 可做無限許多直線, 於是在各個方向便得到各個不同曲線, 並可個別討論它們的導數問題, 根據此一構想, 我們乃有以下之定義.

定義 10.8

設 $D_f \subset \mathbb{R}^2$, $f\colon D_f \to \mathbb{R}$, $\mathbf{p} = (p_1, p_2) \in \overset{\circ}{D}_f, \mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 爲 $\mathbb{R}^2$ 上一單位向量 (即 $v_1^2 + v_2^2 = 1$).

(1) $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{p}) \underset{\text{def}}{=} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(\mathbf{p} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{p})}{h}$, (若其存在),

稱爲 f 在點 $\mathbf{p}$ 沿方向 $\mathbf{v}$ 之**方向導數** (directional derivative).

(2) 若 $\mathbf{v} = (1, 0)$, 則上述方向導數稱爲 f 在點 $\mathbf{p}$ 對 x 之**偏導數** (partial derivative of f at $\mathbf{p}$ with respect to x), 並記爲 $D_1 f(\mathbf{p})$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{p})$, 即

$$D_1 f(\mathbf{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1 + h, p_2) - f(p_1, p_2)}{h}, \quad \text{(若其存在)}.$$

(3) 若 $\mathbf{v} = (0, 1)$, 則上述方向導數稱爲 f 在點 $\mathbf{p}$ 對 y 之**偏導數**, 並記爲 $D_2 f(\mathbf{p})$ 或 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{p})$, 即

$$D_2 f(\mathbf{p}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_1, p_2 + h) - f(p_1, p_2)}{h}, \quad \text{(若其存在)}.$$

(參見圖 10–7.)

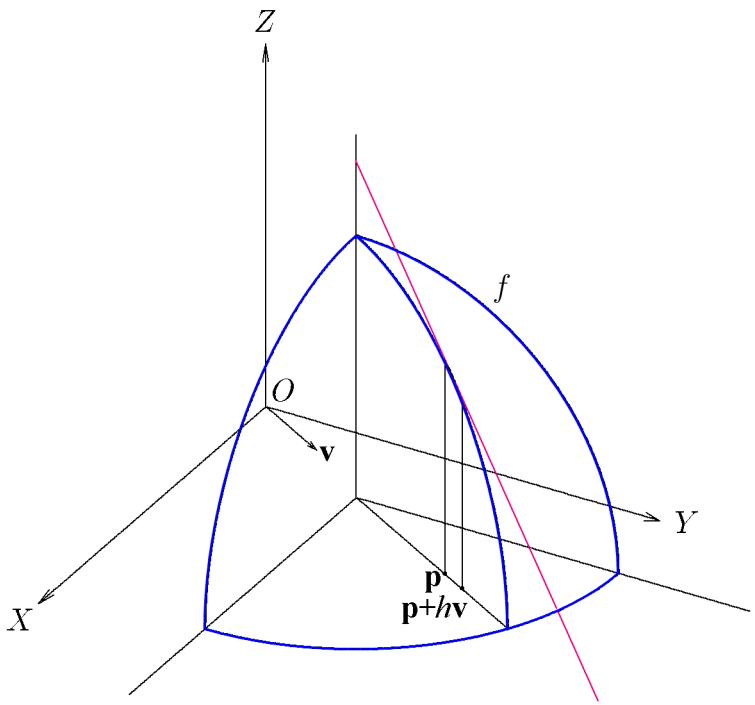


圖 10–7

我們以圖 10–7 解釋方向導數之幾何意義, $\dfrac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{h}$ 表示 f 在點 $\mathbf{p}$ 沿方向 $\mathbf{v}$ 所作之差商, 當 h 趨近於 0, 此差商之極限顯然表示切線之斜率 (如果有切線).

若 f 之諸偏導函數皆存在, 則稱 f 爲**可偏微(分)** (partially differentiable). 若 f 之諸偏導函數皆爲連續, 則稱 f 爲**連續可偏微(分)** (continuously partially differentiable).

實際計算

- 求 $D_1f(x,y)$ 時, 將 $f(x,y)$ 中之 y 視爲常數, 以單變數函數方法對 x 微分之, 即得 $D_1f(x,y)$.
- 求 $D_2f(x,y)$ 時, 將 $f(x,y)$ 中之 x 視爲常數, 以單變數函數方法對 y 微分之, 即得 $D_2f(x,y)$.
- 求方向導數 $D_{\mathbf{v}}f(x,y)$ 時,
  法一： 利用定義, (一定對, 但較麻煩).
  法二： 利用下節之定理 10.13 : 若 D_1f 及 D_2f 爲連續, 則

$$D_{\mathbf{v}}f(x,y)=v_1D_1f(x,y)+v_2D_2f(x,y).$$

註： 對於一 n 變數實值函數, 我們亦可仿照上述定義而規定： 設 $\mathbf{p}=(p_1,\cdots,p_n)\in \overset{\circ}{D}_f$, $\mathbf{v}$ 爲 $\mathbb{R}^n$ 上一單位向量 (即 $v_1^2+\cdots+v_n^2=1$).

(1) f 在點 $\mathbf{p}$ 沿方向 $\mathbf{v}$ 方向導數 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{h}$.

(2) f 在點 $\mathbf{p}$ 對 x_j 之偏導數 $D_jf(\mathbf{p})=D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}),\ j=1,\ldots,n$, 其中

$$\mathbf{v}=(v_1,\cdots,v_n),\ v_k=\begin{cases}1, & \text{若 } k=j,\\ 0, & \text{若 } k\neq j,\end{cases}\ \text{亦即}$$

$$D_jf(\mathbf{p})=\lim_{h\to 0}\frac{f(p_1,\cdots,p_{j-1},p_j+h,p_{j+1},\cdots,p_n)-f(p_1,\cdots,p_n)}{h}.$$

(若此極限存在).

例 1. 試求函數 $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: f(x,\,y)=x^2+y^2$ 在點 $\mathbf{p}=(1,\ 2)$ 之偏導數及沿方向 $\mathbf{v}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}},\dfrac{3}{\sqrt{13}}\right)$ 之方向導數.

【解】**法一**：利用定義,

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{v}}f(1,2)&=\lim_{h\to 0}\frac{(1+hv_1)^2+(2+hv_2)^2-(1^2+2^2)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{2hv_1+h^2v_1^2+4hv_2+h^2v_2^2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}(2v_1+hv_1^2+4v_2+hv_2^2)\\&=2v_1+4v_2=\frac{16}{\sqrt{13}}.\end{aligned}$$

法二：利用定理(稍後證明).

由於 $D_1f(x,y)=2x,\ D_2f(x,y)=2y$, 是以 $D_1f(1,2)=2,\ D_2f(1,2)=4$. 其次, 因 D_1f 及 D_2f 均爲連續, 故知 f 在以點 $\mathbf{p}$ 爲可微分, 利用定理可得

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})=v_1D_1f(\mathbf{p})+v_2D_2f(\mathbf{p})=\frac{2}{\sqrt{13}}\cdot 2\cdot 1+\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot 2\cdot 2=\frac{16}{\sqrt{13}}.\qquad\square$$

高階偏導數 (partial derivative of higher orders)

若將 $D_1f(x,y)$ 視爲一二變數函數, 則可對 x 及對 y 分別求偏導數, 同理 $D_2f(x,y)$ 亦然.

$$f(x,y)\begin{cases}D_1f(x,y)\begin{cases}D_1D_1f(x,y)=D_{11}f(x,y)\\ D_2D_1f(x,y)=D_{12}f(x,y)\end{cases}\\ D_2f(x,y)\begin{cases}D_1D_2f(x,y)=D_{21}f(x,y)\\ D_2D_2f(x,y)=D_{22}f(x,y).\end{cases}\end{cases}$$

在第二章中, 我們知道『單變數函數之導數』有以下數種不同表示法：

$$f'(p) = Df(p) = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=p},$$

『二階導數』則表爲：

$$f''(p) = D^2 f(p) = \frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=p}.$$

二變數函數之偏導數則有以下數種不同表示法：

$$D_1 f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1(x,y) = f_x(x,y),$$

$$D_2 f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f_2(x,y) = f_y(x,y),$$

二階偏導數則表爲

$$D_{11} f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f_{11}(x,y) = f_{xx}(x,y),$$

$$D_{12} f(x,y) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f_{12}(x,y) = f_{xy}(x,y),$$

$$\vdots$$

更高階之偏導數及三個以上變數之函數的偏導數, 其表示法大致仿此, 不另贅述.

例 2. 試求 $f(x,y) = ye^x + \sin(xy)$ 之二階偏導數.

【解】先求一階偏導數再求二階偏導數：

$$D_1 f(x,y) = ye^x + y\cos(xy),$$
$$D_2 f(x,y) = e^x + x\cos(xy),$$
$$D_{11} f(x,y) = ye^x - y^2\sin(xy),$$
$$D_{12} f(x,y) = e^x + \cos(xy) - xy\sin(xy),$$
$$D_{21} f(x,y) = e^x + \cos(xy) - xy\sin(xy),$$
$$D_{22} f(x,y) = -x^2\sin(xy).$$ □

在計算許多二變數函數之二階偏導數時, 我們發現 $D_{12}f(x,y) = D_{21}f(x,y)$, 但有人發現此一現象並不恆眞, 以下是一個著名的反例.

例 3. 設函數

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & \text{若 } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{若 } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

試證：$D_{12}f(0,0) = -1, \quad D_{21}f(0,0) = 1.$

【證】

$$D_1f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2+y^2)[y(x^2-y^2)+2x^2y]-2x^2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(x^2+y^2)(3x^2y-y^3)-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$D_2f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2+y^2)[x(x^2-y^2)-2xy^2]-2xy^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(x^2+y^2)(x^3-3xy^2)-2x^3y^2+2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

故

$$D_{12}f(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{D_1f(0,y)-D_1f(0,0)}{y}=\lim_{y\to0}\frac{(-y^5/y^4)-0}{y}=-1;$$

$$D_{21}f(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{D_2f(x,0)-D_2f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(x^5/x^4)-0}{x}=1.$$ □

此一範例說明：$D_{12}f(\mathbf{p})$ 與 $D_{21}f(\mathbf{p})$ 未必相等, 於是有人深入研究, 到底在什麼條件下, $D_{12}f(\mathbf{p})$ 會等於 $D_{21}f(\mathbf{p})$? 以下便是有名的 Young 定理.

定理 10.9 （**Young 定理**）

若 $D_{12}f$ 與 $D_{21}f$ 在 $N_\delta(\mathbf{p})$ 爲連續, 則 $D_{12}f(\mathbf{p})=D_{21}f(\mathbf{p})$.

【證】設 h 與 k 均爲非零實數並使

$$(p_1+h,\ p_2+k),\ (p_1+h,\ p_2),\ (p_1,\ p_2+k)\in N_\delta(\mathbf{p}).$$

令

$$A(h,k)=f(p_1+h,p_2+k)-f(p_1+h,p_2)-f(p_1,p_2+k)+f(p_1,p_2).$$

茲以二種不同方法求 $A(h,k)$ 如下：

① 令 $g(x)=f(x,p_2+k)-f(x,p_2)$, 則

$$\begin{aligned}A(h,k)&=g(p_1+h)-g(p_1)\\&=hg'(p_1+\theta h),\ (\text{利用微分均值定理},\theta\in(0,1))\\&=h\cdot[D_1f(p_1+\theta h,p_2+k)-D_1f(p_1+\theta h,p_2)]\\&=hk\cdot D_{12}f(p_1+\theta h,p_2+\theta' k),\\&\qquad(\text{再利用微分均值定理, (對第二變數)},\ \theta'\in(0,1))\end{aligned}$$

② 令 $\phi(y)=f(p_1+h,y)-f(p_1,y)$, 同樣利用二次微分均值定理, 則存在 θ'', $\theta'''\in(0,1)$ 使得

$$A(h,k)=hk\cdot D_{21}f(p_1+\theta'''h,p_2+\theta''k).$$

由 ① 與 ② 得知

$$D_{12}f(p_1+\theta h,p_2+\theta' k)=D_{21}f(p_1+\theta'''h,p_2+\theta''k).$$

又由原設知 $D_{12}f$ 及 $D_{21}f$ 皆連續於 $N_\delta(\mathbf{p})$, 故

$$\begin{aligned}D_{12}f(p_1,p_2)&=\lim_{(h,k)\to(0,0)}D_{12}f(p_1+\theta h,p_2+\theta' k)\\&=\lim_{(h,k)\to(0,0)}D_{21}f(p_1+\theta'''h,p_2+\theta''k)\\&=D_{21}f(p_1,p_2).\end{aligned}$$ □

單變數函數之連鎖律爲 $Df(g(x))=f'(g(x))\cdot g'(x)$, 但多變數情況則較爲複雜. 我們舉一例以說明之:

例 4. 設函數 $z=g(x,y)=x\sin y+y^2\cos xy$, 其中 $x=u+v,\ y=u-v$, 即 $z=g((u+v),(u-v))$. 試求 $\dfrac{\partial z}{\partial u}=?\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

【解】**法一**：代入法, 因

$$z=g(u+v,u-v)=(u+v)\sin(u-v)+(u-v)^2\cos(u^2-v^2),$$

故

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u}&=\sin(u-v)+(u+v)\cos(u-v)\\&\quad+2(u-v)\cos(u^2-v^2)-2u(u-v)^2\sin(u^2-v^2),\\\frac{\partial z}{\partial v}&=\sin(u-v)-(u+v)\cos(u-v)\\&\quad-2(u-v)\cos(u^2-v^2)+2v(u-v)^2\sin(u^2-v^2).\end{aligned}$$

法二：利用多變數連鎖律, (稍後證明).

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= (\sin y - y^2\sin(xy)\cdot y)\cdot 1 + (x\cos y + 2y\cos xy - xy^2\sin xy)\cdot 1\\ &= \sin y - y^3\sin xy + x\cos y + 2y\cos xy - xy^2\sin xy.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\\ &= (\sin y - y^3\sin xy)\cdot 1 + (x\cos y + 2y\cos xy - xy^2\sin xy)\cdot(-1)\\ &= \sin y - y^3\sin xy - x\cos y - 2y\cos xy + xy^2\sin xy.\end{aligned}$$

上述兩組答案看起來似乎不太一樣, 其實法二中令 $x=u+v,\ y=u-v$, 二者之結果是相同的. □

定理 10.10 (多變數連鎖律之一)

設 $A,\ B\subset\mathbb{R}^2$, 且滿足

(i) $\mathbf{f}\colon A\to B$ 之二分量函數 f_1 及 f_2 在 $N_\delta(\mathbf{p})$ 上爲可偏微分 ;

(ii) $g\colon B\to\mathbb{R}$ 在 $N_\epsilon(\mathbf{q})$, (內 $\mathbf{q}=\mathbf{f}(\mathbf{p})$), 上爲連續可偏微分.

則合成函數

$$F = g\circ\mathbf{f}\colon A\to\mathbb{R} : F(u,v) = g(f_1(u,v), f_2(u,v))$$

於點 $\mathbf{p}$ 爲可偏微分, 且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{p}) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{q})\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial u}(\mathbf{p}) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{q})\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial u}(\mathbf{p}),\\ \dfrac{\partial F}{\partial v}(\mathbf{p}) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{q})\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial v}(\mathbf{p}) + \dfrac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{q})\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial v}(\mathbf{p}).\end{cases}$$

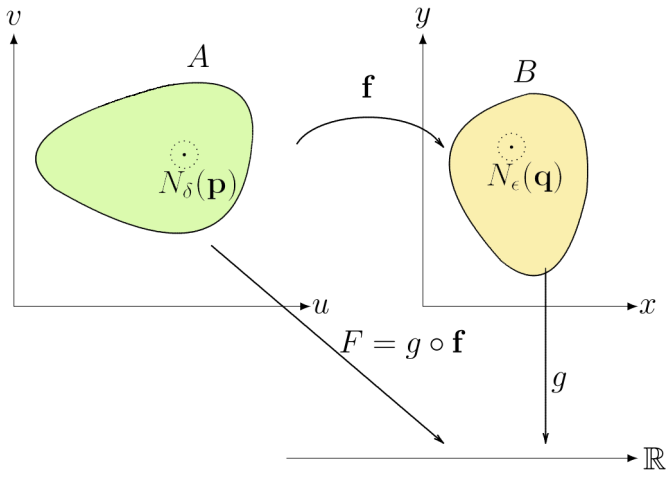


圖 10–8

【證】參見附錄十三. □

註 1： 本定理之結論亦可以矩陣方式表之如下：

$$\Big(\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{p}),\ \frac{\partial F}{\partial v}(\mathbf{p})\Big) = \Big(\frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{q}),\ \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{q})\Big) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(\mathbf{p}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(\mathbf{p}) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(\mathbf{p}) \end{pmatrix}$$

相對於單變數函數之連鎖律：

$$F'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p),\ \text{內}\ F = g \circ f.$$

讀者不妨探討二者相似之處.

註 2： 在 10.10 定理中, 若令 $z = g(x,y),\ x = f_1(u,v),\ y = f_2(u,v)$, 由於

$$F(u,v) = g(f_1(u,v), f_2(u,v)) = g(x,y) = z.$$

故定理之結論又常表爲

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial v}. \end{cases}$$

§ 10.3 可微、切面、法線與梯度

本節中我們將進一步討論 n 變數實值函數的一些觀念, 爲方便計, 我們不先限制 $n = 2$, 初學讀者可以視 n 等於 2 或 3.

在第二章中, 我們知道以下三陳述是對等的.

① f 在點 p 爲可微分;

② $\lim\limits_{t \to p} \dfrac{f(t) - f(p)}{t - p}$ 存在;

③ 存在一 $m \in \mathbb{R}$ 使得 $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f(x) - f(p) - m(x-p)}{x - p} = 0.$

儘管在第二章時, 我們採取 ② 作爲『可微』之定義, 但在多變數函數之情況下, 如何推廣方爲合理, 則須深思, 因爲某一方向導數存在並不蘊含其他方向導數存在, 即使所有 (在指定點 $\mathbf{p}$ 之) 方向導數皆存在, 亦未必有類似 ③ 之性質, 在第二章第六節中我們曾說明：③ 之極限爲 0 表示曲線 $f(x)$ 與切線 $y = f(p) + m(x-p)$ 之差趨近於 0 較 $|x-p|$ 爲快. 在二變數函數之情況, ③ 之推廣則應爲：曲面 $f(x,y)$ 與切面 (稍後證明)

$$z = f(\mathbf{p}) + D_1 f(\mathbf{p})(x - p_1) + D_2 f(\mathbf{p})(y - p_2)$$

之差趨近於 0 較 $|\mathbf{x}-\mathbf{p}|$ 爲快. 我們亦可證明：推廣的 ③ 可蘊含所有方向導數皆存在, 因此, 我們乃有以下之定義.

定義 10.11

設 f 爲 n 變數函數, $\mathbf{p}$ 爲 D_f 之一內點, 且諸偏導數 $D_jf(\mathbf{p})$ 皆存在, 若

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}}\frac{f(\mathbf{x})-\big[f(\mathbf{p})+D_1f(\mathbf{p})(x_1-p_1)+\cdots+D_nf(\mathbf{p})(x_n-p_n)\big]}{|\mathbf{x}-\mathbf{p}|}=0, \qquad (*)$$

則稱 f 在點 $\mathbf{p}$ 爲**可微** (differentiable).

對於一二變數函數 $f(x,y)$ 而言, 如果考慮在其定義域中之某點 $\mathbf{p}$, 通常有無限多個方向導數, 我們自然希望能加以簡化, 以便研究此一曲面上各點『坡度』之大小, 以及其他相關之性質, "梯度"觀念於是產生. 當然, 此一構思亦可推廣至 n 變數函數之情形, 我們先介紹其定義.

定義 10.12

設 f 爲一 n 變數函數, $\mathbf{p}$ 爲 D_f 之一內點, 若 $D_1f(\mathbf{p}),\dots,D_nf(\mathbf{p})$ 皆存在, 則稱 $\nabla f(\mathbf{p})=(D_1f(\mathbf{p}),\dots,D_nf(\mathbf{p}))$ 爲 f 在點 $\mathbf{p}$ 之**梯度向量** (gradient vector).

∇f 常被讀爲 (或寫爲) del f 或 grad f, 部分學者主張, f 必須在 $\mathbf{p}$ 之某一鄰近爲可微之情形下方能定義梯度向量, 本書雖無此一規定, 但以下諸相關定理皆規定 f 在 $\mathbf{p}$ 某一鄰近爲可微, 故使用上並不致造成困擾. 以下是有關梯度的一些性質.

定理 10.13

設 f 爲一 n 變數函數, $\mathbf{p}\in\overset{\circ}{D}_f$, 則 I $\Rightarrow$ II $\Rightarrow$ III, 其中

I. $\forall\, j=1,\cdots,n,\ D_jf$ 在點 $\mathbf{p}$ 之一鄰近 $N(\mathbf{p})$ 爲連續；

II. f 在點 $\mathbf{p}$ 爲可微；

III. f 在點 $\mathbf{p}$ 沿單位向量 $\mathbf{v}$ 之方向導數爲

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})=v_1D_1f(\mathbf{p})+\cdots+v_nD_nf(\mathbf{p})=\mathbf{v}\cdot\nabla f(\mathbf{p}).$$

【證】參見附錄十四. □

本定理說明：在可微分的情況下, 由諸偏導數即可求出各方向導數.

系 10.14

設 f 爲一二變數 (或三變數) 函數, 若 ∇f 在點 $\mathbf{p}$ 之一鄰近 $N(\mathbf{p})$ 爲連續, 則

(1) 當 $\mathbf{v}$ 與 $\nabla f(\mathbf{p})$ 之夾角爲 0 時, f 在點 $\mathbf{p}$ 沿向量 $\mathbf{v}$ 之方向導數爲最大, (即上坡最陡).

(2) 當 $\mathbf{v}$ 與 $\nabla f(\mathbf{p})$ 之夾角爲 π 時, f 在點 $\mathbf{p}$ 沿向量 $\mathbf{v}$ 之方向導數爲最小, (即下坡最陡).

(3) 當 $\mathbf{v}$ 與 $\nabla f(\mathbf{p})$ 之夾角爲 $\pi/2$ 時, f 在點 $\mathbf{p}$ 沿向量 $\mathbf{v}$ 之方向導數爲 0.

【證】因 $\mathbf{v}$ 爲一單位向量, 利用定理 10.13 及第九章內積之性質二,

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) = \mathbf{v}\cdot\nabla f(\mathbf{p}) = |\nabla f(\mathbf{p})|\cos\theta.$$

其中 θ 爲 $\mathbf{v}$ 與 $\nabla f(\mathbf{p})$ 二向量之夾角.

(1) 當 $\theta = 0$ 時, 顯然 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$ 有最大值 $|\nabla f(\mathbf{p})|$.

(2) 當 $\theta = \pi$ 時, 顯然 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$ 有最小值 $-|\nabla f(\mathbf{p})|$.

(3) 當 $\theta = \pi/2$ 時, 顯然 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p}) = 0$. □

例 1. 有一隻螞蟻在**雙曲拋物面** (hyperbolic paraboloid) $f(x,y) = y^2 - x^2$ 上爬行, 假設其目前之位置爲 $(1,2,3)$, 試問它沿什麼方向 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 爬行, 坡度最大 (亦即有最大方向導數), 並求此時之坡度 (方向導數).

【解】由於二偏導數分別爲 $D_1f(x,y) = -2x$, $D_2f(x,y) = 2y$, 是以 f 在點 $(1,2)$ 沿單位方向 $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ 之方向導數爲

$$D_{\mathbf{v}}f(1,2) = (v_1, v_2)\cdot\nabla f(1,2) = -2v_1 + 4v_2.$$

又已知當 $\mathbf{v}$ 與 $\nabla f(1,2)$ 方向相同時, $\left(\text{亦即 } \frac{v_1}{-2} = \frac{v_2}{4} > 0\right)$, 方向導數爲最大, 故只需令

$$v_1 = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2+4^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}},$$

$$v_2 = \frac{4}{\sqrt{(-2)^2+4^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

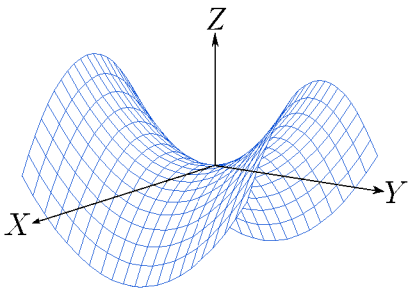


圖 10–9

亦即螞蟻在雙曲拋物面上之點 $(1,2,3)$ 沿方向 $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ 爬行坡度最大, 此時之方向導數爲

$$D_{\mathbf{v}}f(1,2) = |\nabla f(1,2)| = \sqrt{(-2)^2+4^2} = 2\sqrt{5}.$$ □

定理 10.15 （多變函數之均值定理）

設 f 在集合 $E \subset D_f$ 上爲可微分, $\mathbf{a}$ 與 $\mathbf{b}$ 之連線 $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \subset E$, 則存在 $\mathbf{c} \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$ 使得

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}).$$

【證】只證 $n = 2$ 之情形, 令 $L = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$,

$$g\colon [0, L] \to \mathbb{R} : g(t) = f\Big(\mathbf{a} + \frac{t}{L}(\mathbf{b} - \mathbf{a})\Big),$$

（沿 $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 將函數 f 取下來, 參閱圖 10–10）, 則因 g 爲一可微分函數, 利用單變數之均值定理知, 存在 $p \in (0, L)$ 使得

$$g(L) - g(0) = g'(p)(L - 0), \tag{1}$$

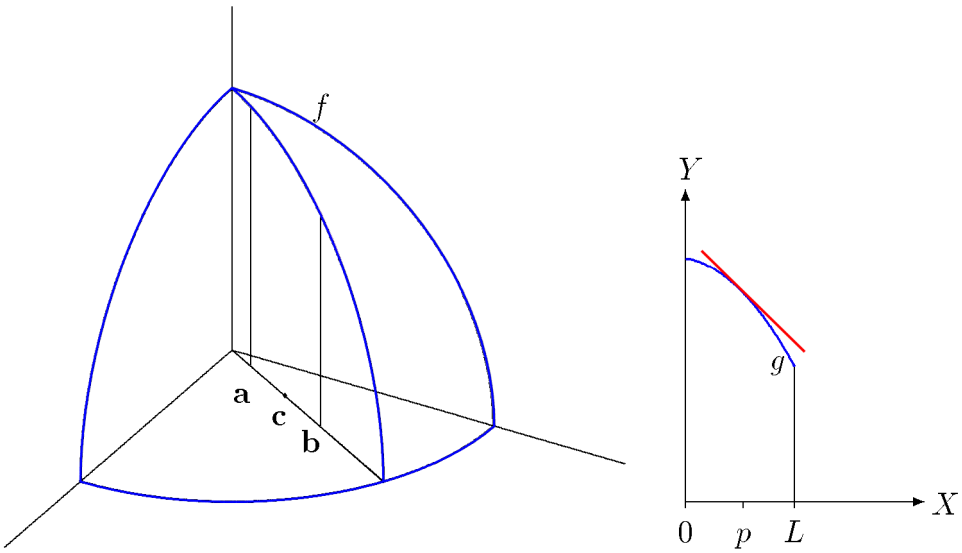


圖 10–10

其中 $g'(p)$ 顯然爲 f 在點 $\mathbf{a} + \dfrac{p}{L}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ 沿單位向量 $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{L}$ 之方向導數, 令 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \dfrac{p}{L}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$, 即

$$\begin{aligned} g'(p) &= D_{\mathbf{v}} f\Big(\mathbf{a} + \frac{p}{L}(\mathbf{b} - \mathbf{a})\Big) \\ &= \nabla f\Big(\mathbf{a} + \frac{p}{L}(\mathbf{b} - \mathbf{a})\Big) \cdot \mathbf{v} \\ &= \nabla f\Big(\mathbf{a} + \frac{p}{L}(\mathbf{b} - \mathbf{a})\Big) \cdot \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{L} \\ &= \nabla f(\mathbf{c}) \cdot \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{L}; \end{aligned}$$

又, $g(L) = f(\mathbf{b})$, $g(0) = f(\mathbf{a})$, 代入 (1) 式得所欲證. □

定理 10.16 （多變函數連鎖律之二）

設

(1) 多變數函數 $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ 爲可微分, 且 ∇f 爲連續;

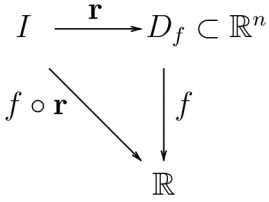
(2) 向量函數 $\mathbf{r}\colon I \to D_f$ 爲可微, (其中 I 爲一實數區間),

則合成函數 $f\circ\mathbf{r}$ 在點 $t\in \overset{\circ}{I}$ 亦爲可微分且

$$\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t).$$

【證】利用單變數函數之導數的定義,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{r}(t+h))-f(\mathbf{r}(t))}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\nabla f(\mathbf{c}(h))\cdot(\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t))}{h}, \quad [\star]\\ &= \lim_{h\to 0}\nabla f(\mathbf{c}(h))\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}\\ &= \nabla f(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t).\end{aligned}$$



[⋆] 在區間 $[\mathbf{r}(t),\mathbf{r}(t+h)]$ 上, 利用 10.15 均值定理知存在 $\mathbf{c}(h)\in(\mathbf{r}(t),\mathbf{r}(t+h))$ 使得

$$f(\mathbf{r}(t+h))-f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{c}(h))\cdot(\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)) \qquad \square$$

本定理之主要用途

(1) 若二變數函數 f 在 D_f 上任一點 (x,y) 之梯度 $\nabla f(x,y)$ 不為零向量, 則必與過點 (x,y) 之等高線垂直.

理由是：若曲面之等高線高度爲 k, 則隱函數

$$f(x,y) = k \qquad (\star)$$

乃爲等高線方程式, 我們將上述曲線予以參數化, 令 $x = r_1(t)$, $y = r_2(t)$, 則 $(\star)$ 可寫爲方程式 $f(\mathbf{r}(t)) = k$, 其次將其兩端分別對 t 微分之, 則由本定理知

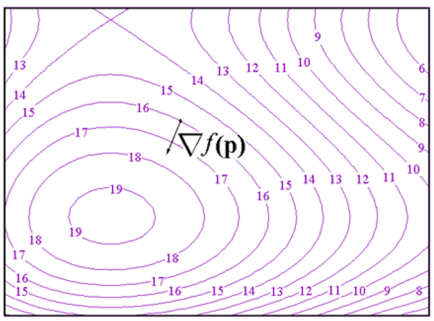


圖 10–11

$$0 = \frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t)) = \nabla f(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t).$$

其中之 $\mathbf{r}'(t)$ 乃在點 $(x(t),y(t))$ 之切向量, 是以上式表示梯度向量與切向量垂直, 換言之, 梯度向量乃等高線點 $(x(t),y(t))$ 之法向量. 其次, 我們亦應留意, 自指定點沿法線繪製梯

度向量時, 方向有二, 彼此相背, 究竟何者爲正確? 應選擇往上坡方向方爲正確, 爲何? 在系 10.14 中我們知道, 若單位向量 $\mathbf{v}$ 與 $\nabla f(\mathbf{p})$ 爲同向 (即夾角爲 0), 則有最大之方向導數, 而欲使 $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})$ 有最大值所選之方向 $\mathbf{v}$ 必爲最陡之上坡方向.

(2) 隱函數 $F(x,y)=0$ (此為一平面曲線) 過點 (x_0,y_0) 之切線方程式為

$$\nabla F(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0, \qquad \text{(公式 1)}$$

理由與前一項相仿, 方程式 $F(x,y)=0$ 中令 $(x,y)=\mathbf{r}(t)$, $(x_0,y_0)=\mathbf{r}(t_0)$,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}(t))=0 &\Rightarrow \nabla F(\mathbf{r}(t_0))\cdot\mathbf{r}'(t_0)=0, \text{ (定理 10.16)}\\ &\Rightarrow \nabla F(\mathbf{r}(t_0))\perp\mathbf{r}'(t_0)\\ &\Rightarrow \nabla F(x_0,y_0) \text{ 爲過點 } (x_0,y_0) \text{ 切線之一法向量}\\ &\Rightarrow \text{切線爲 } \nabla F(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=0. \end{aligned}$$

(3) 隱函數 $F(x,y,z)=0$ (此為一三維曲面) 過點 (x_0,y_0,z_0)之切面方程式為

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0, \qquad \text{(公式 2)}$$

理由如下 : 令 $\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ 乃曲面上過點 $\mathbf{r}(t_0)=(x_0,y_0,z_0)$ 之一弧, 其導數 $\mathbf{r}'(t_0)$ 乃該弧在點 (x_0,y_0,z_0) 之切向量, 仿 (2) 我們知道 $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ 與 $\mathbf{r}'(t_0)$ 垂直, 故 $\nabla F(x_0,y_0,z_0)$ 爲過點 (x_0,y_0,z_0) 之一法向量.

對於曲面 $z=f(x,y)$, 我們將其化爲方程式

$$F(x,y,z)=f(x,y)-z=0,$$

則因 $\nabla F(x,y,z)=(D_1f(x,y),\ D_2f(x,y),\ -1)$, 是以過曲面上一點 (x_0,y_0,z_0) 之切面與法線方程式分別爲

$$D_1f(x_0,y_0)(x-x_0)+D_2f(x_0,y_0)(y-y_0)+(-1)(z-z_0)=0 \qquad \text{(公式 3)}$$

$$\begin{cases} x-x_0=k\cdot D_1f(x_0,y_0),\\ y-y_0=k\cdot D_2f(x_0,y_0),\\ z-z_0=k\cdot(-1); \end{cases} \qquad \text{(公式 4)}$$

若 $D_1f(x_0,y_0)$, $D_2f(x_0,y_0)$ 皆不爲零, 則法線方程式可簡爲

$$\frac{x-x_0}{D_1f(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{D_2f(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad \text{(公式 5)}$$

例 2. 試求過曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{k}$ 上之點 (a,b,c) 的切平面方程式.

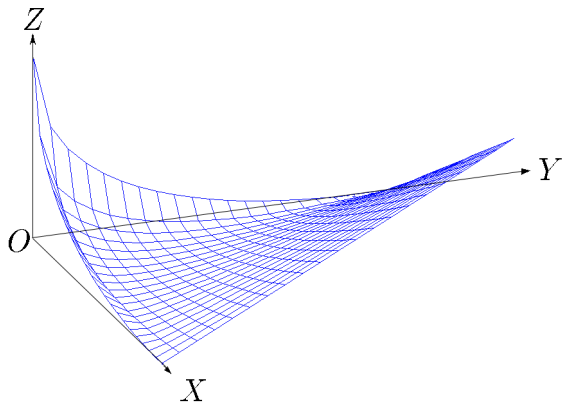


圖 10–12

【解】令 $F(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{k}$, 則因

$$\nabla F(a,b,c)=\left(\frac{1}{2\sqrt{a}},\frac{1}{2\sqrt{b}},\frac{1}{2\sqrt{c}}\right)$$

是以過點 (a,b,c) 之切平面方程式爲

$$\nabla F(a,b,c)\cdot(x-a,y-b,z-c)=0,$$

亦即

$$\frac{x-a}{\sqrt{a}}+\frac{y-b}{\sqrt{b}}+\frac{z-c}{\sqrt{c}}=0.$$ □

例 3. 試求**單葉雙曲面** (hyperboloid of one sheet) $x^2+y^2-z^2=18$ 於點 $(3,5,-4)$ 之切平面與法線.

【解】令 $F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-18$, 則因

$$\nabla F(x,y,z)=(2x,2y,-2z),$$

是以過點 $(3,5,-4)$ 之切平面爲

$$(6,10,8)\cdot(x-3,y-5,z+4)=0,$$

即

$$3x+5y+4z=18.$$

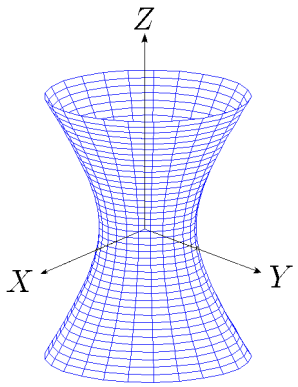


圖 10–13

由於法向量之方向數可簡化爲 3, 5, 4, 故過點 $(3,5,-4)$ 之法線爲

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-5}{5}=\frac{z+4}{4}.$$ □

例 4. 設函數 $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$, $\mathbf{p}=(1,1)$, 試求此曲面過點 $(p_1,p_2,f(\mathbf{p}))$ 之切平面與法線.

【解】首先, $f(\mathbf{p})=\tan^{-1}1=\dfrac{\pi}{4}$. 其次因

$$\begin{cases} D_1f(x,y)=\dfrac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \\ D_2f(x,y)=\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}, \end{cases}$$

是以

$$(D_1f(1,1),\ D_2f(1,1),\ -1)=\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-1\Big)$$

爲曲面過點 $(p_1,p_2,f(\mathbf{p}))$ 之一法向量, 故所求之切平面爲

$$-\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)-\Big(z-\frac{\pi}{4}\Big)=0,$$

即

$$x-y+2z=\frac{\pi}{2}.$$

法線爲

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}.$$

□

§ 10.4 Taylor 定理之推廣

在第四章中, Taylor 定理爲 : 若 f 於 $N_\delta(p)$ 爲 n 階可微, 則 $\forall\, x\in N_\delta^*(p)$, 存在 c 介於 p 與 x 之間使得

$$\begin{aligned} f(x)=f(p)+f'(p)(x-p)+\frac{f''(p)}{2!}(x-p)^2+\cdots \\ +\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n. \end{aligned}$$

令 $h=x-p\neq 0$, 則 $x=p+h$, 又令 $\theta=\dfrac{c-p}{x-p}=\dfrac{c-p}{h}$, 即 $c=p+\theta h$, 代入上述展開式, 則可獲得 Taylor 展開式之另一型式 : 當 $p+h\in N_\delta(p)$, 則存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(p+h)=f(p)+f'(p)h+\frac{f''(p)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(p+\theta h)}{n!}h^n.$$

多變數函數之 Taylor 定理係由單變數之 Taylor 演化而來, 讀者如果仔細比對, 會發現二者頗多相似之處.

定理 10.17 （**推廣之 Taylor 定理**）

設 f 在 $N_\epsilon(\mathbf{p})$ 上爲 n 階連續可偏微, 對於 $\mathbf{x}\in N_\epsilon^*(\mathbf{p})$, $\exists\,\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{p})+\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(\mathbf{p})}{1!}+\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\mathbf{p})}{2!}+\cdots$$
$$+\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(\mathbf{p})}{(n-1)!}+R_n(\mathbf{x}),$$

其中 $R_n(\mathbf{x})=\dfrac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(\mathbf{p}+\theta\mathbf{h})}{n!}$, $\mathbf{h}=\mathbf{x}-\mathbf{p}=(h,k)$,

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(\mathbf{p})=\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}h^j k^{m-j}\frac{\partial^m f(\mathbf{p})}{\partial x^j\partial y^{m-j}}.$$

【證】參見附錄十五. □

本定理之用途有三：

一. 用以解決二變數函數在某點之近似值問題. 但因計算過於繁複, 不若單變數情形, 由誤差之大小求得 n, 再求近似值. 稍後我們將以全微分方式解釋之.

二. 用以解決二變數函數之極值問題. 稍後我們將介紹一定理, 以二階偏導數方法判定是否有極值.

三. 用以將某二元多項式轉換爲含有特定因式之型式, 以下爲一範例.

例 1. 試將 $f(x,y)=x^2y+3y-2$ 表爲含 $(x-1)$ 與 $(y+2)$ 之多項式.

【解】令 $\mathbf{p}=(1,-2)$, 考慮 f 在點 $\mathbf{p}$ 之 Taylor 展開式, 由於 f 最高次爲三次, 其四階偏導數皆爲 0, 是以 $R_4(\mathbf{p})=0$, 其次因

$$\begin{array}{lll} D_1f(x,y)=2xy, & D_2f(x,y)=x^2+3, & D_{11}f(x,y)=2y,\\ D_{12}f(x,y)=2x, & D_{22}f(x,y)=0, & D_{111}f(x,y)=0,\\ D_{112}f(x,y)=2, & D_{122}f(x,y)=0, & D_{222}f(x,y)=0, \end{array}$$

其他所有更高階之偏導數均爲 0, 故

$$\begin{array}{lll} D_1f(1,-2)=-4, & D_2f(1,-2)=4, & D_{11}f(1,-2)=-4,\\ D_{12}f(1,-2)=2, & D_{22}f(1,-2)=0, & D_{111}f(1,-2)=0,\\ D_{112}f(1,-2)=2, & D_{122}f(1,-2)=0, & D_{222}f(1,-2)=0, \end{array}$$

由推廣之 Taylor 定理, 知

$$\begin{aligned}f(x,y) &= f(1,-2) + \Big[D_1f(1,-2)(x-1) + D_2f(1,-2)(y+2)\Big] \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big[D_{11}f(1,-2)(x-1)^2 + 2D_{12}f(1,-2)(x-1)(y+2) \\ &\qquad + D_{22}f(1,-2)(y+2)^2\Big] \\ &\quad + \frac{1}{3!}\Big[D_{111}f(1,-2)(x-1)^3 + 3D_{112}f(1,-2)(x-1)^2(y+2) \\ &\qquad + 3D_{122}f(1,-2)(x-1)(y+2)^2 + D_{222}f(1,-2)(y+2)^3\Big] \\ &\quad + R_4(1,-2) \\ &= -10 - 4(x-1) + 4(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) \\ &\qquad + (x-1)^2(y+2). \qquad \square\end{aligned}$$

註： 本題可不利用二變數 Taylor 定理, 以改用以下方法：

$$\begin{aligned}f(x,y) &= x^2y + 3y - 2 \\ &= ((x-1)+1)^2((y+2)-2) + 3((y+2)-2) - 2 \\ &= (u^2+2u+1)(v-2) + 3v - 8, \ (\text{令 } u = x-1,\ v = y+2) \\ &= u^2v - 2u^2 + 2uv - 4u + 4v - 10 \\ &= (x-1)^2(y+2) - 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y+2) - 4(x-1) + 4(y+2) - 10.\end{aligned}$$

更爲迅速簡單, 換言之, 以推廣之 Taylor 定理解決此類問題並非上策.

在第四章中, 我們知道 Taylor 展開式爲

$$f(x) = f(p) + f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + R_n(x)$$

其中右端之第二項 $f'(p)(x-p)$ 恰等於 f 在點 p 對增量 $x-p$ 之微分 (differential), 即

$$df(p, x-p) = f'(p)(x-p).$$

它的主要目的是用以迅速而粗略地估計 $f(x)-f(p)$ 之值. 對於多變數函數, 我們亦有類似之觀念.

定義 10.18

設 n 變數函數 f 在點 $\mathbf{p}$ 爲可微分, $\forall\, \mathbf{h} = (h_1, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$, 則稱

$$df(\mathbf{p}, \mathbf{h}) = D_1f(\mathbf{p})h_1 + D_2f(\mathbf{p})h_2 + \cdots + D_nf(\mathbf{p})h_n = \nabla f(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{h}$$

爲 f 在點 $\mathbf{p}$ 對 $\mathbf{h}$ 之**全微分** (total differential).

若 f 在點 $\mathbf{p}$ 爲可微 (參見上節之定義), 則當 $|\mathbf{h}|$ 很小時, $df(\mathbf{p},\mathbf{h})$ 可做爲 $f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})$ 之近似值. 古典微積分的寫法是

$$\text{二變數函數：}\quad df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,$$
$$\text{三變數函數：}\quad df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz.$$

其中 dx 相當於 h_1, dy 相當於 h_2, dz 相當於 h_3.

參閱圖 10–14, 一般說來, 二變數函數 f 之圖形爲在立體空間中之曲面, 點 P 表 $\mathbf{p}$ 之位置, 點 L 則表 $\mathbf{p}+\mathbf{h}$ 之位置. 設 $PS=f(\mathbf{p})$, $LQ=f(\mathbf{p}+\mathbf{h})$. 平面 $SRMV$ 是過點 S 而平行於 XY 平面之平面. C_y 乃是過點 P 而垂直於 Y 軸之平面與 f 圖形的交線, C_x 則是過點 P 而垂直於 X 軸之平面與 f 圖形的交線. $\overleftrightarrow{ST}$ 表 C_y 在點 S 之切線, $\overleftrightarrow{SU}$ 表 C_x 在點 S 之切線, $D_1f(\mathbf{p})h_1=RT$, $D_2f(\mathbf{p})h_2=VU$. 若設 W 爲由 $\overleftrightarrow{ST}$ 及 $\overleftrightarrow{SV}$ 所決定之平面與 $\overleftrightarrow{LQ}$ 的交點, 則應有 $WN=VU$, 及 $RT=MW$. 所以

$$df(\mathbf{p},\mathbf{h})=D_1f(\mathbf{p})h_1+D_2f(\mathbf{p})h_2=RT+VU=MW+WN=MN.$$

但

$$f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})-df(\mathbf{p},\mathbf{h})=LQ-PS-MN=LQ-LM-MN=NQ.$$

是以若 f 在點 $\mathbf{p}$ 爲可微, 利用由定義 10.14,

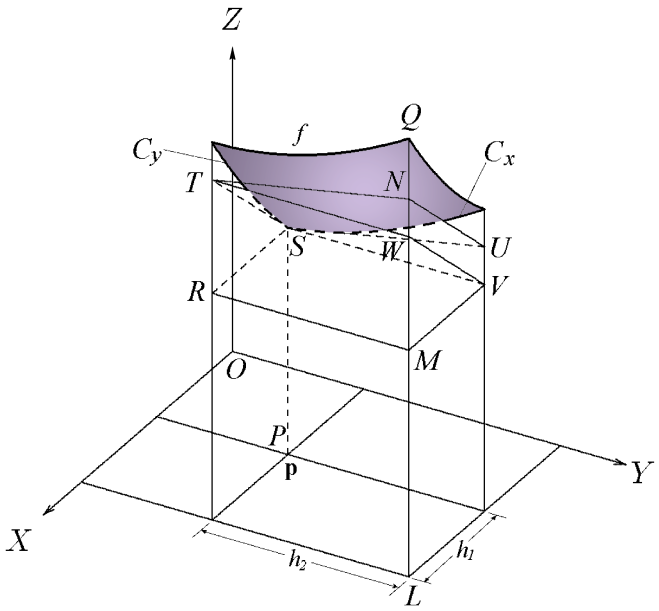


圖 10–14　全微分之幾何意義

$$\lim_{|\mathbf{h}|\to 0}\frac{NQ}{PL}=\lim_{|\mathbf{h}|\to 0}\frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})-df(\mathbf{p},\mathbf{h})}{|\mathbf{h}|}$$
$$=\lim_{|\mathbf{h}|\to 0}\frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-\big[f(\mathbf{p})+D_1f(\mathbf{p})h_1+D_2f(\mathbf{p})h_2\big]}{|\mathbf{h}|}=0.$$

此乃說明, 當 $|\mathbf{h}|$ 很小時, $f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})$ 與 $df(\mathbf{p},\mathbf{h})$ 之差異較 $|\mathbf{h}|$ 更微不足道, 我們可以 $df(\mathbf{p},\mathbf{h})$ 做爲 $f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})$ 之近似值.

例 2. 量取平面三角形之二邊長分別爲 63 公尺與 78 公尺, 其夾角爲 60°, 若測量長度之最大絕對誤差爲 0.1 公尺, 測量角度之最大絕對誤差爲 0.1°, 試利用全微分方法以求第三邊之最大絕對誤差及百分誤差.

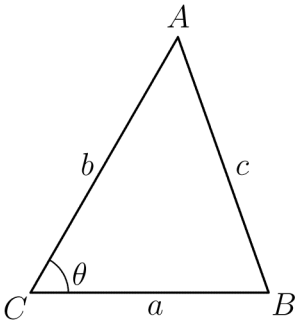


圖 10–15

【解】設三邊長分別爲 a, b, c, 其中 $a=63$, $b=78$. 由餘弦定理知

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta},$$

令

$$f(a,b,\theta)=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta},$$

則

$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{2a-2b\cos\theta}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}},\qquad \frac{\partial f}{\partial a}\Big(63,78,\frac{\pi}{3}\Big)=0.3348,$$
$$\frac{\partial f}{\partial b}=\frac{2b-2a\cos\theta}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}},\qquad \frac{\partial f}{\partial b}\Big(63,78,\frac{\pi}{3}\Big)=0.6487,$$
$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{2ab\sin\theta}{2\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}},\qquad \frac{\partial f}{\partial \theta}\Big(63,78,\frac{\pi}{3}\Big)=59.3645.$$

故 c 最大誤差之近似值的絕對值爲

$$|df|=\Big|\frac{\partial f}{\partial a}da+\frac{\partial f}{\partial b}db+\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta\Big|$$
$$\le\Big|\frac{\partial f}{\partial a}da\Big|+\Big|\frac{\partial f}{\partial b}db\Big|+\Big|\frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta\Big|$$
$$=0.3348\times 0.1+0.6487\times 0.1+59.3645\times\frac{\pi}{180}\times 0.1$$
$$=0.20195\ (\text{公尺}).$$

而第三邊之邊長爲

$$c=\sqrt{63^2+78^2-2\cdot 63\cdot 78\cdot\tfrac{1}{2}}=71.69\ (\text{公尺}).$$

是以其百分誤差爲

$$\frac{|df|}{c}\le\frac{0.20195}{71.69}=0.28\%.$$

□

§ 10.5 極值問題

關於多變數函數之絕對極值與相對 (局部) 極值的定義與第一、二章單變數函數之極值之定義相仿, 我們不再重述. 以下討論只限於局部極大與局部極小. 至於絕對極大, 若其存在, 則諸相對極大中之最大者即爲絕對極大. 絕對極小情形相仿. 但我們必須特別注意 : 相對極值之存在並不一定導致絕對極值之存在.

多變數函數判斷極值之方法有以下數種, 分別爲 Hessian 法、Lagrange 乘數法、Cauchy 不等式法及算幾不等式法, 我們分別介紹如下 :

定理 10.19

設 f 爲一二變數函數, 若

(i) $\mathbf{p} \in \overset{\circ}{D}_f$,

(ii) $D_1 f(\mathbf{p})$, $D_2 f(\mathbf{p})$ 皆存在 ,

(iii) f 在點 $\mathbf{p}$ 有局部極值 .

則 $D_1 f(\mathbf{p}) = D_2 f(\mathbf{p}) = 0$.

【證】因 f 在點 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ 有局部極大 (小) 值, 故單變數函數 $f(x, p_2)$ 在點 (p_1, p_2) 亦有局部極大 (小) 值, 由定理 2.10 知, f 在點 $\mathbf{p}$ 對 x 之偏導數 $D_1 f(\mathbf{p})$ 必爲 0, 同理, $D_2 f(\mathbf{p}) = 0$. □

系 10.20

若 f 在點 $\mathbf{p}$ 有局部極值, 則 $\mathbf{p} \in Z_{df} \cup (D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f) \cup S_f$. 其中

- $Z_{df} = \{(x, y) \in D_f \mid D_1 f(x, y) = D_2 f(x, y) = 0\}$,
- $D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f$, (非內點集合),
- $S_f = \big\{(x, y) \mid D_1 f(x, y)$ 或 $D_2 f(x, y)$ 不存在 $\big\}$.

【證】若 $\mathbf{p} \notin Z_{df} \cup (D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f) \cup S_f$, 則 f 於點 $\mathbf{p}$ 爲一階可偏微且 $D_1 f(p) \neq 0$ 或 $D_2 f(p) \neq 0$. 故由定理 10.19 知 f 於點 $\mathbf{p}$ 並無局部極值. □

本系中三集合之聯集 $Z_{df} \cup (D_f \setminus \overset{\circ}{D}_f) \cup S_f$ 亦稱爲 f 之**臨界點集**; 無極值之臨界點又稱爲 f 之一**鞍點** (saddle point).

例 1. 試求**橢圓拋物面** (elliptic paraboloid)

$$f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$$

之極值.

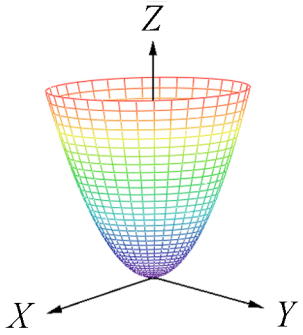


圖 10–16

【解】1° 先求臨界點, 由

$$\begin{cases} D_1f(x,y)=\dfrac{2x}{a^2}=0, \\ D_2f(x,y)=\dfrac{2y}{b^2}=0, \end{cases}$$

得 $Z_{df}=\{(0,0)\}$, 此外, $D_f\setminus\overset{\circ}{D}_f=\varnothing$, $S_f=\varnothing$. 是以臨界點僅有 $(0,0)$.

2° 討論 :

$$f(0,0)=0\le\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=f(x,y),\ \forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

故知 f 於點 $(0,0)$ 有最小值. □

例 2. 試求**雙曲拋物面** (hyperbolic paraboloid) $f(x,y)=\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}$ 之極值.

【解】1° 先求臨界點, 由於

$$\begin{cases} D_1f(x,y)=-\dfrac{2x}{a^2}, \\ D_2f(x,y)=\dfrac{2y}{b^2}, \end{cases}$$

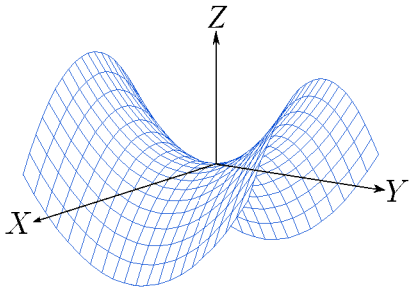


圖 10–17

由

$$\begin{cases} D_1f(x,y)=0, \\ D_2f(x,y)=0. \end{cases}$$

得 $Z_{df}=\{(0,0)\}$, 此外, $D_f\setminus\overset{\circ}{D}_f=\varnothing$, $S_f=\varnothing$.
是以臨界點僅有 $(0,0)$.

2° 討論 :

- 沿 X 軸, 因 $f(x,0)=-\dfrac{x^2}{a^2}\le 0=f(0,0)$, 知 f 於原點有極大,
- 沿 Y 軸, 因 $f(0,y)=\dfrac{y^2}{b^2}\ge 0=f(0,0)$, 知 f 於原點有極小,

故知 f 於點 $(0,0)$ 無極值, (即 (0,0) 爲 f 之一鞍點). □

定理 10.21 [**極值定理 (Extreme Value Theorem)**]

> 設 A 爲 $\mathbb{R}^n$ 之一緊緻子集 (即有界閉集合), $f\colon A \to \mathbb{R}$ 爲連續函數, 則 f 必有絕對極大及絕對極小.

【證】證明參見 Apostol, T.M., Mathematical Analysis, A Modern Approach to Advanced Calculus, 2nd ed. p.82. Theorem 4.25. □

本定理之用途與定理 1.28 相同, 若一函數連續於一緊緻集合上, 僅需比較各臨界點之函數值的大小. 即可求此函數之最大值與最小值.

例 3. 設 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2)$.

(1) 試證 : 原點爲 f 之唯一臨界點 ;

(2) 試證 : f 在點 (0,0) 沿 X 軸及沿 Y 軸皆有極小 ;

(3) 試證 : f 在點 (0,0) 沿任一方向 $\mathbf{v}$ 皆有局部極小 ;

(4) 試問 f 於原點有無極值?

【解】(1) 顯然,

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = -2x(y-2x^2) - 4x(y-x^2) = 8x^3 - 6xy, \\ D_2 f(x,y) = 2y - 3x^2. \end{cases}$$

由 $\begin{cases} D_1 f(x,y) = 0, \\ D_2 f(x,y) = 0, \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} 8x^3 - 6xy = 0 & ① \\ 2y - 3x^2 = 0 & ② \end{cases}$$

由 ② 式解得 $y = \dfrac{3}{2}x^2$ 代入 ① 式立得 $x = 0,\ y = 0$. 其次, $D_f \setminus \mathring{D}_f = \varnothing$, $S_f = \varnothing$. 是以 (0,0) 爲 f 之唯一臨界點.

(2) 沿 X 軸, $f(x,0) = 2x^4 \geq 0 = f(0,0)$;
沿 Y 軸, $f(0,y) = y^2 \geq 0 = f(0,0)$;
故知 f 在點 (0,0) 沿 X 軸及沿 Y 軸皆有極小.

(3) 其次令

$$A = \{(x,y) \mid 2x^2 > y > x^2\},$$

$$B = \{(x,y) \mid y > 2x^2 \text{ 或 } y < x^2\},$$

(圖中 $B_1 \cup B_2 = B$), 顯然

- $\forall (x,y) \in A,\ f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2) < 0$;
- $\forall (x,y) \in B,\ f(x,y) = (y-x^2)(y-2x^2) > 0$;

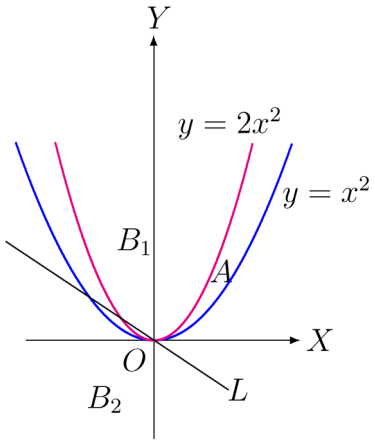


圖 10–18 f 之頂視圖

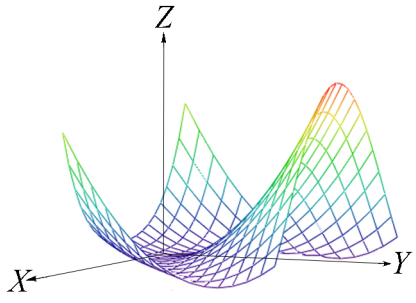


圖 10–19 f 之立體圖

通過原點沿任一方向 $\mathbf{v}$ 之直線 L, (如圖), 由於 f 在集合 $B \cap L$ 上皆爲正, 故知 f 沿 L 有局部極小.

(4) 由於原點 $(0,0)$ 之任一鄰近與 A 之交集非空, 與 B 之交集亦非空, 故 f 於 $(0,0)$ 既無極大亦無極小. □

本例說明二變數函數之極值問題遠較單變數函數情況複雜, 以下是解決此一問題之主要定理之一, 但它並非萬能, 有些問題仍需依賴其他方法.

定理 10.22

設

(i) f 在 $N_\delta(\mathbf{p})$ 上爲二階連續可偏微 ;

(ii) $D_1 f(\mathbf{p}) = D_2 f(\mathbf{p}) = 0$;

(iii) $\Delta(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} D_{11}f(\mathbf{p}) & D_{12}f(\mathbf{p}) \\ D_{21}f(\mathbf{p}) & D_{22}f(\mathbf{p}) \end{vmatrix} \neq 0$; (稱爲 Hessian.)

(1) 若 $\Delta(\mathbf{p}) > 0$ 且 $D_{11}f(\mathbf{p}) > 0$, 則 f 在點 $\mathbf{p}$ 有相對極小;

(2) 若 $\Delta(\mathbf{p}) > 0$ 且 $D_{11}f(\mathbf{p}) < 0$, 則 f 在點 $\mathbf{p}$ 有相對極大;

(3) 若 $\Delta(\mathbf{p}) < 0$, 則 f 在點 $\mathbf{p}$ 無極值 .

【證】參見附錄十五. □

註 : 當 $\Delta(\mathbf{p}) = 0$ 時, 此法不靈.

例 4. 試求 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = x^3 + y^3 - 12xy$ 之極值.

【解】1° 先求 f 之一、二階偏導數及臨界點.

$$
\begin{aligned}
D_1 f(x,y) &= 3x^2 - 12y,\\
D_2 f(x,y) &= 3y^2 - 12x,\\
D_{11} f(x,y) &= 6x,\\
D_{12} f(x,y) &= -12,\\
D_{21} f(x,y) &= -12,\\
D_{22} f(x,y) &= 6y,
\end{aligned}
$$

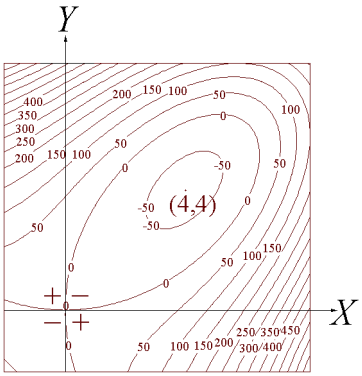


圖 10–20
f 之等高線圖
圖中 + 表函數值爲正
− 表函數值爲負

由

$$
\begin{cases}
D_1 f(x,y) = 0,\\
D_2 f(x,y) = 0.
\end{cases}
$$

得

$$
3x^2 - 12y = 0 \qquad (1)
$$

$$
3y^2 - 12x = 0 \qquad (2)
$$

由 (1) 式, $y = x^2/4$, 代入 (2) 式, 可得 $x = 0$ 或 4, 是以臨界點爲 $(0,0)$ 及 $(4,4)$.

2° 討論：由於

$$
\begin{aligned}
\Delta(0,0) &= \begin{vmatrix} D_{11} f(0,0) & D_{12} f(0,0) \\ D_{21} f(0,0) & D_{22} f(0,0) \end{vmatrix}\\
&= -144 < 0,
\end{aligned}
$$

知 f 於點 $(0,0)$ 無極值. 又

$$
\begin{aligned}
\Delta(4,4) &= \begin{vmatrix} D_{11} f(4,4) & D_{12} f(4,4) \\ D_{21} f(4,4) & D_{22} f(4,4) \end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 24 \end{vmatrix}\\
&> 0,
\end{aligned}
$$

且 $D_{11} f(4,4) = 24$, 知 f 於點 $(4,4)$ 有相對極小, 此時 $f(4,4) = -64$. □

定理 10.23 [**Lagrange 乘數法 (Lagrange's multiplier)**]

設 f 與 g 皆爲二變數連續可偏微函數, 若 f 在條件 $g(x,y)=0$ 下在點 $\mathbf{p}=(p_1,p_2)$ 有相對極值, 則存在 $\lambda_0\in\mathbb{R}$ 使得函數

$$F(x,y,\lambda)\underset{\text{def}}{=}f(x,y)+\lambda\,g(x,y)$$

對於 x, y, λ 之三變數在點 (p_1,p_2,λ_0) 之偏導數皆爲零, 即

$$\frac{\partial F(p_1,p_2,\lambda_0)}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F(p_1,p_2,\lambda_0)}{\partial y}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F(p_1,p_2,\lambda_0)}{\partial \lambda}=0, \tag{3}$$

【證】參閱附錄十六. □

註: 定理中之 (1), (2), (3) 三式亦可簡爲

$$\begin{cases}\nabla f(\mathbf{p})+\lambda_0\nabla g(\mathbf{p})=\mathbf{0}, & \text{(i)}\\ g(\mathbf{p})=0, & \text{(ii)}\end{cases}$$

此外, 本定理尙可推廣至三變數以上之情形. (i), (ii) 亦爲 f 在條件 $g(\mathbf{x})=0$ 下在點 $\mathbf{p}$ 有相對極值之必要條件.

例 5. 設有一圓銅片其中心爲原點, 其半徑爲 1, 今已知此銅片上點 (x,y) 之溫度爲

$$T(x,y)=x^2-2y^2-x.$$

試問於何處溫度爲最高? 於何處溫度爲最低?

【解】設銅片區域爲 $A=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$, 利用二階偏導數方法先求 T 在 A 之內部之極值; 再利用 Lagrange 乘數法求函數在圓周上之極值. 最後比較這些點的函數值.

1° 先求 T 在 A 內部之極值, 由於

$$\begin{aligned} &D_1T(x,y)=2x-1, && D_2T(x,y)=-4y,\\ &D_{11}T(x,y)=2, && D_{12}T(x,y)=0,\\ &D_{21}T(x,y)=0, && D_{22}T(x,y)=-4.\end{aligned}$$

若令 $\begin{cases}D_1T(x,y)=0,\\ D_2T(x,y)=0,\end{cases}$ 可解得 $(x,y)=\left(\frac{1}{2},0\right)$. 此時, 因判別式

$$\Delta\left(\frac{1}{2},0\right)=\begin{vmatrix} D_{11}T(\frac{1}{2},0) & D_{12}T(\frac{1}{2},0)\\ D_{21}T(\frac{1}{2},0) & D_{22}T(\frac{1}{2},0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0\\0&-4\end{vmatrix}=-8<0.$$

知 T 於 A 之內部無極值.

2° 以 Lagrange 方法求邊界上之極值, 令

$$F(x,y,\lambda)=x^2-2y^2-x+\lambda(x^2+y^2-1),$$

則

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda)=2x-1+2x\lambda,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda)=-4y+2y\lambda,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=x^2+y^2-1.$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y,\lambda)=0, & (1)\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y,\lambda)=0, & (2)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x,y,\lambda)=0. & (3)\end{cases}$$

由 (2) 式可解得 $y=0$ 或 $\lambda=2$.

- 當 $y=0$ 時, 顯然 $x=\pm\sqrt{1-y^2}=\pm1$.
- 當 $\lambda=2$ 時, 代入 (1) 式得 $x=\dfrac{1}{6}$, 再代入 (3) 式中可解得 $y=\pm\dfrac{\sqrt{35}}{6}$.

3° 由於 T 爲一連續函數, 且 A 爲一緊緻集合, 由極值定理知, T 必有絕對極大及絕對極小, 比較 $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1/6,\ \sqrt{35}/6)$, $(1/6,-\sqrt{35}/6)$ 諸點之函數值：

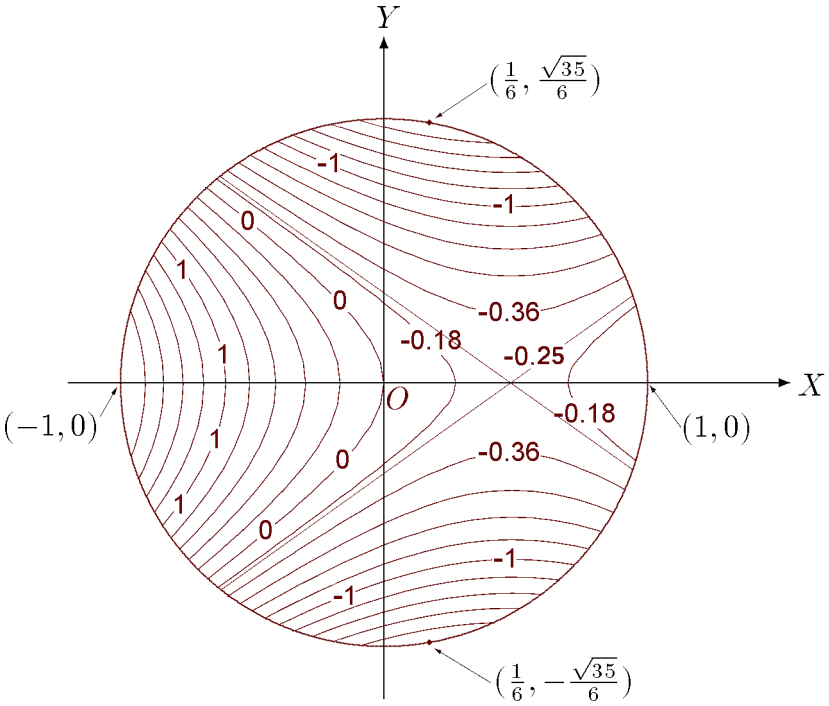


圖 10–21 T 之等高線圖

$$T(1,0) = 1 - 2\cdot 0 - 1 = 0,$$
$$T(-1,0) = 1 - 2\cdot 0 + 1 = 2,$$
$$T\Big(\frac{1}{6}, \pm\frac{\sqrt{35}}{6}\Big) = \frac{1}{36} - 2\cdot\frac{35}{36} - \frac{1}{6} = -\frac{25}{12},$$

知此一銅片在點 $(-1,0)$ 溫度最高, 在點 $\Big(\frac{1}{6}, \pm\frac{\sqrt{35}}{6}\Big)$ 溫度最低. (參閱圖 10–21).

註： 由於限制條件爲一單位圓, 吾人亦可令 $x = \cos\theta,\ y = \sin\theta,\ \theta \in [0, 2\pi]$, 則

$$T(x,y) = x^2 - 2y^2 - x = \cos^2\theta - 2\sin^2\theta - \cos\theta = 1 - 3\sin^2\theta - \cos\theta.$$

變成單變數函數, 利用單變函數之方法亦可解出極值, 但未必較 Lagrange 乘數法爲快.

例 6. 設某廠商每月總共花費 60 萬元在薪資、利息及原料上, 若 x, y, z 分別表此三項之支出 (單位: 萬元), 若其月收益爲 $P(x,y,z) = \dfrac{2xy + 2yz + 3zx}{10}$ (單位: 萬元), 試求每月每項支出各多少可使其收益爲最大, 什麼情況又使其收益爲最小.

【解】爲方便計, 以下各值皆以萬元爲單位.

1° 利用 Lagrange 乘數法, 令

$$F(x,y,z,\lambda) = \frac{2xy + 2yz + 3zx}{10} + \lambda(x + y + z - 60).$$

由 F 對各變數之偏導數皆爲 0, 可得

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0.2y + 0.3z + \lambda = 0, \tag{1}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0.2x + 0.2z + \lambda = 0, \tag{2}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0.3x + 0.2y + \lambda = 0, \tag{3}$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - 60 = 0, \tag{4}$$

由 $10\cdot((1) + (3)) - 15\cdot(2)$ 得 $4y + 5\lambda = 0$, 即

$$y = -\frac{5\lambda}{4} \tag{5}$$

又由 (2) 式得

$$x + z = -5\lambda \tag{6}$$

(5), (6) 兩式代入 (4) 式, 解得 $\lambda = -9.6$, 代回 (5) 式, 可得 $y = 12$; 再由 (1), (3) 解得 $x = z = 24$.

2° 討論：令

$$E=\{(x,y,z)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0,\ x+y+z=60\}.$$

E 爲一緊緻集合, 而 P 爲連續, 故 P 必有最大與最小, 其可能發生極值之處除點 $(24,12,24)$ 外, 尙須考慮 E 之邊界 $=A\cup B\cup C$ (如圖),

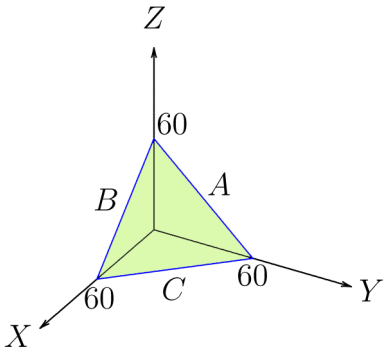


圖 10–22

其中

$$A=\{(x,y,z)\in E\mid x=0\},$$
$$B=\{(x,y,z)\in E\mid y=0\},$$
$$C=\{(x,y,z)\in E\mid z=0\}.$$

① 在 A 上, $P=0.2yz=0.2y(60-y)$, 利用第二章方法, 知當 $y=z=30$ 時, P 之最大值爲 180, 當 $yz=0$ 時可得其最小值 0,

② 在 B 上, $P=0.3xz=0.3x(60-x)$, 仿 ① 知當 $x=z=30$ 時, P 之最大值爲 270, 當 $xz=0$ 時可得其最小值 0,

③ 在 C 上, $P=0.2xy=0.2x(60-x)$, 仿 ① 知當 $x=y=30$ 時, P 之最大值爲 180, 當 $xy=0$ 時可得其最小值 0,

④ 而 $P(24,12,24)=\dfrac{2\cdot 24\cdot 12+2\cdot 12\cdot 24+3\cdot 24\cdot 24}{10}=288.$

結論：每月支出薪資、利息及原料分別爲 24, 12, 24 萬元時, 有最大收益, 三項中有二項支出爲 0 時, 收益最小. □

例 7. 試求在條件 $G(x,y,z)=x+y+z-8=0$ 下函數 $F(x,y,z)=2x^2-y^2+(z-2)^2$ 爲極小的 (x,y,z).

【解】在條件 $G(x,y,z)=x+y+z-8=0$ 下, 得 $z-2=6-x-y$, 代入

$$F(x,y,z)=2x^2-y^2+(z-2)^2$$

中, 成二變數函數 $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}: f(x,y)=F(x,y,6-x-y)=2x^2-y^2+(6-x-y)^2$. 先求 f 之一、二階偏導數及臨界點.

$$D_1f(x,y)=4x-2(6-x-y)=6x+2y-12,$$
$$D_2f(x,y)=-2y-2(6-x-y)=2x-12,$$
$$D_{11}f(x,y)=6,$$
$$D_{12}f(x,y)=2,$$
$$D_{22}f(x,y)=0,$$

由

$$\begin{cases} D_1 f(x,y) = 0, \\ D_2 f(x,y) = 0, \end{cases}$$

即聯立方程式

$$6x + 2y - 12 = 0 \tag{1}$$

$$2x - 12 = 0 \tag{2}$$

可解得唯一臨界點 $(x,y) = (6,-12)$, 而 $\Delta(6,-12) = -4 < 0$, 知 f 無任何極值, 是以所求之點不存在.

[註] 本題亦可考慮極限

$$\lim_{y\to+\infty} f(0,y) = \lim_{y\to+\infty} -y^2 + (6-y)^2 = \lim_{y\to+\infty} 36 - 12y = -\infty,$$

而知 f 無絕對極小值, 但此法不能證明無相對極小. □

定理 10.24 [**Cauchy 不等式 (Cauchy inequality)**]

設 $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, 則

(1) $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$, 亦即 $\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j\right| \le \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)}$.

(2) 若 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 皆不爲零向量, 則 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$ 之充要條件爲存在 $k > 0$ 使得 $\mathbf{y} = k\,\mathbf{x}$;

(3) 若 $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ 皆不爲零向量, 則 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$ 之充要條件爲存在 $k < 0$ 使得 $\mathbf{y} = k\,\mathbf{x}$.

【證】爲方便計, 令 $\sum = \sum_{j=1}^n$,

(1) 考慮 t 之二次多項式 : $\sum(x_j t + y_j)^2$, 則

$$\begin{aligned} 0 \le \sum(x_j t + y_j)^2 &= \left(\sum x_j^2\right) t^2 + 2\left(\sum x_j y_j\right) t + \sum y_j^2,\ \forall\, t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow\ A\,t^2 + B\,t + C \ge 0,\ \forall\, t \in \mathbb{R}, \\ &\qquad \left(\text{令 } A = \sum x_j^2,\ B = 2\sum x_j y_j,\ C = \sum y_j^2\right) \\ &\Rightarrow\ \ B^2 - 4AC \le 0,\ (\text{判別式}) \\ &\Rightarrow\ (2\textstyle\sum x_j y_j)^2 - 4(\sum x_j^2)(\sum y_j^2) \le 0 \\ &\Rightarrow\ (\textstyle\sum x_j y_j)^2 \le (\sum x_j^2)(\sum y_j^2) \\ &\Rightarrow\ |\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|. \end{aligned}$$

(2) 若存在 $k>0$ 使得 $\mathbf{y}=k\mathbf{x}$, 顯然 $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|$. 反之,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}| &\Rightarrow B^2-4AC=0\\ &\Rightarrow At^2+Bt+C=0 \text{ 只有一根}\\ &\Rightarrow \exists!\, t_0\neq 0 \text{ 使得 } At_0^2+Bt_0+C=0, \quad [\star]\\ &\Rightarrow \exists!\, t_0\neq 0 \text{ 使得 } \textstyle\sum(x_jt_0+y_j)^2=0\\ &\Rightarrow \exists!\, t_0\neq 0 \text{ 使得 } \forall\, j=1,\cdots,n,\ x_jt_0+y_j=0\\ &\Rightarrow \exists!\, t_0\neq 0 \text{ 使得 } t_0\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0}\\ &\Rightarrow \exists!\, k\neq 0 \text{ 使得 } k\mathbf{x}=\mathbf{y}, \text{ (令 } k=-t_0\text{)}\\ &\Rightarrow \exists!\, k>0 \text{ 使得 } k\mathbf{x}=\mathbf{y},\\ &\qquad \text{(因若 } k<0\text{, 則 } |\mathbf{x}|\cdot|\mathbf{y}|=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=k\textstyle\sum x_j^2<0\text{, 矛盾)}\end{aligned}$$

[⋆] 若 $t_0=0$, 則 $\sum y_j^2=C=0$, 即 $\mathbf{y}$ 爲零向量.

(3) 仿 (2), 讀者自證之. □

註: 若 $n=2$ 或 3, 利用第九章第二節『內積』之性質二

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|\cos\theta.$$

即可證得本定理.

例 8. 試求球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上之點 (x,y,z) 以使函數 $f(x,y,z)=2x-2y+z$ 有最大值與最小值.

【解】利用 Cauchy 不等式:

$$-\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}\le ax+by+cz\le\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}.$$

a, b, c 分別以 2, -2, 1 代入應有

$$-\sqrt{9(x^2+y^2+z^2)}\le 2x-2y+z\le\sqrt{9(x^2+y^2+z^2)}.$$

但已知 $x^2+y^2+z^2=1$, 是以

$$-3\le 2x-2y+z\le 3.$$

此外, 當 $(x,y,z)=k(2,-2,1)$, $k>0$ 時, (即向量 (x,y,z) 與向量 $(2,-2,1)$ 方向相同), $f(x,y,z)=2x-2y+z$ 有最大值 3. 此時因點 (x,y,z) 在球面之上, 應有

$$(2k)^2+(-2k)^2+k^2=1 \ \Leftrightarrow\ k^2=1/9 \ \Leftrightarrow\ k=1/3.$$

故知 $(x,y,z)=(2/3,-2/3,1/3)$. 同理, 若向量 (x,y,z) 與 $(2,-2,1)$ 方向相反時, $f(x,y,z)=2x-2y+z$ 有最小值-3. 此時 $(x,y,z)=(-2/3,2/3,-1/3)$. □

某些多變數極值, 亦可利用『算幾不等式』解之, 我們只舉一範例 :

例 9. 試決定一無蓋盒子之長寬高之比例, 以使其容積爲最大而盒子之材料用量爲一定量(常數).

【解】利用算幾不等式 (參見習題 3–14), 對於 a, b, $c>0$, 恆有

$$\begin{cases} \sqrt[3]{abc} \le \dfrac{a+b+c}{3}, \\ \sqrt[3]{abc} = \dfrac{a+b+c}{3} \ \Leftrightarrow\ a=b=c, \end{cases} \tag{1}$$

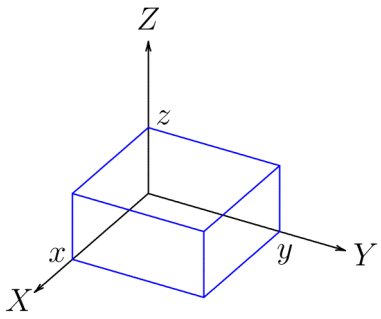


圖 10–23

令盒子之長、寬、高分別爲 x, y, z, 則盒子體積爲 $V(x,y,z) = xyz$, 原設盒子之材料面積爲 $xy+2yz+2zx = k$ (常數), 以 $xy,\ 2yz,\ 2xz$ 分別代入 (1) 中之 a, b, c, 則

$$\begin{cases} \sqrt[3]{4x^2y^2z^2} \le \dfrac{xy+2yz+2zx}{3}, \\ \sqrt[3]{4x^2y^2z^2} = \dfrac{xy+2yz+2zx}{3} \ \Leftrightarrow\ xy=2yz=2zx, \end{cases}$$

故上式可化爲

$$\begin{cases} V(x,y,z) = xyz \le \sqrt{\dfrac{k^3}{108}}, \quad \forall (x,y,z)\in A, \\ V(x,y,z) = xyz = \sqrt{\dfrac{k^3}{108}} \ \Leftrightarrow\ xy=2yz=2zx, \end{cases}$$

其中 $A = \{(x,y,z) \mid x>0,\ y>0,\ z>0,\ xy+2yz+2zx=k\}$, 換言之, 當

$$xy = 2yz = 2zx, \tag{2}$$

盒子之體積爲最大 $\sqrt{\dfrac{k^3}{108}}$, 由 (2) 式, 顯然有 $x=2z$, $y=2z$, 是以長寬高之比例爲 $2:2:1$. □

§ 10.6 隱微分法

在第三章第十二節中, 我們曾討論方程式 $F(x,y)=0$ 所界定之隱函數, 此一觀念可加以推廣而爲 $F(x,y,z)=0$ 所界定之隱函數, 例如 : 方程式

$$F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0,$$

在點 (x_0, y_0) 滿足 $x_0^2 + y_0^2 < 1$ 且 $z > 0$ 之條件下, 我們可界定一隱函數,

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in N(x_0, y_0).$$

但許多時候我們無法由方程式 $F(x, y, z) = 0$ 解出該隱函數而表爲 $z = f(x, y)$, 不過我們只希望求出該曲面上某點 (x_0, y_0) 之偏導數, 此時可仿照第三章方法以解決之, 由於隱函數理論超出本課程之程度, 仍建議讀者參考 Apostol [4], 定理 13.7 之隱函數定理.

對於方程式 $F(x, y, z) = 0$, 我們希望求得曲面上一點 (x_0, y_0, z_0) 之偏導數, 其步驟如下:

(1) 方程式之左右兩端分別對 x 偏微分之, (視 y 爲常數, z 爲 x 之函數);

(2) 移項後, 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cdots$;

(3) 以 (x_0, y_0, z_0) 代入其中之 (x, y, z) 即得所欲求;

(4) 仿之亦可求得 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

例 1. 試由方程式 $F(x, y, z) = 2xy + 2yz + z^2 = 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

【解】 1° 方程式之左右兩端分別對 x 偏微分之, (視 y 爲常數, z 爲 x 之函數), 則

$$2y + 2y\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

移項後, 得 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{y}{y + z}$.

2° 方程式之左右兩端分別對 y 偏微分之, (視 x 爲常數, z 爲 y 之函數), 則

$$2x + 2z + 2y\frac{\partial z}{\partial y} + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

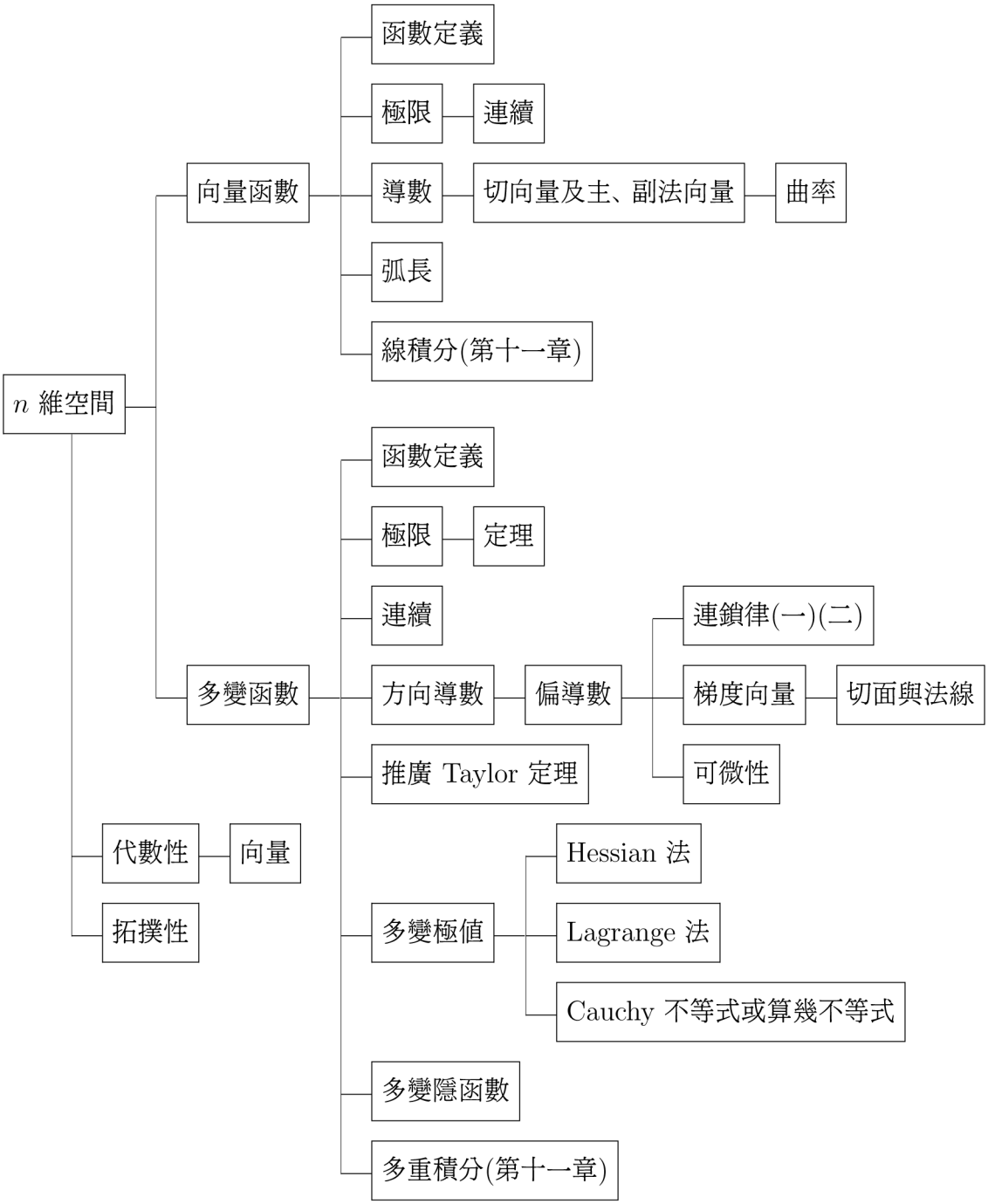
移項後, 得 $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x + z}{y + z}$. □

註： 有些教本在解方程式 $F(x, y, z) = 0$ 之隱函數之偏導數時, 利用以下公式 :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

對於初學者而言, 其內之負號反而造成一些困擾.

n 維函數系統圖


n 維空間
向量函數
函數定義
極限
連續
導數
切向量及主、副法向量
曲率
弧長
線積分(第十一章)
多變函數
函數定義
極限
定理
連續
方向導數
偏導數
連鎖律(一)(二)
梯度向量
切面與法線
可微性
推廣 Taylor 定理
代數性
向量
拓撲性
多變極值
Hessian 法
Lagrange 法
Cauchy 不等式或算幾不等式
多變隱函數
多重積分(第十一章)

第 十 章 習 題

多變數函數之極限與連續

10-1 試以 ϵ-δ 方法求下列各極限：

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x+y}$.

10-2 設函數

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{若 } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{若 } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) 試求 $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$;

(b) 試求 $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y))$;

(c) 試求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

10-3 設

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{2x^2+5y^2}, & \text{若 } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{若 } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

試討論 f 之連續性.

10-4 設

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5x+y}{x-y}, & \text{若 } x \neq y, \\ 0, & \text{若 } x = y. \end{cases}$$

試問 f 於何處不爲連續.

10-5 設 $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : f(x,y) = \begin{cases} (x-y)\sin\dfrac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ k, & \text{若 } x = 0. \end{cases}$

(a) 試問 k 爲何值可使 f 於原點爲連續.

(b) 若 $k=1$, 試問 f 在點 (0,0) 之極限爲何?

方向導數及偏導數

10-6 試求函數 $f(x,y)=(x-1)y^2\cdot e^{xy}$ 在點 $\mathbf{p}=(1,-1)$ 指向點 $\mathbf{a}=(-1,3)$ 之方向導數.

10-7 試求下列函數之二階偏導函數:

(a) $f(x,y,z)=z\cdot\sin(x-y)$;

(b) $f(x,y,z)=\ln(x^2+yz-z^2)$.

10-8 一半徑爲 10 公分之圓金屬片上, 已知各點之溫度爲 $T(x,y)=3x^2+2xy$ (長度單位爲公分, 溫度單位爲攝氏度).

(a) 試求在點 $(3,-6)$ 之最大溫度變率 (即最大方向導數);

(b) 試求上述在點 $(3,-6)$ 最大變率之方向爲何?

10-9 設 (i) $f_x(x,y)=x^2+y^2$, (ii) $f_y(x,y)=2xy$, (iii) $f(0,0)=1$. 試求 $f(x,y)$.

10-10 設函數 $F(x,y,z)=xe^{yz}+2z$ 且點 $P=P(2,0,-4)$.

(a) 試問 F 在點 P 沿何方向其方向導數爲最大?

(b) 令 S 爲曲面 $F(x,y,z)+6=0$, 試求其於點 P,S 之切面方程式.

(c) 試求上述切面與 XY 平面之夾角 θ, 其中 $0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$.

10-11 試求平行於平面 $x+4y+6z=0$ 且爲曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 之切平面.

10-12 試求曲線 $x^2+y^2+z^2=14, x+y+z=6$ 在 $(1,2,3)$ 之切線及法平面.

極值及其他應用問題

10-13 設 $f(x,y)=(x-y)(xy-1)$. 試問 f 於何處有極大、極小值?

10-14 設 $f(x,y)=x^4+y^4-2(x-y)^2$. 試問 f 於何處有極大、極小值?

10-15 設 $f(x,y)=\dfrac{1}{x}+xy-\dfrac{8}{y}$. 試問 f 於何處有極大、極小值?

10-16 試求 $(2,2,0)$ 至拋物面 $x^2+y^2-2z=0$ 之最短距離.

10-17 試問函數 $f(x,y)=xy+(x+y)(10-x-y)$ 是否有最大值? 是否有最小值?

10-18 (a) 設 $f(x,y,z)=(xyz)^{1/3}$, 其中 x,y,z 爲三非負實數且滿足 $x+y+z=k$ (k 爲大於 0 之常數), 利用 Lagrange 方法以求 f 之最大值.

(b) 利用 (a) 證明 : 三非負實數之幾何平均恆小於或等於其算術平均.

10-19 在直徑爲 d 單位之圓形木中, 截取一具有最大抗彎強度之矩形梁, 由材料學知若矩形之厚度爲 b 單位, 高爲 h 單位, 其抗彎強度與 bh^2 成比例. 試求 $d : h : b =$?

10-20 試在 $x^2 - xy + y^2 = 4$ 的條件下, 求 $T(x, y) = x^2 + y^2$ 的極值.

10-21 二正立方體之體積和爲 250 cm^2. 試求其可能之最大及最小表面積?

10-22 欲以最少的紙板面積做一個容器爲一立方公尺的無蓋長方形盒子, 試求其長、寬及高各若干.

10-23 一製造商生產 A, B, C 三種產品, 其收益及產量如下:

產品	每單位收益 (元)	每日之產量
A	6	x
B	8	y
C	10	z

市調部門決定限制產量生產關係爲 $x^2 + y^2 + z^2 = 800$. 試求每種產品之產量以使之每日收益爲最大.

10-24 設 (a, b, c) 爲第一卦限上之一點, 試求過此點且與三坐標面所圍在第一卦限之四面體之體積爲最小之平面.

[提示] 設平面爲 $\dfrac{x}{A} + \dfrac{y}{B} + \dfrac{z}{C} = 1$.

Chapter 11

重積分與線積分

以上兩章中, 我們將實值實變函數之微分問題推廣到

(1) 實變向量函數, 即 $\mathbf{f}\colon A(\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$;

(2) 多變數實值函數, 即 $f\colon A(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$.

本章則將討論上述二類函數之積分概念, 傳統上, 多變數實值函數之積分問題稱爲多重積分 (multiple integral); 而實變向量函數之積分則稱爲線積分 (line integral). 關於前者, 我們將偏重二變數函數積分概念的討論, 因爲它比較易於掌握, 而且是更進一步推廣的基礎. 第七章中我們曾探討旋轉體之體積問題, 對於非旋轉體, 當時我們所能著力之處頗爲有限, 本章將提供更爲廣泛而且方便之方法. 關於線積分, 它不若體積觀念之通俗, 我們將在稍後深入探討.

§ 11.1 二重積分

單變數函數 $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 之 Riemann 積分是將區間 $[a,b]$ 分割爲 n 個子區間, 利用『高 $\times$ 底』之面積概念而求得『上、下和數』, 最後再以上、下積分方式來界定 Riemann 積分.

本章中, 我們將模仿單變數之情形, 推廣而得二重積分, 二者最大的不同是如何處理分割的概念, 對於 $f\colon R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, 如果我們將區間 $[a,b]$ 分割爲 m 個子區間, 而將區間 $[c,d]$ 分割爲 n 個子區間, 則矩形 R 被分割爲 $m \times n$ 個子矩形, 利用這些子矩形可得到 $m \times n$ 根小柱子, 並進一步求得『上、下和數』, 其餘部分和第六章十分相似.

首先, 設 $f\colon R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ 爲有界, 集合

$$P = \{(x_i, y_j) \mid 0 \le i \le m,\ 0 \le j \le n\}$$

稱爲一**分割**, 此時 $S_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ 稱爲第 i,j **子矩形** (sub-rectangle) (圖 11–1 彩色部分), 令 $A(S_{ij})$ 表其面積, 其次, $\forall\, i \in \{1,\dots,m\},\ j \in \{1,\dots,n\}$, 令

$$M_{ij} = \sup f(S_{ij}),\ m_{ij} = \inf f(S_{ij}),$$

則

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}A(S_{ij}),$$
$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}A(S_{ij}),$$

分別稱爲 f 對分割 P 之**上、下和數** (upper and lower sum).

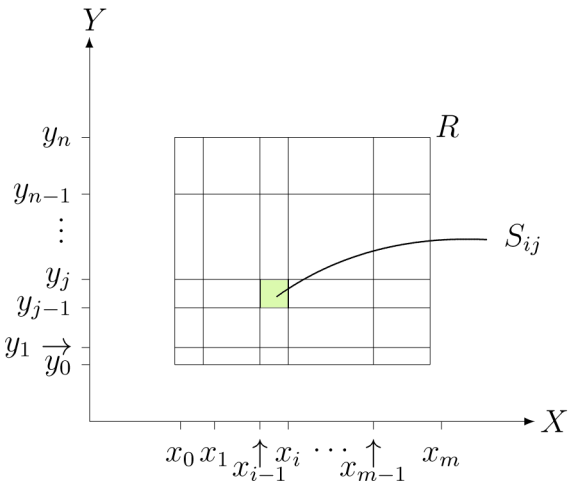


圖 11–1

定義 11.1

設函數 $f\colon R=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, 令

$$\overline{\int_R} f=\inf\left\{U(f,P)\,\middle|\,P\text{ 爲 }R\text{ 之分割}\right\},$$
$$\underline{\int_R} f=\sup\left\{L(f,P)\,\middle|\,P\text{ 爲 }R\text{ 之分割}\right\},$$

並分別稱爲函數 f 在 R 上之**上、下積分**. 若 $\overline{\int_R} f=\underline{\int_R} f$, 則稱 f 在 R 上爲 (Riemann) **可積**, 且令 $\int_R f=\overline{\int_R} f=\underline{\int_R} f$, 稱爲 f 在 R 上之 Riemann **積分**, 亦寫爲 $\iint_R f(x,y)\,dA$ 或 $\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$.

上下積分存在性之證明與第六章單變數之 Riemann 積分情況相似, 在此從略.

註：在上述定義中, 我們僅規定函數 f 爲有界, 如果 $f \geq 0$, 一旦 f 爲可積, 則二重積分

$$\iint_R f(x,y)\,dA$$

乃表示介於曲面 $z = f(x,y)$ 與 XY 平面, 而在矩形 R 上之體積. 如圖 11–2 所示.

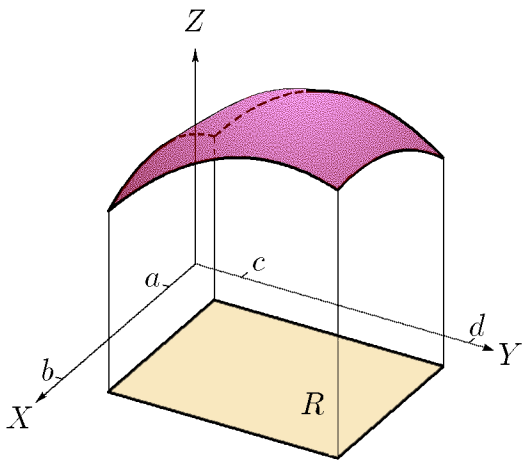


圖 11–2

例 1. 設 $R = [a,b] \times [c,d]$, $f\colon R \to \mathbb{R} : f(x,y) = k$, k 爲一常數. 試求二重積分

$$\iint_R f(x,y)\,dA.$$

【解】對於 R 之任一分割 $P = \{(x_i, y_j) \mid 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n\}$ 均有 $M_{ij} = m_{ij} = k$, 故

$$U(f,P) = L(f,P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} k \cdot A(S_{ij}) = k\,A(R) = k(b-a)(d-c).$$

是以

$$\overline{\int_R} f = \underline{\int_R} f = k(b-a)(d-c).$$

亦即 $\iint_R f(x,y)\,dA = k(b-a)(d-c)$. □

例 2. 設 $R = [0,1] \times [0,1]$, 函數

$$f\colon R \to \mathbb{R} : f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x,\, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{否則.} \end{cases}$$

試問 f 於 R 上是否爲 Riemann 可積?

【解】對於 R 之任一分割 $P = \{(x_i, y_j) \mid 0 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n\}$ 均有 $M_{ij} = 1$, $m_{ij} = 0$, 故

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} 1 \cdot A(S_{ij}) = A(R) = 1,$$

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} 0 \cdot A(S_{ij}) = 0,$$

是以

$$\overline{\int_R} f = \inf\{U(f,P) \mid P \text{ 爲 } R \text{ 之分割}\} = 1,$$
$$\underline{\int_R} f = \sup\{L(f,P) \mid P \text{ 爲 } R \text{ 之分割}\} = 0,$$

二者不相等, 故知 f 於 R 上不爲 Riemann 可積. □

以上討論的都是二變數函數在閉矩形的積分, 現在我們準備將積分觀念推廣到非矩形區域上.

定義 11.2

設 $f\colon A \to \mathbb{R}$, 集合 A 爲有界, 若存在一包含 A 閉矩形 R 使得函數

$$f_A\colon R \to \mathbb{R} : f_A(x,y) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x,y), & \text{若 } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{若 } (x,y) \notin A, \end{cases}$$

在 R 上爲可積, 則稱 f 在 A 上爲**可積**, 且規定 $\displaystyle\int_A f = \int_R f_A$.

註：上述定義中所述之閉矩形 R, 若存在則不必考慮究竟是哪一個, 因爲對於任何一個 R, $\displaystyle\int_R f_A$ 皆相等.

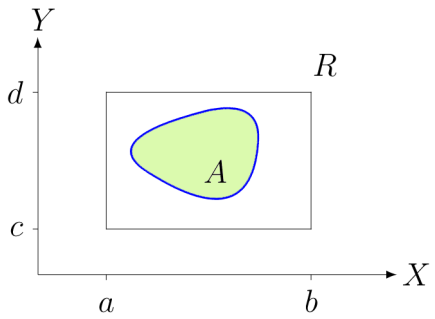


圖 11–3

定理 11.3

若 f, g 在 $A \subset \mathbb{R}^2$ 上爲可積, $\alpha \in \mathbb{R}$, 則

(1) αf 爲可積且 $\displaystyle\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$;

(2) $f+g$ 爲可積且 $\displaystyle\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$;

(3) 若 $f \le g$, 則 $\displaystyle\int_A f \le \int_A g$.

【證】參閱附錄十七. □

定理 11.4

若 f 在 $A \subset \mathbb{R}^2$ 上爲殆遍連續 †, 則 f 在 A 上爲可積.

【證】超出本課程程度, 有興趣讀者可參閱高等微積分之書籍. □

定理 11.5 (積分加法律)

設 $\mathbb{R}^2$ 之子集 A_1 與 A_2 至多只有邊界共有 (參閱圖 11–4), 若 f 在集合 A_1, A_2 上皆爲可積, 則 f 在 $A = A_1 \cup A_2$ 上爲可積, 且

$$\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f.$$

【證】證明從略. □

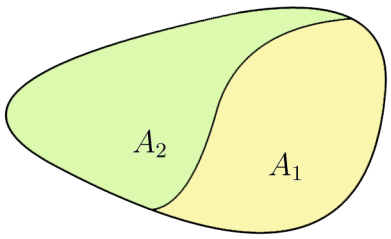


圖 11–4

§ 11.2 累次積分

一函數是否可積固然重要, 但求出其積分值, 無疑更具意義, 對於初學者而言, 若不能計算二重積分之值, 此一概念肯定毫無價值可言, 本節中我們將以『切片法』觀念建立所謂累次積分, 並進而解決二重積分之求值問題.

† 所謂『殆遍連續』係指集合 $\{(x,y) \mid f$ 於點 (x,y) 不為連續$\}$ 之測度 (measure 即面積觀念之推廣) 為零. 我們知道在平面上, 一點之面積為 0, 含有 100 個點之集合, 其面積亦為 0, 單位圓之圓周 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 其面積為 0.

定理 11.6

設 $f\colon R=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 爲有界, 如果

(1) $\forall\, y\in[c,d], f_y\colon [a,b]\to\mathbb{R}: f_y(x)\underset{\text{def}}{=} f(x,y)$ 爲可積, $\Big($對於每一 y 可得一積分值 $\displaystyle\int_a^b f_y(x)\,dx\Big)$;

(2) 函數 $F\colon [c,d]\to\mathbb{R}: F(y)\underset{\text{def}}{=}\displaystyle\int_a^b f_y(x)\,dx$ 爲可積 .

則

$$\int_c^d F(y)\,dy=\int_c^d\int_a^b f_y(x)\,dx\,dy=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$

稱爲先對 x 再對 y 之**累次積分** (iterated integral). 同理

$$\int_a^b\int_c^d f_x(y)\,dy\,dx=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

稱爲先對 y 再對 x 之**累次積分**.

爲使上述定義易於了解起見, 我們以圖 11–5 作如下之幾何解釋 : 設函數 $f(x,y)>0$, $\forall\,(x,y)\in R$, 則

$$F(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)\,dx$$

乃表示平面 $y=y_0$ 與 $z=f(x,y)$ 所交曲線下之區域 (彩色部分) 的面積, 於是, 對於任意 y, $F(y)$ 便成爲第七章裡以切片法求體積時之截面面積函數. 故

$$\int_c^d F(y)\,dy=\int_c^d\Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]\,dy$$

乃是曲面 $z=f(x,y)$ 在 R 上所圍立體之體積.

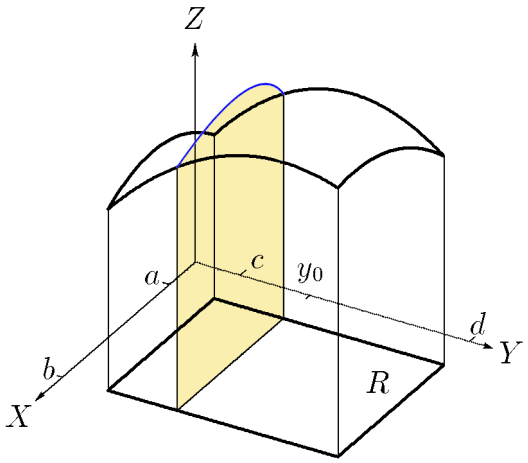


圖 11–5

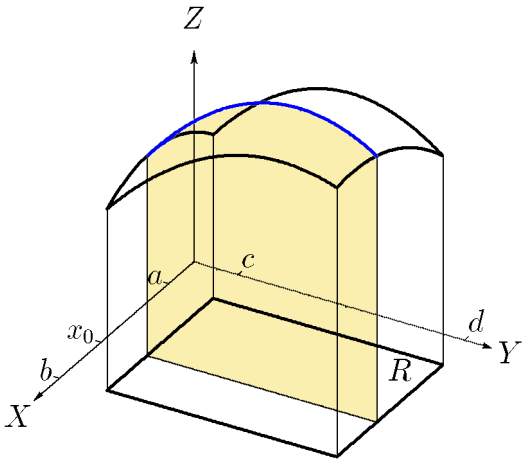


圖 11–6

同理, $G(x_0)=\int_c^d f(x_0,y)\,dy$ 乃表示平面 $x=x_0$ 與 $z=f(x,y)$ 所交曲線下之面積, 於是 $G(x)$ 乃爲以切片法求體積時截面面積函數. 故

$$\int_a^b G(x)\,dx=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx$$

乃是曲面 $z=f(x,y)$ 在 R 上所圍立體之體積, 如圖 11–6 所示 :

定理 11.7

設 $f\colon R=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 爲可積,

(1) 若 $\forall\, y\in[c,d],\ f_y\colon[a,b]\to\mathbb{R}:f_y(x)=f(x,y)$ 爲可積, 則函數

$$F\colon[c,d]\to\mathbb{R}:F(y)=\int_a^b f_y(x)\,dx$$

爲可積且

$$\int_R f=\int_c^d F(y)\,dy=\int_c^d\Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy.$$

(2) 若 $\forall\, x\in[a,b],\ g_x\colon[c,d]\to\mathbb{R}:g_x(y)=f(x,y)$ 爲可積, 則函數

$$G\colon[a,b]\to\mathbb{R}:G(x)=\int_c^d g_x(y)\,dy$$

爲可積且

$$\int_R f=\int_a^b G(x)\,dx=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx.$$

【證】(1) 與 (2) 之證明相仿, 我們只證 (2), 參閱附錄十八. □

系一 11.8

設 $g_1,\ g_2\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲連續可微分, 且 $g_1\le g_2$,

$$A=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\},$$

$f\colon A\to\mathbb{R}$ 爲連續, 則

$$\int_A f=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

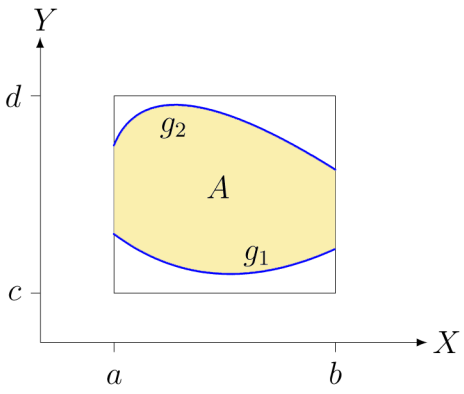


圖 11–7

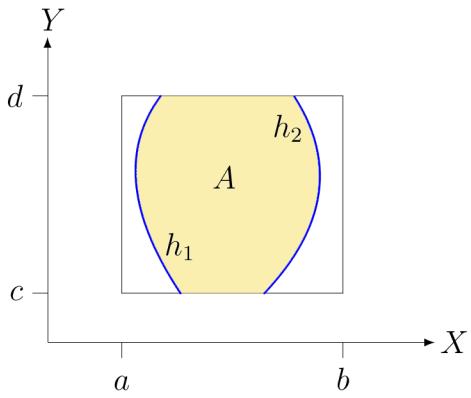


圖 11–8

【證】今取 $c \le \inf g_1[a,b]$ 及 $d \ge \sup g_2[a,b]$ (參閱圖 11–7), 則區域 A 必爲包含於閉矩形 $R = [a,b] \times [c,d]$. 其次, 利用定義 11.2, 令

$$f_A \colon R \to \mathbb{R} : f_A(x,y) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} f(x,y), & \text{若 } (x,y) \in A, \\ 0, & \text{若 } (x,y) \notin A, \end{cases}$$

由於 f_A 在 R 上爲殆遍連續, 故知其於集合 A 上爲可積, 是以

$$\begin{aligned} \int_A f &= \int_R f_A, && \text{(見定義 11.2)} \\ &= \int_a^b \int_c^d f_A(x,y)\,dy\,dx, && \text{(定理 11.7)} \\ &= \int_a^b \left[\int_c^{g_1(x)} f_A(x,y)\,dy + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f_A(x,y)\,dy + \int_{g_2(x)}^{d} f_A(x,y)\,dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[0 + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy + 0 \right] dx \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx. \end{aligned}$$

□

系二 11.9

設 $h_1,\ h_2 \colon [c,d] \to \mathbb{R}$ 爲連續可微分, 且 $h_1 \le h_2$,

$$A = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

$f \colon A \to \mathbb{R}$ 爲連續, 則

$$\int_A f = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

【證】仿系一之證, 唯應注意 $x = h_1(y),\ x = h_2(y)$ 皆爲 y 之函數, 參閱圖 11–8. □

例 1. 設 S 爲在第一象限內且由曲線 $y=x^2$ 及 $x=y^4$ 所圍區域, 試求函數 $f(x,y)=\sqrt{x}-y^2$ 在 S 上之二重積分.

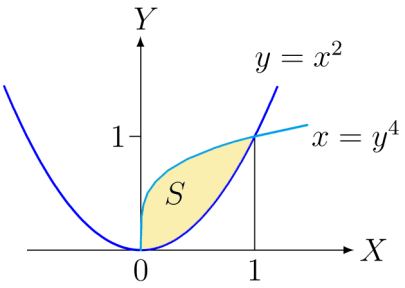


圖 11–9

【解】**法一**：由原設知

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x^{1/4}\},$$

故所求二重積分之值爲

$$\begin{aligned}\iint_S(\sqrt{x}-y^2)\,dA &= \int_0^1\int_{x^2}^{x^{1/4}}(x^{1/2}-y^2)\,dy\,dx\\ &= \int_0^1\Big[x^{1/2}y-\frac{1}{3}y^3\Big]_{y=x^2}^{y=x^{1/4}}\,dx\\ &= \int_0^1\Big(\frac{2}{3}x^{3/4}-x^{5/2}+\frac{1}{3}x^6\Big)\,dx=\frac{1}{7}.\end{aligned}$$

法二：對調積分次序. 利用圖 11–9 先將集合 S 改爲

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1,\ y^4\le x\le y^{1/2}\},$$

$$\begin{aligned}\iint_S(\sqrt{x}-y^2)\,dA &= \int_0^1\int_{y^4}^{y^{1/2}}(x^{1/2}-y^2)\,dx\,dy\\ &= \int_0^1\Big[\frac{x^{3/2}}{3/2}-y^2x\Big]_{x=y^4}^{x=y^{1/2}}\,dy\\ &= \int_0^1\Big(\frac{2}{3}y^{3/4}-y^{5/2}+\frac{1}{3}y^6\Big)\,dx=\frac{1}{7}.\end{aligned}$$

□

例 2. 試求 $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 \exp(x^3)\,dx\,dy=?$

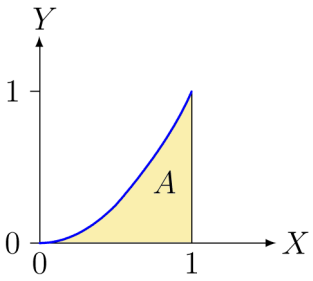


圖 11–10

【解】利用對調積分次序方法, 由於積分範圍

$$\begin{aligned}A&=\{(x,y)\mid 0\le y\le 1,\ \sqrt{y}\le x\le 1\}\\ &=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x^2\}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\text{原題}&=\iint_A \exp(x^3)\,dx\,dy\\ &=\iint_A \exp(x^3)\,dy\,dx,\ (\text{因被積函數爲連續})\\ &=\int_0^1\int_0^{x^2} e^{x^3}\,dy\,dx=\frac{1}{3}\int_0^1(3x^2)e^{x^3}\,dx=\frac{1}{3}e^{x^3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(e-1).\end{aligned}$$

□

例 3. 一立體區域爲由曲面 $z = x^2 + 4y^2$, XY 平面, 及二柱面 $x = y^2$, $y = x^2$, 所圍成. 試繪出此立體之圖形並求其體積.

【解】其圖形如圖 11–11 左圖. 由於 $f(x, y) = x^2 + 4y^2$, 而積分範圍爲

$$A = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\};$$

故所欲求之體積爲

$$\begin{aligned}
\int_A f &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2)\, dy\, dx \\
&= \int_0^1 \Big[x^2 y + \frac{4y^3}{3}\Big]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}\, dx \\
&= \int_0^1 \Big(x^{5/2} + \frac{4x^{3/2}}{3} - x^4 - \frac{4x^6}{3}\Big)\, dx \\
&= \Big[\frac{2}{7}x^{7/2} + \frac{8x^{5/2}}{15} - \frac{x^5}{5} - \frac{4x^7}{21}\Big]_0^1 \\
&= \frac{2}{7} + \frac{8}{15} - \frac{1}{5} - \frac{4}{21} = \frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

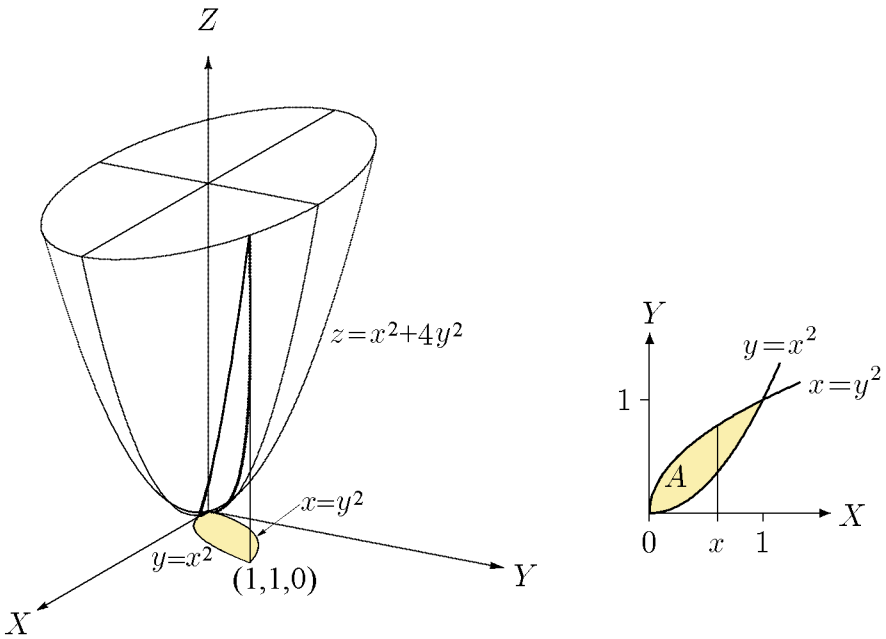


圖 11–11 □

§ 11.3 二重積分之極坐標變換

我們常用的坐標系稱爲笛卡爾直角坐標 (Cartesian rectangular coordinates), 在 $\mathbb{R}^2$ 平面上尚有另外一種坐標系統, 在計算二重積分時, 常提供很好的解決方法, 我們將介紹如下 :

(1) 極坐標 (polar coordinates)

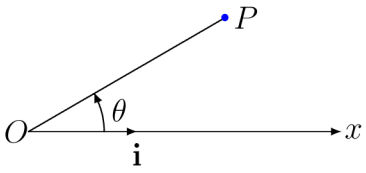


圖 11–12A

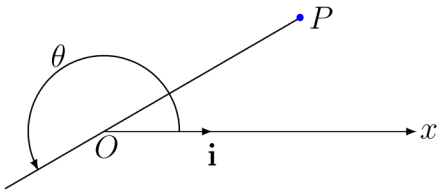


圖 11–12B

固定一點 O 稱爲**原點** (origin) 或**極** (pole), 自 O 指定一固定軸, 稱爲**極軸** (polar axis), 在極軸上決定單位向量 (與極軸同向) $\mathbf{i}$, 此時我們可得一坐標系統. 對於平面上任一非原點 P, 可由 OP 距離與二線之夾角 θ 來定位, 若自極軸以逆時針方向計, 則 θ 爲正, 否則爲負. 其次我們可以令 r 等於 O 與 P 之距離, 此時點 P 以 $P(r,\theta)$ 表之 (如圖 11–12A), 但表示方法並不唯一, 如果我們選擇向量 $\mathbf{i}$ 與 $\overrightarrow{OP}$ 之反向的夾角爲 θ (如圖 11–12B), 則 $r=-OP$; 此外, 角度並不限制爲 0 至 2π, 任何實數皆可, 是以 $\mathbb{R}^2$ 上任一點均可有各種不同之極坐標方式以表示之. 當然, 原點可表爲 $(r,\theta)=(0,0)$.

例如, 直角坐標的點 $P=(1,1)$, 我們可用以下之極坐標表之 :

$$(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}),\ (-\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}),\ (-\sqrt{2},-\frac{3\pi}{4}).$$

(2) 極坐標函數

若視 r 爲角度 θ 之函數, 通常表爲 $r=r(\theta)$, 在指定角度之範圍 $\alpha\le\theta\le\beta$ 之後, 形成一平面曲線 (參見圖 11–13), 此一曲線若以直角坐標表之則爲

$$C=\big\{(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\big|\,\alpha\le\theta\le\beta,\ r=r(\theta)\big\}.$$

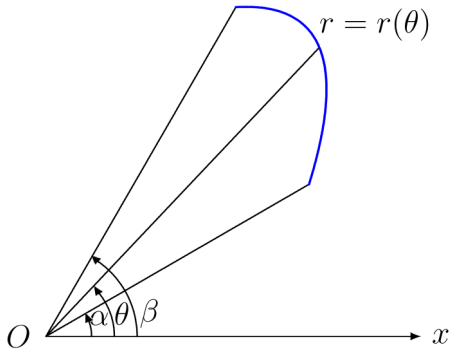


圖 11–13

以下是一些常見的極坐標函數 :

1° **心臟線** (cardioid)(一)：

$$r = 1 - \sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi,$$

若以『手工』繪製：

第一步：先將 θ 之範圍分爲 n 等分, 當然以方便爲原則, 在此, 我們將取特別角, 但因所得之點太少, 我們 θ 之取點又增加了一倍, 利用計算器求出對應之 $r(\theta)$ 值, 如下表：

θ	$r(\theta)$	θ	$r(\theta)$
0	1.000	$13\pi/12$	1.259
$\pi/12$	0.7412	$14\pi/12$	1.5
$2\pi/12$	0.5000	$15\pi/12$	1.707
$3\pi/12$	0.2929	$16\pi/12$	1.866
$4\pi/12$	0.134	$17\pi/12$	1.966
$5\pi/12$	0.03407	$18\pi/12$	2
$6\pi/12$	0	$19\pi/12$	1.966
$7\pi/12$	0.03407	$20\pi/12$	1.866
$8\pi/12$	0.134	$21\pi/12$	1.707
$9\pi/12$	0.2929	$22\pi/12$	1.5
$10\pi/12$	0.5	$23\pi/12$	1.259
$11\pi/12$	0.7412	2π	1
π	1		

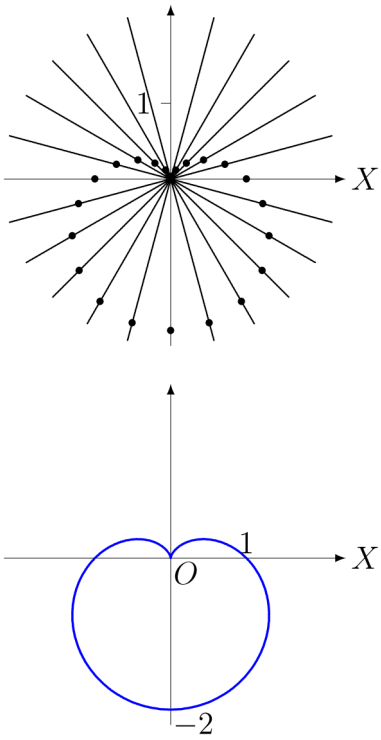


圖 11–14

第二步：將表中各點依極坐標方式將其『點』在圖上；

第三步：將這些點依序連接起來, 即得心臟線, 如右圖所示.

如此繪製極坐標圖形, 顯然並不容易, 拜電腦軟體之賜, 如今已有不少軟體可直接繪製『極坐標』圖形, 如 MathCAD, Maple, Mathematica 等皆爲不錯之工具.

2° **心臟線**(二)：$r = 1 - \cos\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$, 參見圖 11–15.

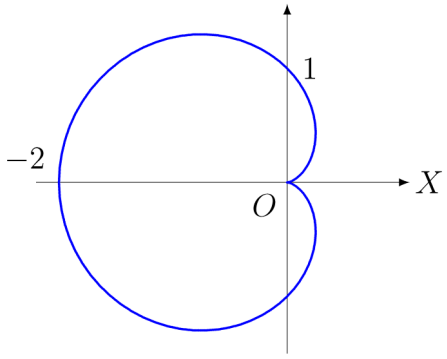


圖 11–15

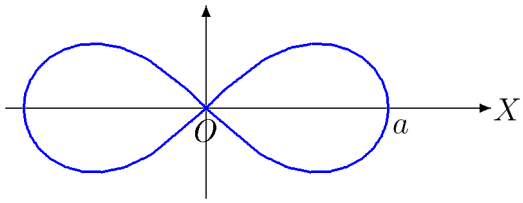


圖 11–16

3° **雙葉玫瑰** (lemniscate)(又稱**雙紐線**) : $r^2 = a^2 \cos 2\theta,\ -\dfrac{\pi}{4} \le \theta \le \dfrac{\pi}{4},\ (a > 0)$, 參見圖 11–16.

4° **三葉玫瑰** (three-leaved rose) : $r = a \sin 3\theta,\ 0 \le \theta \le \pi,\ (a > 0)$, 參見圖 11–17.

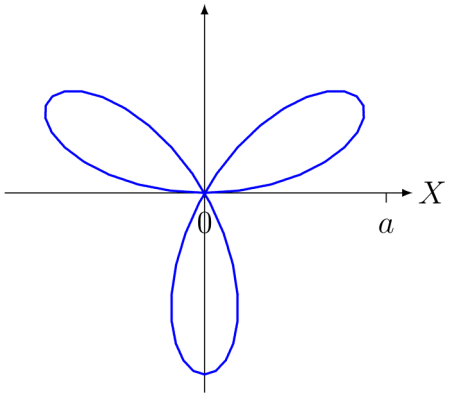


圖 11–17

5° **四葉玫瑰** (four-leaved rose)(一) : $r = \cos 2\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$, 參見圖 11–18.

6° **四葉玫瑰** (four-leaved rose)(二) : $r = \sin 2\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$, 參見圖 11–19.

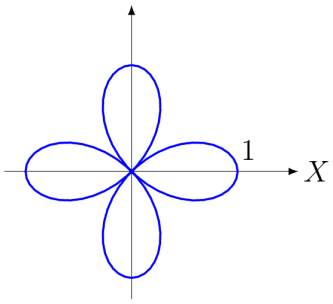


圖 11–18

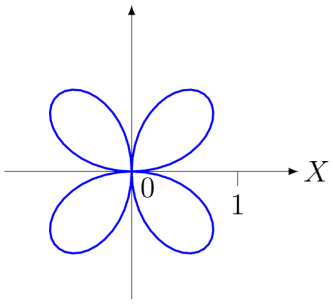


圖 11–19

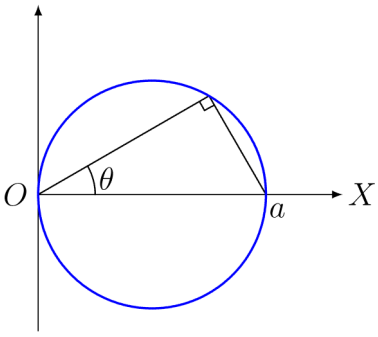


圖 11–20

7° **圓** : $r = a \cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$, 參見圖 11–20.

8° $r = 1 + 2\sin(3\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi$, 參見圖 11–21.

9° **梅花** (plum flower) :

$$r = 3 + 2\left|\cos\left(\frac{5}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right|,$$

$0 \le \theta \le \pi$, 參見圖 11–22.

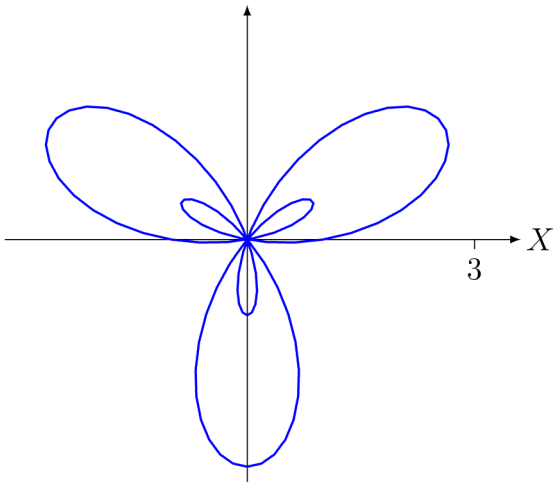


圖 11–21

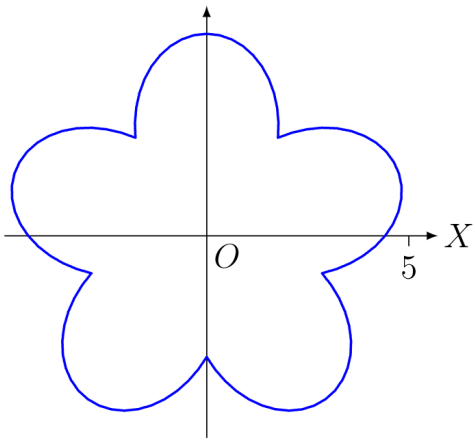


圖 11–22

10° **笛卡爾葉線** (Folium of Descartes) :

$$r = \frac{3\sin\theta\cdot\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta},\quad -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4},$$

參見圖 11–23.

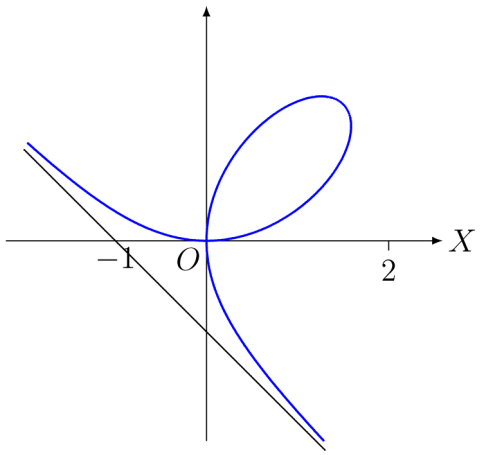


圖 11–23

(3) 極坐標區域

設 E 爲 $\mathbb{R}^2$ 上之一子集, 其極坐標表示法爲

$$E_1:\ \alpha\le\theta\le\beta,\ c\le r\le d,$$

此乃爲二扇形區域之差集, 如圖 11–24 所示. 如果上述之 r 並不介於二常數 c, d 之間, 而介於二函數 $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$ 之間, 亦即

$$E_2:\ \alpha\le\theta\le\beta,\ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta),$$

則其圖形則如圖 11–25.

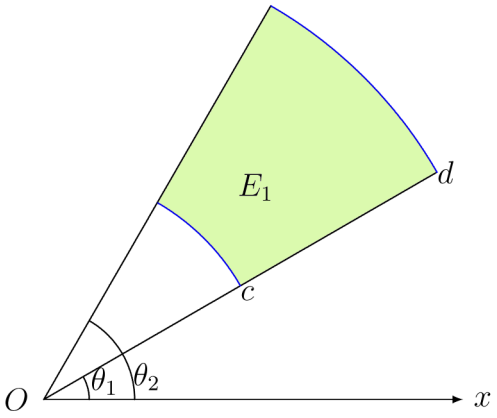


圖 11–24

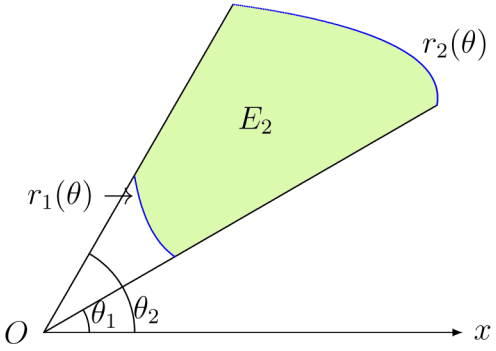


圖 11–25

此一集合若表爲常見之直角坐標, 則

$$E_2 = \big\{(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,\big|\,\alpha \le \theta \le \beta,\quad r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\big\},$$

(讀者可否注意到：此處我們使用了等號『=』), 稍早我們繪製了一些極坐標函數, 其中部分函數圍成了一個或數個區域, 以心臟線：$r = 1 - \cos\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ 爲例, 其所圍之區域 C 可表爲

$$C : 0 \le r \le 1 - \cos\theta,\quad 0 \le \theta \le 2\pi,$$

本節中我們將討論如何在一極坐標區域上進行二重積分.

首先, 我們考慮連續函數 $f\colon E_1 \to \mathbb{R}_+$, (其中 $0 \le c < d$), 與二重積分觀念相似, 先將定義域 E_1 分割爲 $m \times n$ 個子集, 不再是矩形而是與 E_1 相類似之『扇形差』, 其方法是：

1° 將與原點距離 $r \in [c, d]$ 分割爲 m 等分,

$$c = r_0 < r_1 < \cdots < r_m = d,\quad \Delta r = \frac{d-c}{m};$$

2° 將角度 $[\alpha, \beta]$ 分割爲 n 個子角度,

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta,\quad \Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{n}.$$

如圖 11–26 所示：其中 S_{ij} 爲分割後之子區域, (彩色部分), 其面積爲

$$A(S_{ij}) = r_i'\Delta r\Delta\theta,\quad \left(\text{其中 } r_i' = \frac{r_{i-1}+r_i}{2}\right)$$

(理由參見第七章第四節. 提醒讀者：此處之 r_i', r_i'', θ_j' 等皆與導數無關), 則以曲面 $z = f(x, y)$ 爲上界, 以 XY 平面之集合 E_1 爲底之區域 S 的體積爲

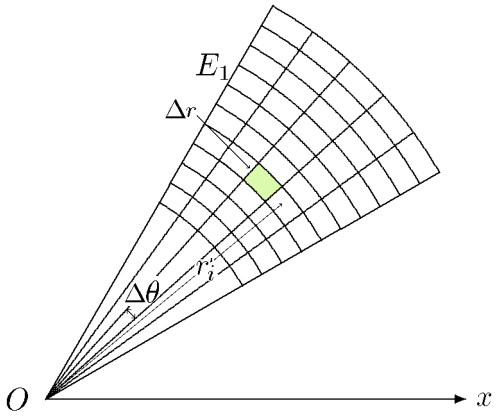


圖 11–26

$$V(S) = \lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i''\cos\theta_j', r_i''\cos\theta_j')A(S_{ij}),$$

$$(\text{內 } r_i'' \in [r_{i-1}, r_i],\ \theta_j' \in [\theta_{j-1},\ \theta_j])$$

$$= \lim_{\substack{m\to+\infty\\ n\to+\infty}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_i''\cos\theta_j', r_i''\cos\theta_j')r_i'\Delta r\Delta\theta$$

$$= \int_a^b\int_c^d f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta, \quad (\text{仿定理 } 6.7)$$

註：當 r 可能爲負值時, 上式最後之 $r\,dr\,d\theta$ 應改爲 $|r|\,dr\,d\theta$.

我們可仿照二重積分之方法將上述觀念推廣到以下之情形：

$$E_2:\ \alpha \le \theta \le \beta,\ \ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta),$$

$$f: E_2 \to \mathbb{R} \text{ 爲 (殆遍) 連續.}$$

而得以下之定理：

定理 11.10 (二重積分之極坐標變換)

設 E 爲 $\mathbb{R}^2$ 上之一子集, 其極坐標表示法爲

$$E:\ \alpha \le \theta \le \beta, r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta),$$

$f: E \to \mathbb{R}$ 爲殆遍連續, 則

$$\int_E f = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|r|\,dr\,d\theta.$$

註： 更嚴格之證明可利用稍後之『二變數函數積分變換之定理』.

例 1. 試求二重積分 $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dy\,dx$, 內 $a>0$.

【解】由於積分範圍

$$\begin{aligned} A &= \Big\{(x,\,y)\,\Big|\,0\le x\le a,\quad 0\le y\le \sqrt{a^2-x^2}\Big\} \\ &= \big\{(r\cos\theta,\,r\sin\theta)\,\big|\,0\le\theta\le\pi/2,\quad 0\le r\le a\big\}, \end{aligned}$$

此乃以原點爲中心, 以 a 爲半徑, 在第一象限之圓的四分之一. 利用極坐標變換,

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \iint_A \sqrt{x^2+y^2}\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^a r^2\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{a^3}{3}\,d\theta = \frac{\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

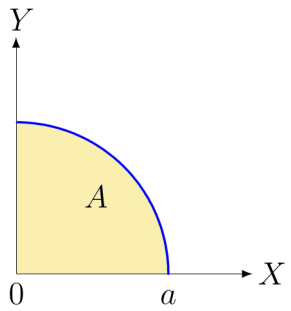


圖 11–27

例 2. 試求 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx = ?$

【解】由於不定積分 $\displaystyle\int \exp(-x^2)\,dx$ 無法利用已知之特殊函數表出, (換言之, 解不出來).

1° 設 $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$, 則

$$\begin{aligned} I^2 &= \Big(\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)dx\Big)\Big(\int_0^{+\infty} \exp(-y^2)dy\Big) \\ &= \int_0^{+\infty}\Big(\int_0^{+\infty} \exp(-(x^2+y^2))dx\Big)dy \\ &= \lim_{t\to+\infty} \iint_{E_t} \exp(-(x^2+y^2))\,dx\,dy, \quad [\star] \end{aligned}$$

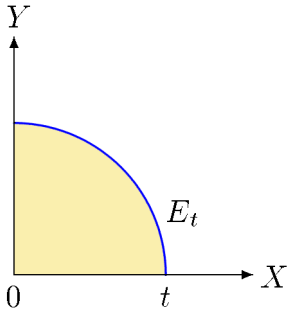


圖 11–28

[⋆] 在此我們將積分範圍 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 視爲諸扇形區域 $\{E_t\}_{t>0}$ 之"極限", 其中

$$E_t = \{(x,y)\mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x^2+y^2\le t^2\},$$

(參閱圖 11-28), 故上述二重積分 I^2 爲函數在 E_t 上積分之極限.

2° 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ 變換之, 則

$$\begin{aligned}\iint_{E_t} \exp(-(x^2+y^2))\,dx\,dy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^t \exp(-r^2)\,r\,dr\,d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \Big[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_{r=0}^{r=t} d\theta \\ &= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{-1}{2}(e^{-t^2}-1).\end{aligned}$$

3° 將 2° 之結果代入 1°, 則

$$I^2 = \lim_{t\to+\infty}\iint_{E_t} \exp(-(x^2+y^2))\,dx\,dy = \lim_{t\to+\infty}\frac{-\pi}{4}(e^{-t^2}-1) = \frac{\pi}{4}.$$

是以 $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. □

應用

在機率及統計學中, 常態分配 (normal distribution) 十分重要, 函數

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+ : f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\Big)$$

稱爲常態分配之密度函數 (probability density function), (其中 $\mu\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$), f 之圖形如下, 利用例 2 之結果,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\Big(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\Big)\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-t^2)\,dt, \quad \Big(\text{令 } t=\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\Big) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\exp(-t^2)\,dt = 1.\end{aligned}$$

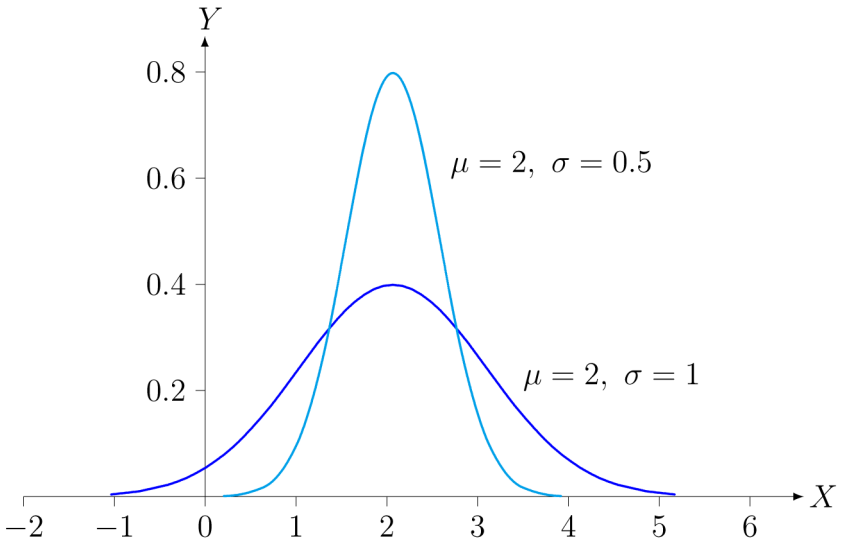


圖 11–29 常態分配之密度函數

此外, 在應用數學中, 函數

$$\operatorname{erf}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt,$$

稱爲**誤差函數** (error function), 當 $x > 0$ 時, $\operatorname{erf}(x)$ 等於下圖中之彩色部分之面積. 由例 2 知, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{erf}(x) = 1$, 但當 $x \neq 0$ 時, $\operatorname{erf}(x)$ 之值則需利用近似積分法方能解之.

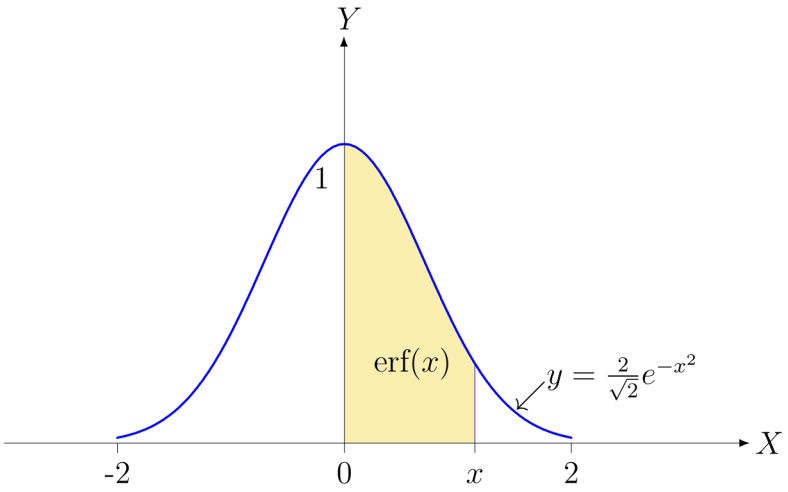


圖 11–30

§ 11.4 重積分之一般變換

在第六章中, 我們利用積分之變數代換, 令 $u = g(t)$,

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du. \qquad (\star)$$

- 當 g 爲遞增 (即 $g' \geq 0$, 參見圖 11-31 左) 時,

$$(\star)\text{ 之左} = \int_{[a,b]} f(g(t))g'(t)\, dt,$$

$$(\star)\text{ 之右} = \int_{g[a,b]} f(u)\, du;$$

- 當 g 爲遞減 (即 $g' \leq 0$, 參見圖 11-31 右) 時,

$$(\star)\text{ 之左} = \int_{[a,b]} f(g(t))g'(t)\, dt = -\int_{[a,b]} f(g(t))|g'(t)|\, dt,$$

$$(\star)\text{ 之右} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du = -\int_{g(b)}^{g(a)} f(u)\, du = -\int_{g[a,b]} f(u)\, du;$$

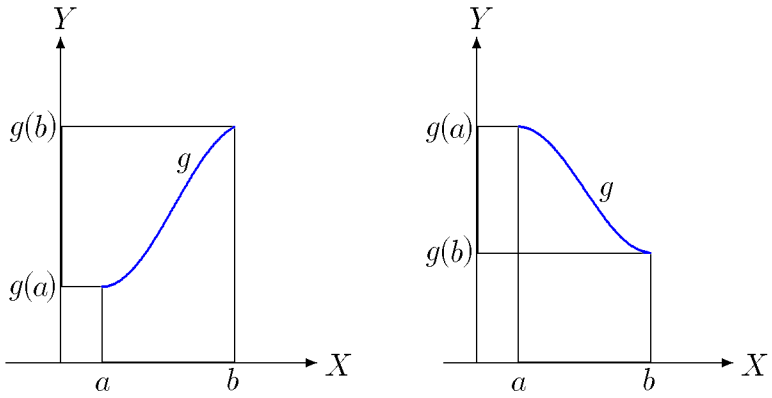


圖 11–31

故當 g 爲可微之單調函數時, $(\star)$ 式又可寫爲

$$\int_{[a,b]} f(g(t))|g'(t)|\,dt = \int_{g[a,b]} f(u)\,du.$$

爲方便計, 我們可以由『 $t \in [a,b] \;\Leftrightarrow\; u = g(t) \in g[a,b]$ 』來記憶左右兩端之積分範圍. 推廣到 n 維時, 多重積分之變換公式爲

$$\int_F f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t} = \int_{\mathbf{g}(F)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

其中的符號及各項條件, 我們將在以下定理詳細說明 :

定理 11.11 (重積分之變換定理)

設 F 爲 $\mathbb{R}^n$ 一子集, 且

(1) $\mathbf{g}\colon F \to \mathbb{R}^n$ 爲一嵌射 ;

(2) $\forall j = 1, \cdots, n$, $\mathbf{g}$ 之分量函數 g_j 於 F 上爲連續可偏微 ;

(3) $\forall\, \mathbf{t} \in F$, 行列式 (稱爲 $\mathbf{g}$ 之 Jacobian)

$$J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t}) = \begin{vmatrix} D_1 g_1(\mathbf{t}) & \cdots & D_n g_1(\mathbf{t}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 g_n(\mathbf{t}) & \cdots & D_n g_n(\mathbf{t}) \end{vmatrix} \neq 0 \ ;$$

(4) $f\colon g(F) \to \mathbb{R}$ 爲連續.

則

$$\int_{\mathbf{g}(F)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_F f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))|J_{\mathbf{g}}(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}.$$

【證】證明超出本課程之程度, 有興趣者可參閱 [10] Marsden & Hoffman p.523. □

定理 11.11 特例一

當 $n=2$ 時, 上述 $\mathbf{x}$ 寫爲 (x,y), $\mathbf{t}$ 寫爲 (u,v), 積分變換公式則爲

$$\iint_{\mathbf{g}(F)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_F f(\mathbf{g}(u,v))|J_{\mathbf{g}}(u,v)|\,du\,dv.$$

或

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\mathbf{g}^{-1}(E)} f(\mathbf{g}(u,v))|J_{\mathbf{g}}(u,v)|\,du\,dv.$$

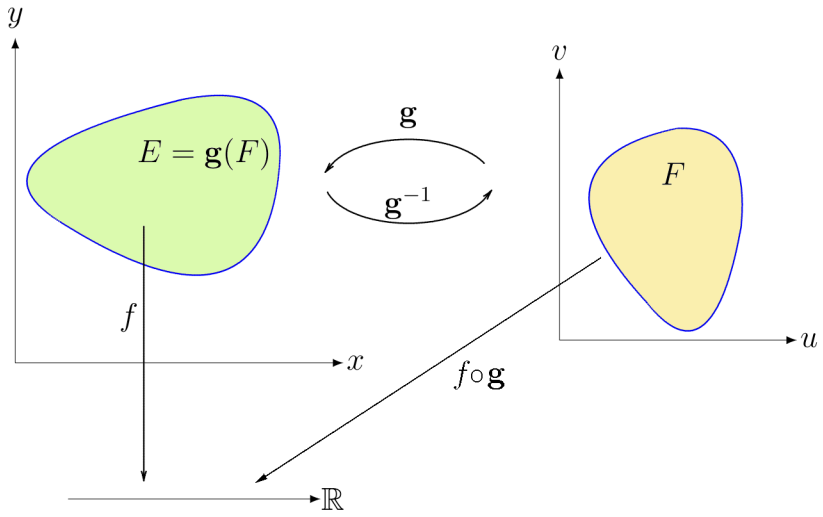


圖 11–32

例 1. 試求 $\iint_E (x+y)^2\,dx\,dy$, 其中 E 係由四直線 $x+y=0$, $x+y=1$, $2x-y=0$, $2x-y=3$ 所圍之平形四邊形.

【解】1° 先繪出 E 之圖形, 如圖 11–33.

2° 決定變換及變換後之區域 :

爲使變換後之區域成爲較易處理之矩形, 我們令

$$\mathbf{g}^{-1}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{g}^{-1}(x,y) = (u,v), \quad \text{其中 } u = x+y,\ v = 2x-y,$$

此時,

$$F = \mathbf{g}^{-1}(E) = \{(u,v) \mid 0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 3\},$$

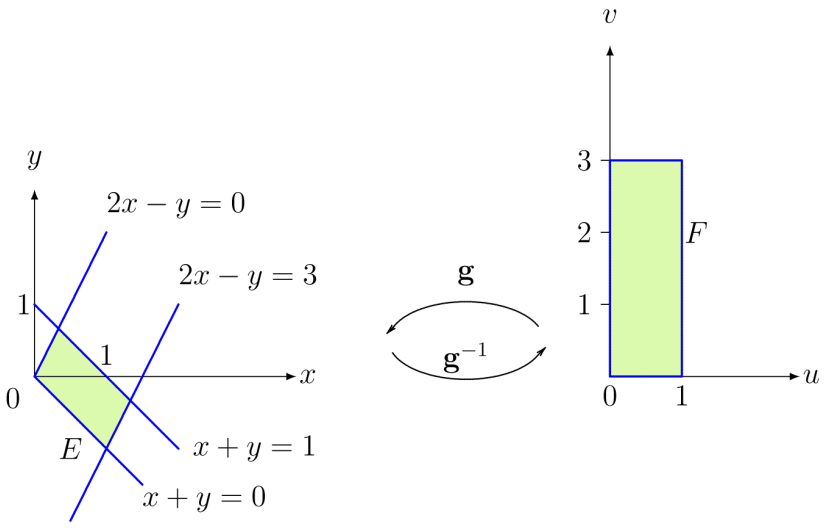


圖 11–33

3° 求 $\mathbf{g}$ 及其 Jacobian, 由

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = 2x - y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{3}, \\ y = \dfrac{2u-v}{3}, \end{cases}$$

知

$$\mathbf{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{g}(u,v) = \left(\frac{u+v}{3},\ \frac{2u-v}{3}\right),$$

其 Jacobian 爲 $J_{\mathbf{g}}(u,v) = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{vmatrix} = -\dfrac{1}{3}.$

4° 代入積分變換公式：

$$\text{原題} = \iint_{\mathbf{g}^{-1}(E)} u^2 |J_{\mathbf{g}}(u,v)|\, du\, dv = \int_0^3 \int_0^1 u^2 \left|-\frac{1}{3}\right| du\, dv = \frac{1}{3}. \qquad \square$$

定理 11.11 特例二

定理 11.10 之極坐標變換之公式

$$\int_E f = \int_\alpha^\beta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, |r|\, dr\, d\theta.$$

係於特例一中, 令 $g_1(r,\theta) = r\cos\theta,\ g_2(r,\theta) = r\sin\theta$, (參閱圖 11–34), 則

$$E = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\},$$

$$F = \mathbf{g}^{-1}(E) = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)\},$$

$$J_{\mathbf{g}}(r,\theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r.$$

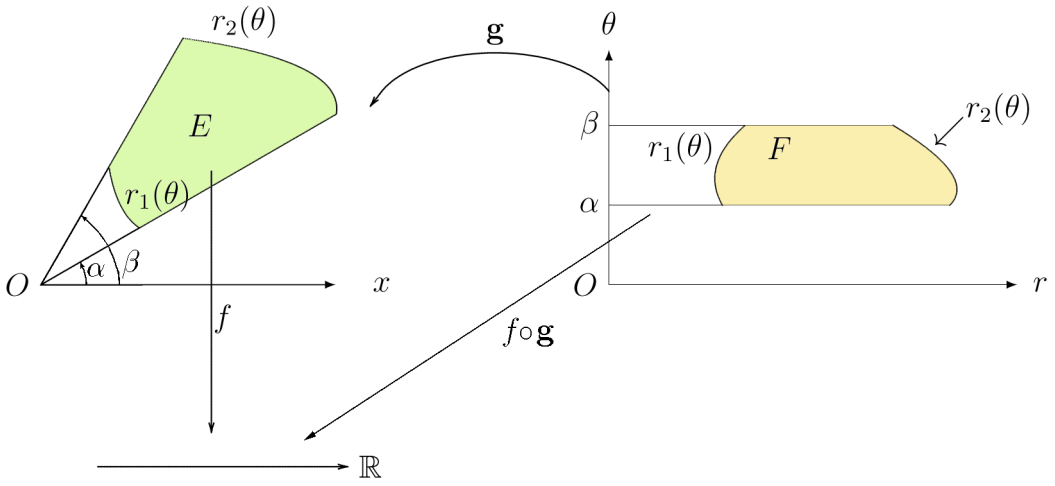


圖 11–34

例 2. 試利用二重積分方法計算半徑爲 a 之球體積.

【解】設

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le a^2\}, \quad (\text{半徑爲 } a \text{ 之圓區域})$$
$$f\colon E \to \mathbb{R} : f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

則所求之球體積, 利用極坐標變換, 爲

$$\begin{aligned} V &= 2\iint_E f(x,y)\,dA \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^a f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)\; r\,dr\,d\theta \\ &= 2\int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\; r\,dr\,d\theta \\ &= -2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\Big[\frac{(a^2-r^2)^{3/2}}{3/2}\Big]_{r=0}^{r=a} d\theta \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} a^3\,d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

□

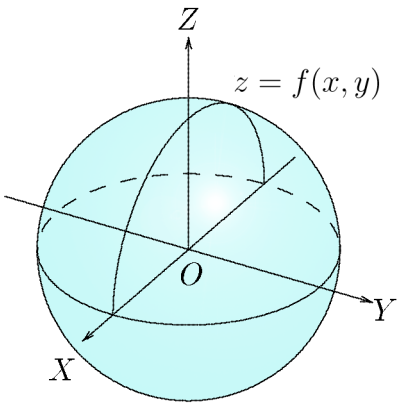


圖 11–35

例 3. 試求在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 及圓柱面 $r = a\sin\theta$ 內部之體積.

【解】設 E 爲 $\mathbb{R}^2$ 上極坐標 $r = a\sin\theta$ 所圍之區域, 則所求之體積乃曲面

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

之下, 以 XY 平面之集合 E 爲底之區域 (如圖 11–36) 之二重積分的兩倍, 即

$$
\begin{aligned}
V &= 2\iint_E \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy \\
&= 2\int_0^{\pi}\int_0^{a\sin\theta} \sqrt{a^2-r^2}\; r\,dr\,d\theta, \\
&\qquad\qquad (\text{以極坐標變換之}) \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{\pi}\Big[-(a^2-r^2)^{3/2}\Big]_{r=0}^{r=a\sin\theta} d\theta \\
&= \frac{-2}{3}\int_0^{\pi} a^3(|\cos\theta|^3-1)\,d\theta \\
&= \Big(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\Big)a^3.
\end{aligned}
$$

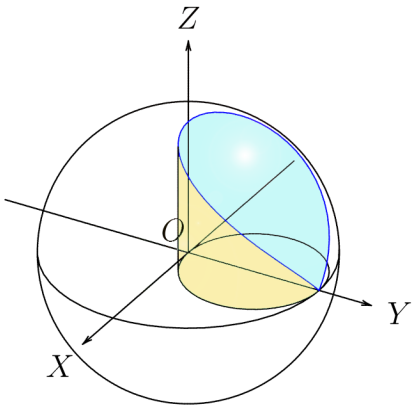


圖 11–36

定理 11.11 特例三

立體空間內, 通常我們使用直角坐標以標示一三維之向量, 仿照二維之極坐標方法, 有人發展出另外二種不同坐標系統, 其一爲**圓柱坐標** (cylindrical coordinates), 另一則爲**球面坐標** (spherical coordinates). 前者是將一三維之向量 $P(x,y,z)$ 投影在 XY 平面時, 以極坐標表之, 其 z 坐標則不變, 換言之,

$$
\mathbf{g}(r,\theta,\zeta)=(x,y,z),\ \text{內}\ \begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta, \\ z=\zeta, \end{cases}
$$

其中 r 爲 $P(x,y,z)$ 投影在 XY 平面與原點之距離, 而 θ 爲自 X 軸至 $\overrightarrow{OP}$ 在 XY 平面之投影的夾角, 吾人可得積分變換公式如下 :

$$
\begin{aligned}
&\iiint_E f(x,y,z)dV \\
&\qquad = \iiint_{\mathbf{g}^{-1}(E)} f(r\cos\theta, r\sin\theta,\zeta)\,|r|\,dr\,d\theta\,d\zeta.
\end{aligned}
$$

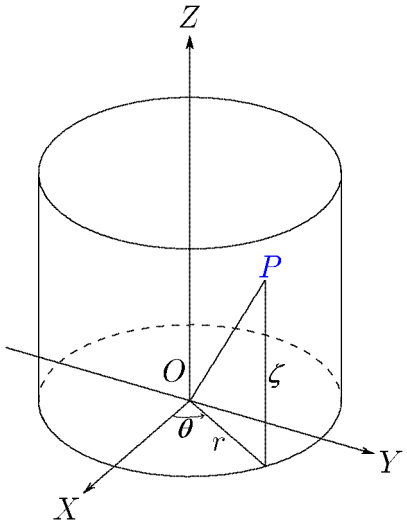


圖 11–37

通常我們可利用二維極坐標變換公式解決, 因此上述公式用途不大.

至於球面坐標, 設某三維之向量爲 $P(x,y,z)$, r 爲 $P(x,y,z)$ 與原點之距離, 自 Z 軸至向量 $\overrightarrow{OP}$ 之夾角爲 ϕ, 而自 X 軸至 $\overrightarrow{OP}$ 在 XY 平面之投影之夾角爲 θ, (參見圖 11–38), 次設 $f\colon E\to\mathbb{R}$ 爲連續, 如果三維集合 E 之球面坐標較直角坐標爲單純, 則可令

$$\mathbf{g}(r,\theta,\phi)=(x,y,z),\quad \text{內}\quad \begin{cases} x=r\cos\theta\sin\phi,\\ y=r\sin\theta\sin\phi,\\ z=r\cos\phi, \end{cases}$$

仿照二維之極坐標變換公式, 吾人可得變換公式如下：

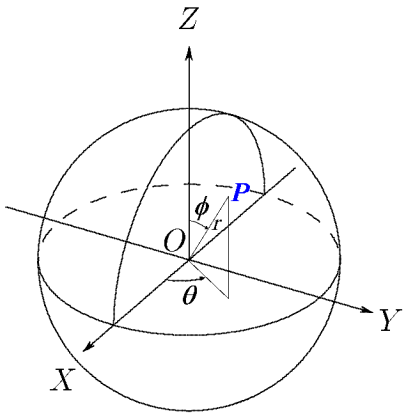


圖 11–38

$$\iiint_E f(x,y,z)dV=\iiint_{\mathbf{g}^{-1}(E)} f(r\cos\theta\sin\phi,r\sin\theta\sin\phi,r\cos\phi)\,r^2|\sin\phi|\,dr\,d\theta\,d\phi.$$

註： 變換 $\mathbf{g}$ 之 Jacobian 爲

$$J_{\mathbf{g}}(r,\theta,\phi)=\begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi\\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{vmatrix}=-r^2\sin\phi.$$

例 4. 試求 $\iiint_E e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dx\,dy\,dz$, 內 $E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\mid x^2+y^2+z^2\le 4\}$.

【解】由於 E 爲一半徑等於 2 之球體, 利用球面坐標變換, 令

$$x=r\cos\theta\sin\phi,\quad y=r\sin\theta\sin\phi,\quad z=r\cos\phi,$$

則

$$\begin{aligned} \text{原題}&=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} e^{-r}r^2|\sin\phi|\,dr\,d\theta\,d\phi\\ &=\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\Big[e^{-r}(-r^2-2r-2)\Big]_{r=0}^{r=2}\sin\phi\,d\theta\,d\phi\\ &=(2-10e^{-2})\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin\phi\,d\theta\,d\phi\\ &=(2-10e^{-2})\cdot 4\pi=8\pi(1-5e^{-2}). \end{aligned}$$

□

§ 11.5 利用多重積分求體積與面積

二重積分最初之目的是爲解決一立體之體積, 設 $f\colon E \to \mathbb{R}_+$ 其中 $E \subset \mathbb{R}^2$ 爲一平面區域, 若 f 在集合 E 上爲可積, 則二重積分 $\iint_E f(x,y)\,dA$ 乃爲以曲面 f 爲上界, 以 E 爲底之立體之體積, 如上節之例 2. 但若 $f\colon E \to \mathbb{R} : f(x,y) = 1$, 則由 f 之圖形與 XY 平面所圍之立體之體積與 E 之面積相等, (但單位不同), 即

$$A(E) = \iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_E dx\,dy.$$

例 1. 試以二重積分方法, 求由曲線 $y = \cos x$ 及 $y = \sin x$ 在區間 $[0, \pi/2]$ 所圍區域之面積.

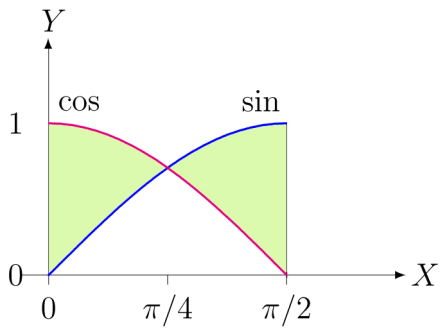


圖 11–39

【解】先求函數 sin 及 cos 圖形之交點, 由於

$$\sin x = \cos x \;\Leftrightarrow\; \tan x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4};$$

是以二函數圖形之交點爲 $(\pi/4,\ \sqrt{2}/2)$.

其次, 以二重積分求區域之面積 :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} dy\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_{\cos x}^{\sin x} dy\,dx \\ &= \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx \\ &= \Big[\sin x + \cos x\Big]_0^{\pi/4} + \Big[-\cos x - \sin x\Big]_{\pi/4}^{\pi/2} \\ &= \sqrt{2} - 1 + (-1) - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

□

例 2. 試求心臟線(cardioid) $x^2 + y^2 = 3(\sqrt{x^2+y^2} + x)$ 所圍區域之面積.

【解】設曲線上之任意點的直角坐標爲 (x,y), 其極坐標表示法爲 (r,θ), 應有 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 其中 $r \ge 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$, 則

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 3(\sqrt{x^2+y^2} + x) &\;\Leftrightarrow\; r^2 = 3(r + r\cos\theta) \\ &\;\Leftrightarrow\; r = 3 + 3\cos\theta. \end{aligned}$$

換言之, 此一曲線爲一心臟線. 故所圍區域爲

$$\begin{aligned} E &= \left\{(x,y) \,\middle|\, x^2 + y^2 \le 3\sqrt{x^2+y^2} + x\right\} \\ &= \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \mid 0 \le r \le 3 + 3\cos\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}, \end{aligned}$$

其面積爲

$$
\begin{aligned}
A(E) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{3+3\cos\theta} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\Big[\frac{r^2}{2}\Big]_{r=0}^{r=3+3\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta \\
&= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta \\
&= \frac{9}{2}\int_0^{2\pi}\Big(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\Big)\,d\theta \\
&= \frac{9}{2}\Big[\theta+2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\Big]_0^{2\pi} = \frac{27\pi}{2}. \qquad \square
\end{aligned}
$$

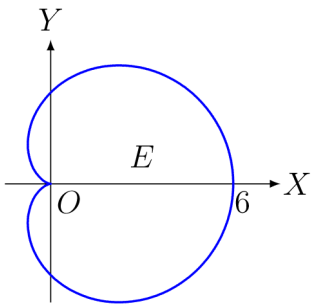


圖 11–40

將二重積分推廣到三重積分, 設 $E \subset \mathbb{R}^3$ 爲一立體區域, 則當 $f = 1\colon E \to \mathbb{R}_+$ 時, 三重積分 $\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ 乃爲 E 之體積.

例 3. 試利用三重積分方法計算半徑爲 a 之球體積.

【解】法一 : 利用極坐標變換. 由於球體可表爲

$$
\begin{aligned}
E &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le a^2\} \\
&= \{(x,y,z) \mid -a \le x \le a,\ -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2}, \\
&\qquad\qquad -\sqrt{a^2-x^2-y^2} \le z \le \sqrt{a^2-x^2-y^2}\}.
\end{aligned}
$$

是以

$$
\begin{aligned}
\text{球體積} &= \iiint_E dz\,dy\,dx \\
&= \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} dz\,dy\,dx \\
&= 2\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dy\,dx \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \sqrt{a^2-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta}\; r\,dr\,d\theta, \quad (\text{極坐標變換}) \\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{a} \sqrt{a^2-r^2}\; r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{2\pi}\Big[-\frac{1}{2}\frac{(a^2-r^2)^{3/2}}{3/2}\Big]_{r=0}^{r=a} d\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} a^3\,d\theta = \frac{4}{3}\pi a^3.
\end{aligned}
$$

法二 : 利用球面坐標變換, 讀者可仿照上一節例 4 自行解之. $\square$

§ 11.6 線積分

在本章之始我們業已說明： 多重積分係研究多變數函數之積分觀念; 本節中我們將探討向量函數之積分觀念, 由於研究之對象差異甚大, 讀者宜小心分辨, 避免混淆.

向量函數之值域爲一曲線, 是以向量函數之積分常稱爲線積分, 此種積分又分二類, 其一是實值函數之線積分, 其二是討論『功 (work)』之線積分.

甲. 實值函數之線積分

爲使初學者易於掌握, 我們將只考慮二維或三維之向量函數, 且由淺入深逐步探討.

① 向量函數之弧長問題： 在第九章第三節中, 我們已界定一向量函數

$$\mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_n)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

之弧長爲

$$L(s) \underset{\text{def}}{=} \int_a^b \sqrt{(r_1'(t))^2 + \cdots + (r_n'(t))^2}\, dt = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\, dt. \tag{1}$$

其中 $\mathbf{r}$ 之諸分量函數 r_j 皆爲連續可微.

② 向量函數之質量問題： 若 $\mathbf{r} = (r_1, r_2)\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 爲一平滑之平面曲線, 其上每一點 (x,y) 之質量函數爲 $g(x,y)$ (意即在點 (x,y) 附近每單位長度之質量爲 $g(x,y)$), 則此曲線之質量爲爲

$$M \underset{\text{def}}{=} \int_a^b g(\mathbf{r}(t))\sqrt{(r_1'(t))^2 + (r_2'(t))^2}\, dt = \int_a^b g(\mathbf{r}(t))|\mathbf{r}'(t)|\, dt. \tag{2}$$

理由如下：

設 $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ 爲區間 $[a, b]$ 之 n 等分之正則分割. 當 n 甚大時, 則子區間 $[t_{k-1},\ t_k]$ 上曲線之質量爲 $g(\mathbf{r}(s_k))\big|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\big|$, (其中 $s_k \in [t_{k-1}, t_k]$, 參閱圖 11–41), 和之, 並令 $n \to +\infty$, 則曲線之質量爲

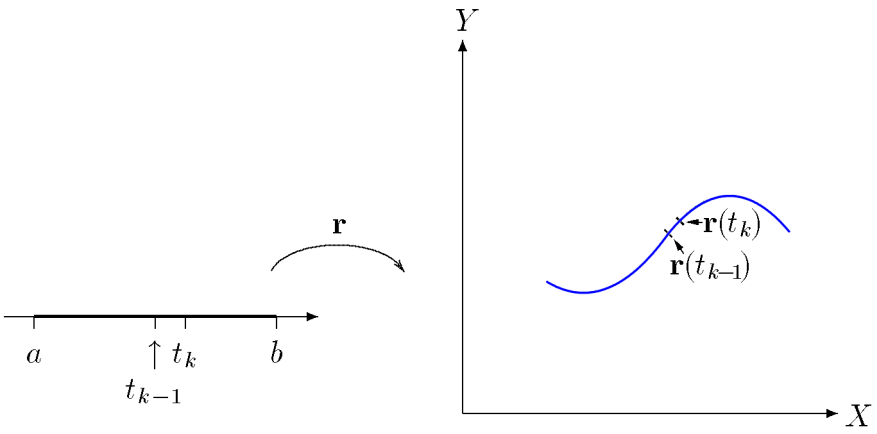


圖 11–41

$$
\begin{aligned}
M &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} g(\mathbf{r}(s_k))\Big|\mathbf{r}(t_k)-\mathbf{r}(t_{k-1})\Big| \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} g(\mathbf{r}(s_k))\sqrt{(r_1(t_k)-r_1(t_{k-1}))^2+(r_2(t_k)-r_2(t_{k-1}))^2} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} g(\mathbf{r}(s_k))\sqrt{(r_1'(s_{k,1}'))^2(t_k-t_{k-1})^2+(r_2'(s_{k,2}'))^2(t_k-t_{k-1})^2}, \quad [\star] \\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} g(\mathbf{r}(s_k))\sqrt{(r_1'(s_{k,1}'))^2+(r_2'(s_{k,2}'))^2}\ \Delta t_k \\
&= \int_a^b g(\mathbf{r}(t))\,\sqrt{(r_1'(t))^2+(r_2'(t))^2}\,dt, \quad (\text{ Riemann 和之極限 }) \\
&= \int_a^b g(\mathbf{r}(t))\big|\mathbf{r}'(t)\big|\,dt.
\end{aligned}
$$

[⋆] 利用微分均值定理, 若二分量函數 $r_j\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 皆爲連續可微, 則存在 $s_{k,j}'\in(t_{k-1},t_k)$ 使得 $r_j(t_k)-r_j(t_{k-1})=r_j'(s_{k,j}')(t_k-t_{k-1})$.

範例見以下之例 1. 三維曲線亦得類似公式 (2) 之結果.

③ 向量函數之一般實值函數之線積分：上述情況可推廣而爲任意實值函數 $g(x,y)$ (或 $g(x,y,z)$), 公式 (2) 依然可用, 見以下之例 2.

例 1. 設單位圓 $x^2+y^2=1$ 上各點之密度函數爲 $g(x,y)=x^2+y+2$, 試求此曲線之質量.

【解】單位圓之參數方程式爲 $\begin{cases} r_1(t)=x(t)=\cos t, \\ r_2(t)=y(t)=\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,\,2\pi]$, 代入公式 (2) 得

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^{2\pi} g(\cos t,\sin t)\big|(\cos' t,\sin' t)\big|\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t+\sin t+2)\,dt \\
&= \left[\frac{\sin 2t}{4}-\cos t+\frac{5t}{2}\right]_0^{2\pi} = 5\pi.
\end{aligned}
$$

例 2. 設沿於拋物線 $y=x^2,\ x\in[-1,2]$ 上築一牆, 各點之高度函數爲 $g(x,y)=|x|$, 試求此牆之面積.

【解】此拋物線之參數方程式爲 $\begin{cases} r_1(t)=x(t)=t, \\ r_2(t)=y(t)=t^2, \end{cases}$ $t\in[-1,2]$, 代入公式 (2) 得

$$\begin{aligned} M &= \int_{-1}^{2} g(t,t^2)\big|(1,2t)\big|\,dt = \int_{-1}^{2} |t|\sqrt{1+4t^2}\,dt \\ &= \int_{-1}^{0} -t\sqrt{1+4t^2}\,dt + \int_{0}^{2} t\sqrt{1+4t^2}\,dt \\ &= \left[\frac{-1}{12}(1+4t^2)^{3/2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{12}(1+4t^2)^{3/2}\right]_{0}^{2} \\ &= \frac{1}{12}(17^{3/2}+5^{3/2}-2). \end{aligned}$$ □

乙. 由『功』衍化而來之線積分問題

在物理的力學中, 我們知道若有一固定力場 (vector field) $\mathbf{F}$ 沿某一固定向量 $\mathbf{v}$ 推移一物件, 則所作之功爲 $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$. 但如果力場 $\mathbf{F}$ 不爲一常數向量函數, 推移物件之路徑亦不爲一常數向量, 我們應當如何界定其所之功? 首先, 考慮力場 $\mathbf{F}$ 爲一三變數向量函數 $\mathbf{F}(x,y,z)$, 曲線 C 係向量函數 $\mathbf{r}\colon [a,b]\to\mathbb{R}^3$ 之值域, 在時間 $t\in[a,b]$, 力場之作用點之位置爲

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} = (x(t),y(t),z(t)).$$

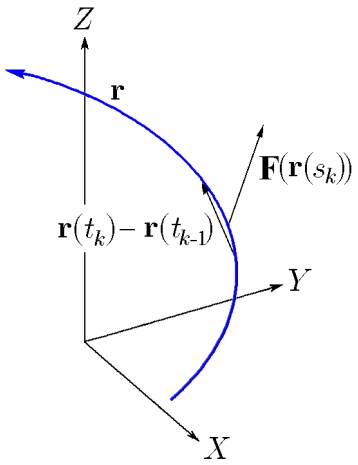


圖 11–42

設 $P=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$ 爲區間 $[a,b]$ 之 n 等分之正則分割. 當 n 甚大時, 在區間 $[t_{k-1},t_k]$ 中我們可視力場 $\mathbf{F}(\mathbf{r}(s_k))$ 與位移向量 $\mathbf{r}(t_k)-\mathbf{r}(t_{k-1})$ 皆爲常數向量, 其中 $s_k\in[t_{k-1},t_k]$, 則在此子區間所作之功爲

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(s_k))\cdot(\mathbf{r}(t_k)-\mathbf{r}(t_{k-1})),$$

(參閱圖 11–42), 和之, 並令 $n\to+\infty$, 則所作之功爲

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{F}(\mathbf{r}(s_k))\cdot(\mathbf{r}(t_k)-\mathbf{r}(t_{k-1})) \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\Big[F_j(\mathbf{r}(s_k))(r_j(t_k)-r_j(t_{k-1}))\Big] \\ &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\Big[F_j(\mathbf{r}(s_k))r_j'(s_{k,j}')(t_k-t_{k-1})\Big], \quad [\star] \\ &= \sum_{j=1}^{3}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\Big[F_j(\mathbf{r}(s_k))r_j'(s_{k,j}')(t_k-t_{k-1})\Big] \\ &= \sum_{j=1}^{3}\int_a^b F_j(\mathbf{r}(t))\,r_j'(t)\,dt, \quad (\text{Riemann 和之極限}) \end{aligned}$$

$$= \int_a^b \sum_{j=1}^{3} F_j(\mathbf{r}(t))\, r_j'(t)\, dt$$
$$= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

[⋆] 利用微分均值定理, 若三分量函數 $r_j\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ 皆爲連續可微, 則存在 $s_{k,j}' \in (t_{k-1}, t_k)$ 使得 $r_j(t_k) - r_j(t_{k-1}) = r_j'(s_{k,j}')(t_k - t_{k-1})$.

例 1. 試求某力場 $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy, 2, 4z)$ 沿螺旋線 $\mathbf{r}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t/2)$ 自點 $(1,0,0)$ 至點 $(1,0,\pi)$ 推移一物件所作之功.

【解】所求之功爲

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\cos t, \sin t, t/2) \cdot (-\sin t, \cos t, 1/2)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos t\ \sin t, 2, 2t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1/2)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t\ \sin^2 t + 2\cos t + t)\, dt \\ &= \Big[-\frac{\sin^3 t}{3} + 2\sin t + \frac{t^2}{2} \Big]_0^{2\pi} = 2\pi^2. \end{aligned}$$ □

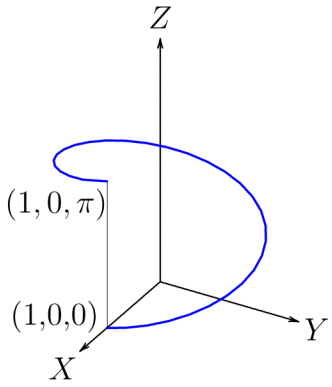


圖 11–43

上面的討論是在三維空間之情形, 一、二維情形則更爲簡單, 以下的定義我們採用較爲廣義的 n 維線積分, 讀者不妨先以二、三維情況去理解它. 提醒讀者, 在第九章中, 我們曾界定所謂一 (空間) 曲線, 係指定義於一實數區間上之一連續向量函數而言, 以下我們會經常提及曲線一詞.

定義 11.12

設 $E \subset \mathbb{R}^n, \mathbf{r}\colon [a,b] \to E$, $\mathbf{F}\colon E \to \mathbb{R}^n$, 若 $\mathbf{r}$ 之分量函數 $r_1, \ldots, r_n$ 皆爲連續可微 (亦即 $\mathbf{r}$ 爲一平滑曲線), 則 $\mathbf{F}$ 沿曲線 $\mathbf{r}$ 之**線積分** (line integral) 爲

$$W = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

傳統上, 上述線積分又常寫爲

$$\int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad \text{或} \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

其中 C 爲 $\mathbf{r}$ 之有向值域. 當 $n=2$ 時, 令 $\mathbf{F}=(P,Q)$, 線積分公式常寫爲

$$\int_{\mathbf{r}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_{\mathbf{r}}P\,dx+Q\,dy=\int_a^b\left(P(x,y)\frac{dx}{dt}+Q(x,y)\frac{dy}{dt}\right)dt.$$

理由是：設 $x(t)$ 及 $y(t)$ 分別爲曲線 $\mathbf{r}$ 之二分量函數, 則

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}&=\int_a^b\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\\&=\int_a^b\Big(P(x(t),y(t)),Q(x(t),y(t))\Big)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)dt\\&=\int_a^b\left(P(x,y)\frac{dx}{dt}+Q(x,y)\frac{dy}{dt}\right)dt\\&=\int_{\mathbf{r}}P\,dx+Q\,dy.\end{aligned}$$

例 2. 試求線積分: $\displaystyle\int_{\mathbf{r}}[(x^2-y)\,dx+(y^2+x)\,dy]$. 其中 $\mathbf{r}$ 爲自 $(0,1)$ 到 $(1,2)$ 之直線.

【解】 1° 路徑參數化：自 $(0,1)$ 到 $(1,2)$ 之直線可用以下參數方程式表之,

$$\begin{cases}x=t,\\y=t+1,\end{cases}\quad t\in[0,1].$$

2° 由題意知 $P(x,y)=x^2-y$, $Q(x,y)=y^2+x$, 是以

$$\begin{aligned}\text{原題}&=\int_0^1\left[P(t,t+1)\frac{dx}{dt}+Q(t,t+1)\frac{dy}{dt}\right]dt\\&=\int_0^1\left[(t^2-(t+1))+((t+1)^2+t)\right]dt\\&=\int_0^1(2t^2+2t)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^3+t^2\right]_0^1=\frac{5}{3}.\end{aligned}$$

□

有時, 曲線 $\mathbf{r}$ 並非全部平滑, 而在某些點上只爲連續而不爲連續可微分, 可是我們仍希望這種情形還能討論其上的線積分, 可以利用分段積分之方法去處理, 所以有下面定義：

定義 11.13

設 $\mathbf{r}\colon[a,b]\to\mathbb{R}^n$ 爲一 n 維曲線, 設有 $[a,b]$ 之一分割 $\{a_0,a_1,\dots,a_m\}$ 使得 $\forall\,k\in\{1,\dots,m\}$, $\mathbf{r}_k=\mathbf{r}|_{[a_{k-1},\,a_k]}$ 爲一平滑曲線, 則稱 $\mathbf{r}$ 爲一**平滑鏈** (smooth chain). 若 $\mathbf{F}$ 在各子曲線 $\mathbf{r}_k$ 上之線積分皆存在, 則規定

$$\int_{\mathbf{r}}\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=\int_{\mathbf{r}_1}\mathbf{F}(\mathbf{r}_1)\cdot d\mathbf{r}_1+\cdots+\int_{\mathbf{r}_m}\mathbf{F}(\mathbf{r}_m)\cdot d\mathbf{r}_m.$$

例 3. 設曲線 $\mathbf{r}$ 爲 $\mathbb{R}^2$ 平面上從原點沿 $y = x^2$ 至點 $(1,1)$ 然後平行於 X 軸至點 $(2,1)$, 最後平行 Y 軸至點 $(2,3)$. 函數 $\mathbf{F}(x,y) = (x^2y,\, 2x)$.

1° 試將 $\mathbf{r}$ 化爲一向量函數, 並討論其是否爲一平滑鏈?

2° 試求 $\mathbf{F}$ 沿曲線 $\mathbf{r}$ 之線積分.

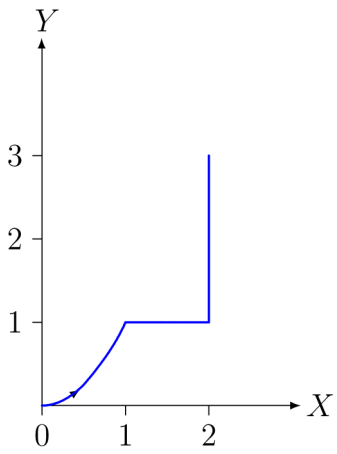


圖 11–44

【解】1° 方法不爲唯一, 我們可令

$$\mathbf{r}\colon [0,4] \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{r}(t) = \begin{cases} (t, t^2), & \text{若 } t \in [0,1], \\ (t, 1), & \text{若 } t \in [1,2], \\ (2, t-1), & \text{若 } t \in [2,4], \end{cases}$$

- 當 $t \in [0,1]$ 時, $\mathbf{r}$ 爲平滑 ;
- 當 $t \in [1,2]$ 時, $\mathbf{r}$ 爲平滑 ;
- 當 $t \in [2,4]$ 時, $\mathbf{r}$ 爲平滑 ;

是以 $\mathbf{r}$ 爲一平滑鏈, 其值域如圖 11–44 所示.

2° $\mathbf{F}$ 沿曲線 $\mathbf{r}$ 之線積分爲

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbf{r}_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_1 + \int_{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_2 + \int_{\mathbf{r}_3} \mathbf{F}(\mathbf{r}_3) \cdot d\mathbf{r}_3 \\ &= \int_0^1 (t^4, 2t) \cdot (1, 2t)\, dt + \int_1^2 (t^2, 2t) \cdot (1, 0)\, dt + \int_2^4 (4t-4, 4) \cdot (0, 1)\, dt \\ &= \int_0^1 (t^4 + 4t^2)\, dt + \int_1^2 t^2\, dt + \int_2^4 4\, dt \\ &= \frac{178}{15}. \end{aligned}$$

□

定義 11.14

設 $\mathbf{r}\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ 爲一曲線且 $\mathbf{r}(a) = \mathbf{r}(b)$, 則稱 $\mathbf{r}$ 爲一**閉曲線** (closed curve). 若曲線 $\mathbf{r}$ 恰爲平面區域 E 之邊界, 且當 t 自 a 增至 b 時, $\mathbf{r}(t)$ 係以逆時針方向繞行 E, 則稱 $\mathbf{r}$ 爲一**正向曲線** (positively oriented curve). 當 $\mathbf{r}(t)$ 係以順時針方向繞行 E, 則稱 $\mathbf{r}$ 爲一**負向曲線** (negatively oriented curve). (參見圖 11–45).

註 : 關於某曲線之反向曲線的概念, 讀者可參閱第九章習題 9–17.

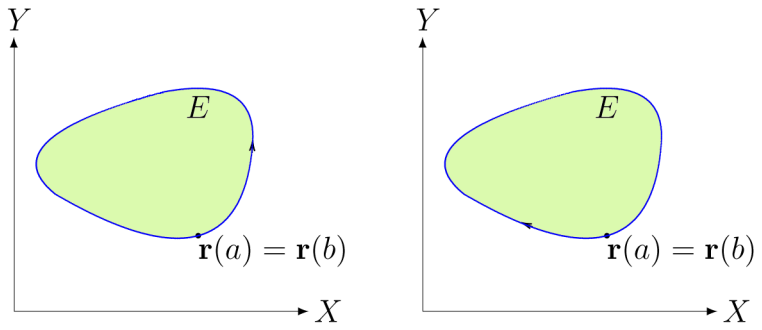


圖 11–45 正向曲線 (左)， 負向曲線 (右)

若 $\mathbf{r}$ 爲一正向曲線, 且 $\mathbf{F}$ 在其上之線積分存在時, 則令

$$\oint_{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

爲方便計, 有時則寫爲

$$\oint_{C} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r},$$

其中 C 爲 $\mathbf{r}$ 之值域.

定理 11.15 （**Green** 定理）

設曲線 $\mathbf{r}$ 恰爲平面區域 E 之正向邊界且爲一平滑鏈, 若 $\mathbf{F} = (P, Q)\colon E \to \mathbb{R}^2$ 之分量函數 P 及 Q 在 $E \cup E'$ 上皆爲可微分, 則

$$\iint_E \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big)\, dx\, dy = \oint_{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathbf{r}} P\, dx + Q\, dy.$$

【證】略, 有興趣者可參閱 [13] Rudin, p.282 □

例 4. 試求 $\oint_{\mathbf{r}} (x\, dy - y\, dx)$ 之值, 此處 $\mathbf{r}$ 爲反時針方向之橢圓 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, 內 $a > 0,\ b > 0$.

【解】**法一**：利用定義. 由於 $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$ 可表爲

$$\mathbf{r}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R} : \mathbf{r}(t) = (x, y),$$

內 $x = a\cos t,\ y = b\sin t$, 是以

$$\begin{aligned}
\oint_{\mathbf{r}} (x\, dy - y\, dx) &= \int_0^{2\pi} \Big(x \cdot \frac{dy}{dt} - y \cdot \frac{dx}{dt}\Big) dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t\Big) dt \\
&= \int_0^{2\pi} ab\, dt = 2\pi ab.
\end{aligned}$$

法二：利用 Green 定理. 設

$$P(x,y)=-y,\quad Q(x,y)=x,$$

則

$$\mathbf{F}=(P,Q),\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-1,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1,$$

故

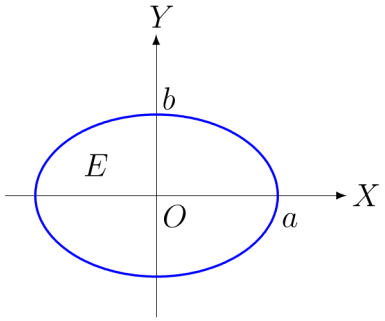


圖 11–46

$$\begin{aligned}\oint_{\mathbf{r}}(x\,dy-y\,dx)&=\oint_{\mathbf{r}}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}\\&=\oint_{\mathbf{r}}P\,dx+Q\,dy\\&=\iint_E\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\,dx\,dy,\quad (E\text{ 爲橢圓所圍區域})\\&=\iint_E 2\,dx\,dy\\&=2\cdot A(E),\quad (A(E)\text{ 乃橢圓之面積})\\&=2\pi ab.\end{aligned}$$

□

解決線積分問題, 除利用定義及 Green 定理外, 我們尚可利用以下定理.

定理 11.16 (**線積分基本定理**)

設

(i) E 爲 $\mathbb{R}^n$ 之一開集,

(ii) $\mathbf{r}\colon[a,b]\to E$ 爲一平滑曲線,

(iii) $f\colon E\to\mathbb{R}$ 爲連續可微.

則

$$\int_{\mathbf{r}}\nabla f(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}=f(\mathbf{r}(b))-f(\mathbf{r}(a)).$$

【證】(參見圖 11–47).

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{r}}\nabla f(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}&=\int_a^b(\nabla f(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)\,dt\\&=\int_a^b\frac{d}{dt}f(\mathbf{r}(t))\,dt,\quad (\text{多變數連鎖律之二})\\&=f(\mathbf{r}(b))-f(\mathbf{r}(a)).\end{aligned}$$

□

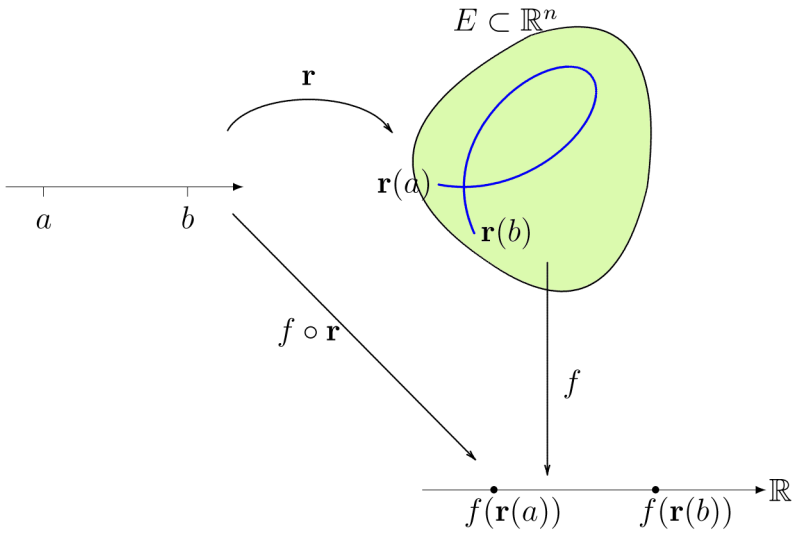


圖 11–47

使用線積分基本定理解題之前, 須先檢驗力場函數 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 是否爲一梯度函數.

1° 當 $n = 2$ 時, 若存在 $f\colon D_f(\subset \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ 使得

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y) = (P(x, y),\, Q(x, y)). \tag{$*$}$$

則 $\forall\,(x, y)$,

$$\begin{aligned}(*) \;&\Rightarrow\; \Big[\; D_1 f(x, y) = P(x, y) \;\wedge\; D_2 f(x, y) = Q(x, y) \;\Big] \\ &\Rightarrow\; \Big[\; D_{12} f(x, y) = \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \;\wedge\; D_{21} f(x, y) = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \;\Big] \\ &\Rightarrow\; \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}, \quad (\text{Young 定理})\end{aligned}$$

我們也可證明：若 $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$, 則 $\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y),\, Q(x, y))$ 爲一梯度函數.

2° 當 $n = 3$ 時, 若存在 $f\colon D_f(\subset \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ 使得

$$\nabla f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z),\, Q(x, y, z),\, R(x, y, z)). \tag{$*$}$$

則 $\forall\,(x,y,z)$,

$$(*)\ \Rightarrow\ \begin{cases} D_1f(x,y,z)=P(x,y,z),\\ D_2f(x,y,z)=Q(x,y,z),\\ D_3f(x,y,z)=R(x,y,z),\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} D_{12}f(x,y,z)=\dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial y},\ D_{13}f(x,y,z)=\dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial z},\\ D_{21}f(x,y,z)=\dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x},\ D_{23}f(x,y,z)=\dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z},\\ D_{31}f(x,y,z)=\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial x},\ D_{32}f(x,y,z)=\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial y},\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}=\dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x},\\ \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}=\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial x},\\ \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}=\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial y},\end{cases}$$

我們也可證明：若 (P,Q,R) 滿足上述最後之條件, 則

$$\mathbf{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),\,Q(x,y,z),\,R(x,y,z))$$

爲一梯度函數.

例 5. 試求線積分 $\displaystyle\int_{\mathbf{r}}\big[6xy\,dx+(3x^2+2yz)\,dy+y^2\,dz\big]$, 其中路徑

$$\mathbf{r}\colon[0,1]\to\mathbb{R}^3:\mathbf{r}(t)=(1+t\cos 2\pi t)\,\mathbf{i}+(1+t\sin 2\pi t)\,\mathbf{j}+(1+t^2)\,\mathbf{k}.$$

【解】本題若以線積分之定義解之, 相當麻煩. 在此我們考慮以線積分基本定理來解決,

1° 設 $\mathbf{F}(x,y,z)=(6xy,\,3x^2+2yz,\,y^2)$, 即

$$P(x,y,z)=6xy,\ Q(x,y,z)=3x^2+2yz,\ R(x,y,z)=y^2.$$

由於

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}=6x=\dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x},\\ \dfrac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}=0=\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial x},\\ \dfrac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}=2y=\dfrac{\partial R(x,y,z)}{\partial y},\end{cases}$$

故知存在 $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 使得

$$\nabla f(x,y,z)=F(x,y,z)=(6xy,\,3x^2+2yz,\,y^2).$$

2° 次求 f, 由上式知

$$\begin{cases} D_1 f(x,y,z) = 6xy, & (1) \\ D_2 f(x,y,z) = 3x^2 + 2yz, & (2) \\ D_3 f(x,y,z) = y^2, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow f(x,y,z) = 3x^2 y + g(y,z) && (4) \\ &\Rightarrow D_2 f(x,y,z) = 3x^2 + \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} \\ &\Rightarrow \frac{\partial g(y,z)}{\partial y} = 2yz, \quad (\text{由 } (2)) \\ &\Rightarrow g(y,z) = y^2 z + h(z) && (5) \\ &\Rightarrow f(x,y,z) = 3x^2 y + y^2 z + h(z) && (6) \\ &\Rightarrow D_3 f(x,y,z) = y^2 + h'(z) \\ &\Rightarrow h'(z) = 0, \quad (\text{由 } (3)) \\ &\Rightarrow h(z) = C, \quad (\text{代入 } (6)) \\ &\Rightarrow f(x,y,z) = 3x^2 y + y^2 z + C. \end{aligned}$$

其中 C 爲一固定之任意常數.

3° 利用線積分基本定理,

$$\begin{aligned} \text{原題} &= \int_0^1 \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= f(\mathbf{r}(1)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(2,1,2) - f(1,1,1) \\ &= 3 \cdot 2^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 2 + C - (3 + 1 + C) = 10. \end{aligned}$$ □

註： 稍早的例 4：求 $\oint_{\mathbf{r}} (x\,dy - y\,dx)$ 之值時, 不能使用線積分基本定理解決, 因爲

$$\Big[\, P(x,y) = -y,\ Q(x,y) = x \,\Big] \Rightarrow \Big[\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -1,\ \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = 1\Big]$$
$$\Rightarrow \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ● ○ ★ ●

第 十 一 章 習 題

多重積分與累次積分

11-1 設 $E=[0,1]\times[-1,1]$, $f\colon E\to\mathbb{R}: f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{若 } x+y\in\mathbb{Q},\\ 1, & \text{否則.}\end{cases}$

(a) 試求 $U(f,P)$ 及 $L(f,P)$, 內 P 爲一分割;

(b) 試問 f 於 E 上是否爲可積?

11-2 設 $E=[0,1]\times[0,2]$, $f\colon E\to\mathbb{R}: f(x,y)=x+2y$, $P=P_1\times P_2$.

(a) 若 $P_1=\{0,1/2,1\}$, $P_2=\{0,1/2,1,3/2,2\}$, 試求 $U(f,P)$ 及 $L(f,P)$.

(b) 若 P_1, P_2 分別爲區間 $[0,1]$ 及 $[0,2]$ 之 n 等分 (正則) 分割, 試求 n 以使 $U(f,P)-L(f,P)<0.001$.

11-3 設 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+4y^2\le 1\}$, 函數

$$f\colon A\to\mathbb{R}: f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5+y^5}{x^4+y^4}, & \text{若 } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{若 } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

試問 f 於 A 上是否爲可積? 爲何?

[提示] 先證 f 爲連續.

11-4 試求下列各累次積分 :

(a) $\displaystyle\int_0^2\int_1^3 |x-2|\cos y\,dx\,dy$;

[提示] 將積分區域分割爲二塊, 以便拿掉絕對值符號.

(b) $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 xy\sqrt{x^2-y^2}\,dy\,dx$;

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sin(3x+6y-12z)\,dz\,dy\,dx$;

[提示] 由內往外一層一層解之.

(d) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1\sqrt{|y-x^2|}\,dx\,dy$;

(e) $\displaystyle\int_0^2\int_1^2 |x-y|\cos y\,dx\,dy$.

11-5 試求下列各函數於指定區域之多重積分:

(a) $f(x,y)=y^2\exp(x+y)$, 於 $S=[-2,2]\times[0,1]$;

(b) $f(x,y)=x+\dfrac{y}{1+4x^2}$, 於 $S=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ \tan^{-1}2x\le y\le 2x\}$;

(c) $f(x,y)=x^2+y^2$, 於 $S=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ 0\le y\le 1+x^2\}$;

(d) $f(x,y,z)=1$, 於 $S=\{(x,y,z)\mid x^2+z^2\le 4,\ 0\le y\le 2\}$;

(e) $f(x,y)=xy$, 於 $S=\big\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 1\big\}$;

(f) $f(x,y)=\sin(ax+by)$, $(a,b\in\mathbb{R})$, 於 $S=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$.

11-6 設函數 $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 爲連續. 試將以下之累次積分對調其積分之次序

$$\int_0^2\int_{-y/2}^{y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

[提示] 先繪出積分範圍之圖形.

11-7 試利用重積分方法求下列各立體之體積:

(a) $S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\le 0\}$;

(b) $S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\le z^2,\ 0\le z\le 2\}$.

11-8 試利用重積分方法計算半徑爲 r 之圓面積.

11-9 設函數 $f(x)=e^{-ax}$, $g(y)=e^{-by}$, 其中 $a>0$, $b>0$, 集合
$E=\{(x,y)\,\big|\,x>0,\ y>0\}$, 試求 $\displaystyle\iint_E f(x)g(y)\,dA=?$

11-10 試求以 $z=x^3y$ 爲上界, 而以 $(0,0)$, $(2,0)$, $(0,1)$ 三頂點所構成的三角形爲底之立體的體積.

11-11 設 S 乃直線 $x-2y+2=0$, $x+3y-3=0$ 和 $y=0$ 所圍之區域, 試求 $f(x,y)=xy-x^2+1$ 在 S 上之二重積分.

11-12 一立體區域爲由曲面 $z=x^2-y^2$, XY 平面, 及平面 $x=1, x=3$, 所圍成. 試繪出此立體之圖形並利用二重積分以求其體積.

11-13 試求 $\displaystyle\int_0^1\Big[\int_{2x}^2 e^{y^2}\,dy\Big]\,dx$.

11-14 試求 $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \frac{\sin y}{y}\,dy\,dx$.
[提示] 對調積分次序.

11-15 設半徑爲十公分之一球體, 挖去半徑二公分的圓孔, 而圓孔之中心軸與球心之距離爲三公分. 試求其餘部分之體積. (僅須表爲累次積分, 不必計算其值).

積分變換

11-16 試求心臟線 $r = 1 + \cos\theta$ 之內部且在第一象限內之面積.

11-17 試求雙紐線 (lemniscate)

$$r^2 = a^2\,\cos 2\,\theta, \quad -\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4},$$

所圍區域之面積, 並繪出此曲線之略圖.

11-18 試求三重積分 $\displaystyle\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx$.

[提示] 先解最內層, 再以極坐標方法解之.

11-19 試求極限 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{[\sqrt{n^2-i^2}]} \frac{i^2+j^2}{n^4} =?$ 其中 $[\,\cdot\,]$ 爲最大整數函數.

11-20 試證 : $\Gamma(\dfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, 其中 $\Gamma(x)$ 爲 Gamma 函數.

[提示] 變換爲 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-x^2)\,dx$ 型態.

11-21 設

$$f\colon [0,1]\times[0,2] \to \mathbb{R} : f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } (x \in \mathbb{Q} \text{ 且 } y < 1) \text{ 或 } (x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \text{ 且 } y \ge 1), \\ 0, & \text{否則,} \end{cases}$$

(a) 試求 f 先對 y 再對 x 之累次積分;

(b) 討論 f 是否爲 Riemann 可積.

線積分

11-22 試求某力場 $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ 沿曲線 $\mathbf{r}(t) = (t, 2t, 3t)$ 自點 $(0,0,0)$ 至點 $(1,2,3)$ 推移一物件所作之功 (work).

11-23 一質量爲 m 之質點沿路徑 $\mathbf{r}\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}^3 : \mathbf{r}(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t)$ 移動, 其中 t 爲時間.

(a) 試問作用於此質點之力爲何 ?

(b) 此質點在時間區間 [1,2] 所作之功爲若干 ?

(c) 在時間區間 [1,2] 此質點沿上述路徑所走之距離爲若干 ?

11-24 利用 Green 定理以求 $\oint_C x^2y\,dx + 3xy\,dy$, 其中 C 爲由以下二函數所定之正向曲線 : $y = x^2,\ \ y = \sqrt{x}$.

11-25 若 $P(x,y) = xe^{-y^2}$ 且 $Q(x,y) = -x^2ye^{-y^2} + \dfrac{1}{x^2+y^2}$, 試求線積分 $\oint_{\mathbf{r}} P\,dx + Q\,dy$, 其中 $\mathbf{r}$ 爲沿正方形 $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| \le a, |y| \le a\right\}$ 之正向邊界.

11-26 試求質量函數 $g(x,y) = xy$ 於參數曲線 $\mathbf{r}\colon [0,1] \to \mathbb{R} : \mathbf{r}(t) = (t^4, 3t)$ 上之總質量.

參考資料

[1] 國立編譯館: 數學名詞, 正中書局, 民 70 年.

[2] 陳珍漢、黃德華、顏國勇: 微積分學, 修訂三版, 民 84 年.

[3] 世部貞市郎: 微積分學辭典, 民 80 年.

[4] Apostol, T.M., Mathematical Analysis, A Modern Approach to Advanced Calculus, 2nd ed., 1975.

[5] Bell, S.; Blum, J.R., Lewis, J.V.; Russenblatt, J.: Modern University Calculus, 1966.

[6] De la Vallée-Poussin, C-J: Cours d'Analyse Infinitésimale.

[7] Edwards, C.H.; Penney D.E.: Calculus and Analytic geometry, 4th ed., 1994

[8] Finney, R.L.; Thomas, G.B.: Calculus, 2nd ed., 1994.

[9] Goldstein, L.A.; Lay, D.C.; Schneider D.I.: Calculus and its Applications, 6th ed., 1990.

[10] Marsden, J.E.; Hoffman M.J.: Elementary Classical Analysis, 2nd ed., 1993.

[11] Pinter, C.C.: Set Theory, 1971.

[12] Royden, H.L.; Real Analysis, 3rd ed., 1989.

[13] Rudin, W.: Principles of Mathematical Analysis, 3rd ed., 1976.

[14] Salas, S.L.; Hille E.: Calculus: One and serveral variables with analytic geometry, 7th ed. 1995.

[15] Taylor, A.E.: Advanced Calculus, 1955.

[16] Varberg, D.; Purcell, E.J.: Calculus, 2nd ed., 1997.

答案與提示

預　篇

0-2 (a) $\sup A = 1,\ \inf A = 0$.

(b) $\sup B = 1,\ \inf B = 0$.

(c) $\sup C = 2,\ \inf C = -3$.

(d) $\sup D = 2,\ \inf D = 0$.

0-3 先假定其存在, 而推得矛盾之結果.

0-4 $\sup B = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \ \inf B = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

0-5 證明 $\sup A + \sup B \geq \sup C$, 且 $\sup A + \sup B \leq \sup C$.

0-6 考慮 $\sup E$ 之定義.

0-7 證明 : $\inf B$ 爲 A 之一上界.

0-8 [提示] 先繪圖.

0-10 $f\colon [0,20] \to \mathbb{R} : f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{若 } 0 \leq t \leq 5, \\ 10, & \text{若 } 5 < t \leq 8, \\ 10+3(t-8), & \text{若 } 8 < t \leq 20. \end{cases}$

0-11 $g(x) = 0,\ g(x) = x$ 或 $g(x) = 1$.

0-12 $\sup A = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \inf A = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

第　一　章

1-1 利用定義.

1-2 若使用平行法, 應分 $0 < \epsilon < 1/2$ 及 $\epsilon \geq 1/2$ 二情形討論.

1-3 (a) 0, 0.　(b) 考慮定理之條件.

1-4 (a) $1/4$.　(b) $-1/2$.　(c) -1 .　(d) 0 .　(e) 1 .　(f) $\begin{cases} 3n-1, & \text{若 } n > 0, \\ 3n, & \text{若 } n < 0. \end{cases}$

(g) 0 .　(h) 不存在 .　(i) $-\infty$.　(j) 1 .

1-5 $f(3^-) = 0,\ \ f(3^+) = 2,\ \ \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ 不存在, $\ \ f(-3^-) = 2,\ \ f(-3^+) = 0,$ $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ 不存在.

1-6 (a) f 爲連續函數 .

(b) g 爲連續函數 .

(c) h 爲連續函數 .

1-7 (a) 利用制限定理.

1-8 1° 若 $c \neq 0$ 則 $a = \dfrac{\sin c - b}{c}$.
2° 若 $c = 0$ 則 $b = 0,\ a$ 爲任意數.

1-9 $\lim\limits_{x\to p} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(p+h)$.

1-10 仿上題.

1-11 參考下一題之函數.

1-12 $-1,\ 0,\ 1$.

1-13 (a) $f\circ g\circ h$ 在點 0 不連續. (b) $h\circ f\circ g$ 爲一連續函數.

1-14 先提出 x, 再利用介值定理.

1-15 利用制限定理.

1-16 考慮 $f - g$.

1-17 (b) 在 $15000k$ 不爲連續, $k \in \mathbb{N}$.

1-18 [提示] 大數 = (和 + 差)/2.

1-19 利用定理 1.27.

第 二 章

2-1 (a) $f'\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} : f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$.

(b) $f'(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x < 0\ , \\ \dfrac{3}{2}(2x)^{-1/4}, & \text{若 } x > 0\ . \end{cases}$

(c) $f'\colon (-\infty,-1)\cup(1,+\infty) \to \mathbb{R} : f'(x) = \Big(\dfrac{x+1}{x-1}\Big)^{-1/2}\cdot\dfrac{-1}{(x-1)^2}$.

(d) $f'\colon \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{R} : f'(x) = \operatorname{sgn}(x)\cdot[x]$.

2-2 (a) $f'(0) = 0$, (b) f 在點 $p \neq 0$ 不爲可微.

2-4 (a) f 在點 1 不爲可微. (b) $f'(1/2) = \sqrt{2}/2$.

2-5 $(h\circ g\circ f)'(x) = -\dfrac{4x}{(x^2+1)^3} + \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

2-6 $f^{(n)}(x) = (-1)^n\cdot 2\cdot n!(1+x)^{-(n+1)}$.

2-7 $f'\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R} : f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\Big[1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\Big(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big)\Big]$.

2-8 1080 .

2-9 3/8 .

2-10 (a) $a = 1/2,\ b = 1$.

2-11 切線方程式爲 $y + \dfrac{3}{4} = x - \dfrac{1}{2}$.

2-12 $\dfrac{3}{2}$ m/sec.

2-13 (a) $\forall x \neq a,\quad f'(x) = \dfrac{1}{3}(x-a)^{-2/3}$.

(b) 垂直切線 $x = a$ 及非垂直切線 $y - \dfrac{3}{2} = \dfrac{4}{27}\big(x - \dfrac{27}{8} - a\big)$.

2-14 $y = 2x - 1,\ y = 8x - 16$.

2-15 設 $(x_0, f(x_0))$ 爲 f 之一切點, 考慮 g 過點 $(2x_0, g(2x_0))$ 之切線.

2-16 $20/3$.

2-17 $8\sqrt{2}$.

2-18 $V = \dfrac{8}{3}\pi r^3$.

2-19 (a) $[0, 50]$.

(b) 4 月 5 日上午八時 .

(c) 4 月 22 日零時, 傳染速度遞減最快.

2-23 提示 : 左右兩端各除以 $|x - y|$.

2-24 f 在點 0 有相對極大, 在點 0.4 有相對極小.

2-25 (a) $\forall x \neq 0,\ F'(x) = f'(x^4) \cdot 4x^3 = \dfrac{x^4 - 1}{\sqrt{x^4}} 4x^3 = 4x(x^4 - 1)$.

(b) $F'(0) = 0$.

2-26 (a) 利用導數之定義 .

(b) 連鎖律只在點 $x = 0$ 可用.

2-27 先證 $xf'(x) - f(x) > 0,\ \forall x \in (0, 1)$.

第 三 章

3-1 (a) $\sqrt{2}$. (b) 0 . (c) 1 . (d) 0 . (e) e . (f) 0 .

3-2 (a) $f' \colon \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{R} : f'(x) = -\cos x$.

(b) $f' \colon (0, +\infty) \to \mathbb{R} : f'(x) = \dfrac{-1}{2(x+1)\sqrt{x}}$.

(c) $f' \colon \mathbb{R} \setminus [0, 1] \to \mathbb{R} : f'(x) = \dfrac{x^2 + 8x - 4}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} - \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

(d) $f' \colon [1, +\infty) \to \mathbb{R} : f'(x) = \begin{cases} x^{\sqrt{x-1}}\Big(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x-1}} + \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}\Big), & \text{若 } x > 1, \\ 0, & \text{若 } x = 1 . \end{cases}$

3-3 利用數學歸法.

3-4 f 在點 0 不爲連續, g 爲連續函數但在點 0 不爲可微, h 爲可微函數.

3-5 證明 $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$ 不存在.

3-6 $f^{-1} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f^{-1}(y) = \ln\Big(\dfrac{y + \sqrt{y^2 + 4ab}}{2a}\Big)$,

$(f^{-1})' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2 + 4ab}}$.

3-7 $2^x + 2^y$ 之最大值爲 17, 最小值爲 8.

3-8 (e) 令 $f(x) = \sqrt{x}$.

3-9 先證 : $\sin x / x$ 在 $(0, \pi/2]$ 爲遞減函數.

3-10 仿 $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ 之證.

3-11 先證 $f'(x) = \alpha f(x)$.

3-12 2.

3-14 先證 $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ 之情形.

3-15 (a) $y' = \dfrac{\csc^2 x + y\cdot 3^{xy}\cdot \ln 3}{1 - x\cdot 3^{xy}\cdot \ln 3}$.

(b) $y' = -\dfrac{2\cosh y + \sqrt{y/x}}{2x\sinh y + \sqrt{x/y}}$.

(c) $y' = -\dfrac{a^x \ln a}{b^y \cdot \ln b},\ y'' = -\dfrac{a^x (\ln a)^2}{b^{2y}\cdot \ln b}\cdot a^2 b^2.$

3-16 $x + y = 4$.

3-17 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-3t^2}{1-2t},\ \forall t \neq 1/2.\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{6t^2-6t+2}{(1-2t)^3}$.

3-18 (a) $\forall t \in [0, \pi/2],\ \dfrac{dy}{dx}\Big|_t = -16\sin t\cos 2t$.

(b) $y = -8\sqrt{2}\,\sin\dfrac{\pi}{8}\cdot\Big(x - \sin\dfrac{\pi}{8}\Big),\quad y = 8\sqrt{2}\,\sin\dfrac{3\pi}{8}\cdot\Big(x - \sin\dfrac{3\pi}{8}\Big)$.

3-19 (a) 點 A 及 點 B 之坐標分別爲 $(\cos t,\ \sin t),\ \ (0,\ \sin t + \sqrt{24 + \sin^2 t})$.

(b) $-\Big(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{24.5}}\Big)$.

(c) $2\pi\cos 2\pi t + \dfrac{\pi \sin 4\pi t}{\sqrt{24 + \sin^2 2\pi t}}$.

3-20 $70.5288°$.

3-21 15.694 年.

3-22 $0.07020 = 7.02\%$.

3-23 $n(t) = 10^5 10^{t/5} = 10^{5+t/5}$.

3-24 利用均值定理.

3-25 (函數未必爲連續).

第 四 章

4-1 (a) $f(x) = 1 + x\ln a + \dfrac{(x\ln a)^2}{2!} + \dfrac{(x\ln a)^3}{3!} + \dfrac{(x\ln a)^4}{4!} + \dfrac{(x\ln a)^5 a^c}{5!},\ c$ 介於 0 與 x 之間,

$P_5(x) = 1 + x\ln a + \dfrac{(x\ln a)^2}{2!} + \dfrac{(x\ln a)^3}{3!} + \dfrac{(x\ln a)^4}{4!} + \dfrac{(x\ln a)^5}{5!}.$

(b) $g(x) = 1 + x - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{6}x^4 - \dfrac{e^c}{30}(\cos c - \sin c)x^5,\ c$ 介於 0 與 x 之間,

$P_5(x) = 1 + x - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{6}x^4 - \dfrac{1}{30}x^5$.

4-2 先求 cosh 之 Maclaurin 展開式.

4-3 (a) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{a}{k}(x-1)^k + \binom{a}{n}c^{a-n}(x-1)^n$, 內 c 介於 1 與 x 之間.

$P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}(x-1)^k$.

(b) $g(x) = e + 2e(x-1) + \dfrac{3e}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \dfrac{ne}{(n-1)!}(x-1)^{n-1} + \dfrac{(n+c)e^c}{n!}(x-1)^n$,
內 c 介於 1 與 x 之間.
$P_n(x) = e + 2e(x-1) + \dfrac{3e}{2!}(x-1)^2 + \cdots + \dfrac{(n+1)e}{n!}(x-1)^n$.

4-4 考慮 $\ln(1+x)$ 之三階 Maclaurin 展開式.

4-5 (a) $f(x) = 4 + \dfrac{e^c + e^{-c} + 2\cos c}{4!}x^4$, 其中 c 介於 0 與 x 之間.

4-6 (a) 在 0,1 有最小值, 在 $1/4$ 有局部極大值.

(b) 在 0 有最大值, 在 $\pi/2$ 有最小值.

4-7 先求 $3x - x^3$ 之絕對極值.

4-8 $a = 1,\ b = 0$. f 在點 2 有相對極大.

4-9 先將 $\angle QRP$ 表爲 r 之函數.

4-13 設函數 $f(x) = x - \exp(-x^2)$.

(a) 漸近線 $y = x$. 在 $\pm 1/\sqrt{2}$ 有反曲點.

(b) 設法證 f 爲遞增.

4-15 $p > 1$ 時方使 f 爲凸狀函數.

4-16 以數學歸納法證之.

4-17 $R_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n(1+c)^n}x^n,\ \lim\limits_{n\to+\infty} R_n(1) = 0$.

4-18 $m \le 1,\ n \ge 20000$.

4-19 $\sqrt{3} \approx 1.73206$.

4-20 0.567143.

4-21 (b) 0.0161.

4-22 (a) 3. (b) 1. (c) 2. (d) $(3/2)^{30}$. (e) 1. (f) 1. (g) e . (h) $-1/12$ (i) $1/3$.

4-23 § 4.7 中之例.

4-24 先提出 x, 移至分母, 形成不定型.

4-25 $f''(x)$.

4-26 -1 .

第 五 章

5-1 (a) $\ln|\sin x| + C$.

(b) $-\ln|\cot x + \csc x| + C$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\frac{\sin^{2(n-k)+1}x}{2(n-k)+1} + C$.

(d) $\displaystyle-\frac{\cot^{n-1}x}{n-1} - \int \cot^{n-2}x\,dx$.

(e) $\displaystyle-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\cot^{2n-2k-1}x}{2n-2k-1} + C$.

(f) $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C.$

(g) $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+C.$

(h) $x\cot^{-1}x+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$

(i) $-\dfrac{1}{2n}\csc^{2n-1}x\cot x+\dfrac{2n-1}{2n}\displaystyle\int\csc^{2n-1}x\,dx.$

(j) $\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C.$

5-2 (a) $-\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{3}{2(x+1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^3}+\dfrac{1}{4(x+1)^4}+C$.

(b) $-\ln(1+e^x)+x+C$.

(c) $\begin{cases}\ln|x|-\dfrac{1}{n}\ln|x^n+1|+C, & \text{若 } n\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}\ln|x|+C, & \text{若 } n=0\ .\end{cases}$

(d) $\dfrac{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}{a^2-b^2}+C$.

(e) $\dfrac{1}{5}\sec^5x-\dfrac{1}{3}\sec^3x+C$.

(f) $\dfrac{a}{a^2+b^2}x+\dfrac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+C$.

(g) $-\dfrac{(\ln(\cos x))^2}{2}+C$.

(h) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x}+C$.

(i) $\dfrac{1}{2(\ln 3-\ln 2)}\ln\left|\dfrac{3^x-2^x}{3^x+2^x}\right|+C$.

(j) $\sqrt{x^2+2x}+\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x}\right|+C$.

5-3 (a) $\dfrac{1}{99(1-x)^{99}}-\dfrac{1}{49(1-x)^{98}}+\dfrac{1}{97(1-x)^{97}}+C$.

(b) $\dfrac{1}{3a^3}\ln\left|\dfrac{x^3}{a^3+x^3}\right|+C$.

(c) $-2\sqrt{2}\cos\dfrac{x}{2}+C$.

(d) $\dfrac{1}{8}\sin^2 2x-\dfrac{1}{8}\cos 2x+\dfrac{1}{24}\cos 6x+C$.

(e) $-\dfrac{(1-x^2)^{5/2}}{5x^5}+C$.

(f) $-\dfrac{1}{2}\ln^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+C$.

(g) $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}x+\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$

(h) $\sinh^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

(i) $\sin^{-1}x+\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}+C$.

(j) $-\dfrac{1}{3\tan^3 x}-\dfrac{3}{\tan x}+3\tan x+\dfrac{\tan^3 x}{3}+C$.

5-4 (a) $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^2\sin 2x}{4}+\dfrac{x\cos 2x}{4}-\dfrac{\sin 2x}{8}+C$.

(b) $\dfrac{1}{2}x(\cos(\ln x)+\sin(\ln x))+C$.

(c) $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x}}\tan^{-1}x-2\sqrt{x}+C$.

(d) $e^x\tan\dfrac{x}{2}+C$.

(e) $\begin{cases} x\sec^{-1}x-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C, & \text{若 } x>1,\\ x\sec^{-1}x+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+C, & \text{若 } x<-1, \end{cases}$

(f) $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}+C$.

5-5 $\displaystyle\int\sin^n x\,dx=-\frac{\sin^{n-1}x\cos x}{n}+\frac{n-1}{n}\int\sin^{n-2}x\,dx.$

5-6 (a) $\dfrac{1}{4a^3}\Big(\ln\Big|\dfrac{x+a}{x-a}\Big|+\dfrac{2ax}{a^2-x^2}\Big)+C$.

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3}\ln|x+1|+\dfrac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+C$.

(c) $\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{x^4}{(1+x)^2(1+x^2)}-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x+C$.

(d) $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\ln\Big|\dfrac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\Big|+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)+C.$

5-7 (a) $\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+C$.

(b) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\sin^{-1}x+\ln\sqrt{1-x^2}+C$.

(c) $x\,\tan\dfrac{x}{2}+C$.

(d) $\ln\Big|\dfrac{xe^x}{1+xe^x}\Big|+C$.

5-8 (a) $f(x)=\sqrt{x^2+9}+3$.

(b) $f(x)=\sqrt{x^2+9}+5-2\sqrt{13}$.

5-9 利用數學歸納法.

第 六 章

6-1 不爲可積.

6-2 (b) $U(f,P)=3,\ L(f,P)=0$. (c) 2.

6-3 可積, $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx=8.$

6-4 f 在 I 未必爲可積, 反例 $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}:f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q},\\ -1, & \text{否則.}\end{cases}$

6-5 (a) $\ln|1+\sqrt{2}|$. (b) $2/\pi$. (c) 1.

6-6 (a) 不爲可積.

(b) 若 $\alpha = 0$, 則 g 爲可積, 否則不爲可積.

6-7 (a) $55/12$. (b) $4(2\sqrt{2}-1)/9$.

6-8 利用 $1 < 1/\sqrt{1-x^n} < 1/\sqrt{1-x}$.

6-9 $\dfrac{2\sin x^2}{x} - \dfrac{\sin\sqrt{x}}{2x}$.

6-11 (a) $\sqrt{p^2+1}$. (b) 1 .

6-12 (a) $a = -4$ 或 1. $f(x) = 2x + 3$. (b) 不爲唯一.

6-13 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = -\dfrac{1}{2}\ln(2+\cos x) + \dfrac{1}{2}\ln 3 = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2+\cos x}$.

6-14 先微分恆等式 $f(ax) = f(a) + f(x)$ 之兩端.

6-15 $F'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} : F'(x) = \exp(-x^2)$.

6-16 $F + C$, 其中 $F(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } |x| \le 1, \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}\operatorname{sgn}(x), & \text{若 } |x| > 1 \text{ .} \end{cases}$

6-17 $-\cos x$.

6-18 $(\ln x)^2/2$.

6-19 考慮 $\displaystyle\int_0^2 [f(x) - x]\,dx$, 再利用積分均值定理.

6-20 (a) 收斂. (b) 發散. (c) 收斂. (d) 發散. (e) 發散. (f) 發散.

6-21 應分別在區間 $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, +\infty)$ 上討論瑕積分之收斂性.

6-22 收斂.

6-23 收斂.

6-24 被積函數與 $1/x^{p-1}$ 之比的極限爲 1, (當 $x \to 0^+$), 再利用定理 6.24.

第 七 章

7-1 $37/96$.

7-2 $4 + \dfrac{4}{3}\pi^3$.

7-3 $\Big[-\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3x^2}{2} - x\Big]_{(3-\sqrt{5})/2}^{1} + \Big[-\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x\Big]_{1}^{(1+\sqrt{5})/2}$.

7-4 $4\sqrt{2}$.

7-5 $8/3$.

7-6 $3/4$.

7-7 $4\pi/15$.

7-8 (a) $45\pi/2$. (b) $153\pi/5$.

7-9 $5\pi^2$.

7-10 $4\sqrt{3}ab^2/3$.

7-11 當割去扇形的角度爲 $2\pi - \dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ (約 66°) 時, 圓錐體積最大.

7-12 $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = \sqrt{\dfrac{1+2x}{\pi}}$ or $-\sqrt{\dfrac{1+2x}{\pi}}$.

7-13 14/3.

7-14 118/27.

7-15 134/27.

7-16 2.

7-17 $515\pi/64$.

7-18 $\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}(3\sqrt{3}+2\pi)$.

7-19 $l : m = 1 : \sqrt{2}$.

7-20 $20000\pi\Big(1-\cos\dfrac{1}{2}\Big)$.

7-21 $\dfrac{1}{2\pi h(4-h)}$.

7-22 0.22607 .

7-23 $\dfrac{\sqrt{203}-\sqrt{5}}{2} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{29}+2\sqrt{7}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} + 4 - \sqrt{7}$.

7-24 $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{k}{2L\sqrt{r^2-(h-r)^2}} = \dfrac{k}{2L\sqrt{2hr-h^2}}$.

7-25 $n \geq 58$.

第 八 章

8-1 (a) 0 . (b) 0 . (c) 0 . (d) 發散. (e) $\ln p$.

8-2 $2\ln 2 - \ln 3$.

8-3 令 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 並觀察其是否爲一等比級數.

8-4 利用定義.

8-5 先證 $\{a_n\}_n$ 爲遞減函數, $\{b_n\}_n$ 爲遞增函數.

8-6 (a) 1. (b) $t/(1+t^2)$. (c) 3/2 . (d) 1/2 . (e) 4 . (f) 1. (g) 1/4. (h) $\pi/4$.

8-7 (a) 收斂. (b) 發散. (c) 收斂. (d) 發散. (e) 收斂. (f) 發散.

8-8 原級數爲收斂之充要條件爲 $0 < q < 1$.

8-9 [提示] 當 n 夠大時, $|a_n| < 1$.

8-10 (a) 發散. (b) 條件收斂. (c) 條件收斂. (d) 發散.

8-11 找 b_n 以使 $\sqrt{a_n b_n} = \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$, 再討論 $\sum b_n$ 之收斂性.

8-12 (a) $(-2, 2)$. (b) $\mathbb{R}$. (c) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

8-13 $\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

8-14 (a) $x \in (-1, 1), x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$.

8-15 考慮等比級數.

8-16 考慮 e^{-x} 之 Maclaurin 級數及 Maclaurin 展開式.

8-17 $x + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1\cdot 3}{2!\,2^2}\cdot\dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n\, n!}\cdot\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$.

8-18 考慮 Maclaurin 級數之定義.

第 九 章

9-1 只需利用叉積及內積之定義.

9-2 $1\cdot(x-1) + 2\cdot(y-2) + 3\cdot(z-3) = 0$.

9-3 $\cos^{-1}(6/19)$.

9-4 (a) $c = -1$, 交點爲 $(5, 7, 11)$. (b) $\dfrac{1}{2}(x-5) + 0(y-7) - \dfrac{1}{6}(z-11) = 0$.

9-5 仿第二節例 1.

9-6 考慮平行立方體之高與 之關係.

9-7 (a) $D_{\mathbf{f}} = D_{\mathbf{g}} = D_{\mathbf{h}} = [0, 2\pi], R_{\mathbf{f}} = R_{\mathbf{g}} = R_{\mathbf{h}} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, 弧長分別爲 $2\pi,\ 4\pi,\ 2\pi$.

(b) $\mathbf{f}$ 與 $\mathbf{h}$ 之定義域、值域及弧長三者皆相同, 但對應法則不 同, 故二函數不相等.

9-8 弧長$= 12$.

9-9 (a) 圓柱 : $x^2 + y^2 = 1$, 平面 : $x + z = 1$. (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t}\, dt$.

9-10 (a) 距離 $r = \theta$. (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \theta^2}\, d\theta$.

9-11 (a) 速度向量爲 $\mathbf{v}(2) = 3\,\mathbf{i} - 4\,\mathbf{j} + 12\,\mathbf{k}$, 速率爲 13.

(b) 切線 : $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y+4}{-4} = \dfrac{z-8}{12}$.

法平面 : $3(x-6) + (-4)(y+4) + 12(z-8) = 0$.

9-12 $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{8}, -\dfrac{1}{8}, \dfrac{\pi}{12}\right)$.

9-13 $(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (-1, 0, 0),\ (0, -1, 0)$.

9-14 曲率半徑$= 1$, 曲率中心爲 $(0, 2)$.

9-15 $3/\sqrt{5}$.

9-16 $(1, 0, 3),\ \ 3(x-1) - 10y + 2(z-3) = 0$.

9-17 原運動 $\mathbf{r}\colon [0, 3\pi/2] \to \mathbb{R}^2 : \mathbf{r}(t) = \begin{cases} (\cos t, \sin t), & \text{若 } t \in [0, \pi], \\ (\cos t, 0), & \text{若 } t \in [\pi, 3\pi/2]. \end{cases}$

第 十 章

10-1 (a) 極限=1/2. (b) 極限=0.

10-2 (a) 1. (b) -1. (c) 不存在.

10-3 f 在點 $(0,0)$ 不爲連續.

10-4 $\{(x,y) \mid x=y\}$.

10-5 (a) k=0. (b) 不存在.

10-6 $-(\sqrt{5}e)^{-1}$.

10-7 (a) $f_{11}(x,y,z) = -z\cdot\sin(x-y), \cdots, f_{33}(x,y,z) = 0.$

(b) $f_{11}(x,y,z) = -\dfrac{2(x^2-yz+z^2)}{(x^2+yz-z^2)^2}, \cdots, f_{33}(x,y,z) = -\dfrac{2x^2+y^2+2z^2-2yz}{(x^2+yz-z^2)^2}.$

10-8 (a) $6\sqrt{2}$. (b) $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

10-9 $f(x,y) = \dfrac{x^3}{3} + xy^2 + 1$.

10-10 (a) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{69}}, \dfrac{-8}{\sqrt{69}}, \dfrac{2}{\sqrt{69}}\right)$. (b) $x-8y+2z=-6$. (c) $\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{\sqrt{69}}\right) \approx 1.33$ 弳.

10-11 $(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0, (x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0.$

10-12 切線及法平面分別爲 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-3}{1}$, $1(x-1)-2(y-2)+1(z-3)=0.$

10-13 f 無極值.

10-14 於 $(0,0)$ 無極值, 於 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 及 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ 有相對極小.

10-15 在 $(-1/2,4)$ 有相對極大值, 無極小值.

10-16 $\sqrt{3}$.

10-17 最大值爲 $100/3$, 無最小值.

10-18 (a) $k/3$.

10-19 $\sqrt{3}:\sqrt{2}:1$

10-20 極大值爲 8, 極小值爲 $8/3$.

10-21 最大值爲 300, 最小值爲 $150\cdot 2^{2/3}$.

10-22 $2^{1/3},\ 2^{1/3},\ 2^{1/3}/2$.

10-23 $x=12,\ y=16,\ z=20$.

10-24 $A=3a,\ B=3b,\ C=3c$.

第 十 一 章

11-1 (a) $U(f,P)=2,\ L(f,P)=0$. (b) 不爲可積.

11-2 (a) $U(f,P)=13/2,\ L(f,P)=13/4$. (b) $n>10000$.

11-3 可積.

11-4 (a) $\sin 2$. (b) $\dfrac{31-9\sqrt{3}}{15}$. (c) 0 . (d) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{5}{6}$. (e) $1+\cos 2+2\sin 1-\dfrac{3}{2}\sin 2$.

11-5 (a) $e^3-2e^2-e^{-1}+2e^{-2}$. (b) $\dfrac{17}{12}-\dfrac{7}{8}\tan^{-1}2-\dfrac{1}{12}(\tan^{-1}2)^3$.

(c) $304/105$. (d) 8π . (e) 0 . (f) 0 .

11-6 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-2x}^{2} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{0}^{2}\int_{x}^{2} f(x,y)\,dy\,dx$.

11-7 (a) $2\pi/3$. (b) $8\pi/3$.

11-8 πr^2 .

11-9 $1/(ab)$.

11-10 $2/15$.

11-11 $-5/24$.

11-12 $80/3$.

11-13 $\dfrac{1}{4}(e^4-1)$.

11-14 $1-\cos 1$.

11-15 $\dfrac{4}{3}\cdot\pi\cdot 10^3-2\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{3-\sqrt{2^2-x^2}}^{3+\sqrt{2^2-x^2}}\sqrt{100-x^2-y^2}\,dy\,dx\approx 3951.1$.

11-16 $1+\dfrac{3\pi}{8}$.

11-17 a^2 .

11-18 $2\pi/15$.

11-19 $\pi/8$.

11-21 (a) 1. (b) 不可積.

11-22 6 .

11-23 (a) $(0,0,mg)$. (b) mg . (c) $\sqrt{2}$.

11-24 $51/140$.

11-25 0 .

11-26 $49/24$.

附錄一

定理

設 $f\colon A \to B$ 爲一函數, 則以下二陳述爲對等 :

I. f 爲一對射 ;

II. 存在唯一自 B 映至 A 之函數 g 使得 $g \circ f = I_A, f \circ g = I_B$.

【證】I $\Rightarrow$ II : 設 f 爲自 A 蓋射 B 之一對一函數, 則對於任一 $y \in B$, 必存在唯一之 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$; 由是我們可界定一函數 g 如下 :

$$g\colon B \to A : g(y) = x, \quad (\text{內 } x \text{ 爲唯一可使 } f(x) = y \text{ 之 } x.)$$

由於

$$\forall x \in A,\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x,$$

及

$$\forall y \in B,\ (f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y,$$

故得 $g \circ f = I_A$ 及 $f \circ g = I_B$. 至於 g 之唯一性, 設 h 亦爲 自 B 蓋射 A 之函數使得 $h \circ f = I_A$ 及 $f \circ h = I_B$, 則

$$\forall y \in B,\ g(y) = (h \circ f)(g(y)) = (h \circ (f \circ g))(y) = h(y).$$

II $\Rightarrow$ I : 設存在 $g\colon B \to A$ 使得 $f \circ g = I_B$ 及 $g \circ f = I_A$. 則由

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\Rightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \\ &\Rightarrow x_1 = x_2, \end{aligned}$$

知, f 爲一嵌射. 其次, 若 $y \in B$, 因 $f \circ g = I_B$, 故 $f(g(y)) = y$. 令 $x = g(y) \in A$, 則 $f(x) = f(g(y)) = y$. 即 f 爲一蓋射.

附錄二

定理

設函數 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 爲嵌射且爲連續, 則

(1) f 必爲遞增或爲遞減.

(2) f 之反函數 $g\colon f([a,b])\to[a,b]$ 亦與 f 同爲遞增或爲遞減, 且爲連續.

【證】(1) 因 f 爲嵌射, 故 $\forall t\in(a,b],\ f(t)\neq f(a)$. 且僅有下列兩種可能情形 :

(a) 假定 $f(t)>f(a)$. $\forall x_1,x_2\in[a,b]$, 若 $x_1<x_2$, 則 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 但 $f(x_1)>f(x_2)$ 爲不可能. 否則, 由 $f(a)<f(x_2)<f(x_1)$ 及連續函數的介值定理知, $\exists c\in(a,x_1)$ 使得 $f(c)=f(x_2)$. 此乃與 f 爲嵌射之假設相矛盾. 故應有

$$x_1<x_2\ \Rightarrow\ f(x_1)<f(x_2),$$

即 f 在 $[a,b]$ 爲遞增函數.

(b) 假定 $f(t)<f(a)$, 仿 (a) 之證明可得 f 在 $[a,b]$ 爲遞減函數.

(2) (a) 先證若 f 爲遞增則 g 亦爲遞增. 設 $f(a)=c,\ f(b)=d$, 則得 $D_g=[c,d]$. $\forall\, y_1,y_2\in[c,d]$, 若 $y_1<y_2$, 則 $g(y_1)\geq g(y_2)$ 爲不可能. 否則, 由於 f 爲遞增, 得 $f(g(y_1))\geq f(g(y_2))$, 即 $y_1\geq y_2$, 此與 $y_1<y_2$ 之假設相矛盾, 故應有若 $y_1<y_2$, 則 $g(y_1)<g(y_2)$. 即 g 爲遞增函數. 遞減情況同理.

(b) 次證 g 爲連續函數, 即證 $\forall y_0\in[c,d],\ \lim\limits_{y\to y_0}g(y)=g(y_0)$. 先設 $y_0\in(c,d)$. 但因 g 爲單調且有界, 故在點 y_0 之左右極限 $\lim\limits_{y\to y_0^-}g(y),\ \lim\limits_{y\to y_0^+}g(y)$ 均存在. 但因 f 爲連續,

$$f(\lim_{y\to y_0^-}g(y))=\lim_{y\to y_0^-}(f\circ g)(y)=\lim_{y\to y_0^-}y=y_0,\qquad(*)$$

故得 $\lim\limits_{y\to y_0^-}g(y)=g(y_0)$. 同理亦有 $\lim\limits_{y\to y_0^+}g(y)=g(y_0)$. 至於 $y=c$ 或 d, 只須證明單側極限等 於 $g(y_0)$, 仿 $(*)$ 立即可得證.

附錄三　雙曲函數與三角函數之相似性

在第三章中, 我們曾由雙曲函數之定義和各性質中, 驚訝地發現它們與三角函數何其相似. 例如,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

$$1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x,$$

$$\coth^2 x - 1 = \operatorname{csch}^2 x,$$

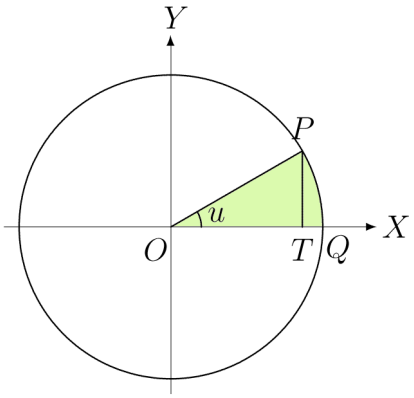
$$D\sinh x = \cosh x,$$

$$D\cosh x = \sinh x.$$

雙曲函數與三角函數二者之出發點 (即定義) 完全不同, 爲何能發展出諸多相近的結果? 本附錄將解釋二者可利用同一原理發展而得, 其間之差異只是三角函數 (又稱圓函數) 係利用單位圓 $x^2 + y^2 = 1$, 而雙曲函數乃利用雙曲線 $x^2 - y^2 = 1$.

(一) 圓函數 (即三角函數) :

設 O 爲中心在原點之單位圓, 即 $x^2 + y^2 = 1$, 點 P 在第一象限爲圓上一點其對 X 軸之垂足爲點 T, 如下圖所示. 若 $\angle TOP = u$, 此時, $OT = \cos u,\ \ TP = \sin u$.

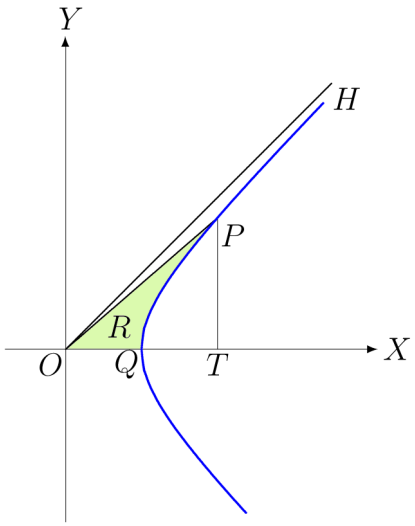


由上述二者可衍生出其他三角函數 $\tan u,\ \cot u,\ \sec u$ 及 $\csc u$, 簡言之,「若扇形 OPQ 之面積爲 $u/2$, 則 $OT = \cos u,\ TP = \sin u$.」

(二) 雙曲函數 :

設 H 爲雙曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 之右葉, 點 P 在第一象限爲雙曲線 H 上之一點, 其對 X 軸之垂足爲 T, 如下圖所示.

若 R 表 $\overleftrightarrow{OP},\ \overleftrightarrow{OQ}$ 與雙曲線 H 所圍之區域, 即圖中網點之部份, 我們將證明 :「若 R 之面積爲 $u/2$, 則 $OT = \cosh u,\ TP = \sinh u$.」爲方便計, 令 $OT = a,\ TP = b$, 此外點 Q 之橫坐標顯然爲 1, 是以



$$\begin{aligned}\frac{u}{2} &= A(R) = A(\triangle OPT) - \int_1^a \sqrt{x^2-1}\,dx \\ &= \frac{ab}{2} - \left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\cosh^{-1} x\right]_1^a, \quad (\text{利用雙曲代換法}) \\ &= \frac{ab}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{a^2-1} + \frac{1}{2}\cosh^{-1} a - \frac{1}{2}\cosh^{-1} 1 \\ &= \frac{1}{2}\cosh^{-1} a, \quad (\text{因 } b = \sqrt{a^2-1},\ \cosh^{-1} 1 = 0)\end{aligned}$$

故 $a = \cosh u, \quad b = \sqrt{a^2-1} = \sinh u.$

附錄四　Cauchy 均值定理在幾何上的意義

設參數方程式 $\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t), \end{cases}$ $t \in [a,b]$, 其中之 f, g 皆爲連續且於區間 (a,b) 上爲可微, 則由 Cauchy 均值定理知, 存在 $p \in (a,b)$ 使得

$$\begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f'(p) \\ g(b)-g(a) & g'(p) \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

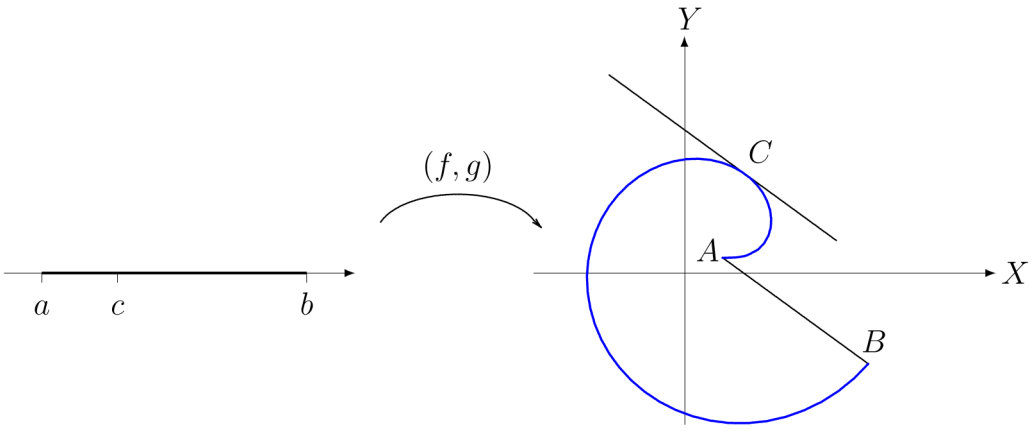
若 $f(b)-f(a)$ 及 $f'(p)$ 皆不爲 0, 則 (1) 式可寫爲

$$\frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)} = \frac{g'(p)}{f'(p)}, \tag{2}$$

左端乃表示點 $(f(a),g(a))$ (圖中點 A) 與 $(f(b),\, g(b))$ (圖中點 B) 連線之斜率, 而右端則等於

$$\frac{g'(p)}{f'(p)} = \frac{\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=p}}{\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=p}} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=p}$$

此即圖中曲線在點 C 切線之斜率, 換言之, 二直線平行, 如下圖所示.



附錄五

引理

設 I 爲一區間, $p \in I$, f 於 I 上爲 n 階可微, 則 $\lim\limits_{x\to p} f^{(n)}(c) = f^{(n)}(p)$. 其中 c 爲滿足系 4.4 之 ⁂ 式者. (注意：c 介於 p 與 x 之間, 因 x 而變.)

【證】若 f 於 I 上爲『n 階連續可微』, 則本系之結論至爲顯然, 但若僅知其爲『n 階可微』, 我們可證明如下：

對於 $x \in I \setminus \{p\}$, 由第四章系 4.4 知, 存在 $c \in (x,p)$ (或 (p,x)) 使得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(p) + f'(p)(x-p) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(p)}{(n-1)!}(x-p)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)(x-p)^k}{k!} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-p)^n. \end{aligned}$$

上式移項並利用 $n-1$ 次 l'Hospital 規則,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to p} f^{(n)}(c) &= \lim_{x\to p} \frac{f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)(x-p)^k}{k!}}{\frac{(x-p)^n}{n!}} \\ &= \lim_{x\to p} \frac{f'(x) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)(x-p)^{k-1}}{(k-1)!}}{\frac{(x-p)^{n-1}}{(n-1)!}} \\ &= \lim_{x\to p} \frac{f''(x) - \sum\limits_{k=2}^{n-1} \frac{f^{(k)}(p)(x-p)^{k-2}}{(k-2)!}}{\frac{(x-p)^{n-2}}{(n-2)!}} \\ &= \cdots \\ &= \lim_{x\to p} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(p)}{x-p} = f^{(n)}(p). \end{aligned}$$

附錄六　牛頓迭代法

定理一　[定點定理 **(fixed point theorem)**]

設函數 $g\colon [a,b]\to[a,b]$ 上爲連續, 且存在 $k\in[0,1)$ 使得 $|g'(x)|\le k$, 則

(1)　存在唯一 $r\in[a,b]$ 滿足方程式 $g(x)=x$.(參閱圖 A);

(2)　若令 $x_1\in[a,b]$, 且 $x_{n+1}=g(x_n),\ \forall n\in\mathbb{N}$, (參閱圖 B), 則

$$|x_n-r|\le k^{n-1}(b-a). \qquad (*)$$

【證】(1)　令 $\phi\colon [a,b]\to\mathbb{R}:\phi(x)=g(x)-x$, 則因 $\phi(b)\le 0\le\phi(a)$, 由 Bolzano 戡根定理知 , 存在 $r\in[a,b]$ 使得 $\phi(r)=0$; 又因

$$\phi'(x)=g'(x)-1<0,\ \forall x\in(a,b),$$

即 ϕ 爲一遞減函數. 是以上述 r 爲滿足方程式 $\phi(x)=0$ 之唯一解.

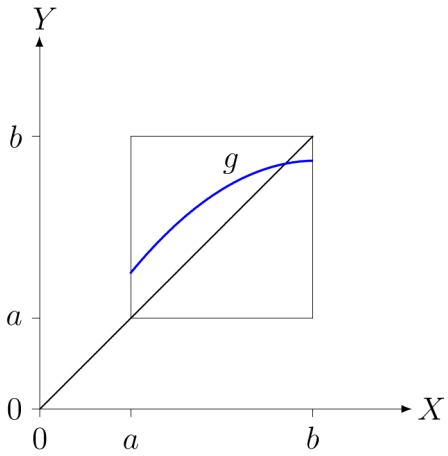


圖 A

(2)　利用數學歸納法證明如下 :

1°　當 $n=1$ 時, $(*)$ 式顯然爲眞.

2°　若 $n=m$ 時, $(*)$ 式爲眞, 往證 :

　　當 $n=m+1$ 時, $(*)$ 式亦爲眞.

若 $x_m=r$, 則 $x_{m+1}=g(x_m)=r$, $(*)$ 式顯然爲眞. 若 $x_m\ne r$, 利用微分均值定理 $\exists c_m\in(r,x_m)$ 或 (x_m,r) 使得

$$g(x_m)-g(r)=(x_m-r)g'(c_m),$$

故

$$\begin{aligned}|x_{m+1}-r|=|g(x_m)-g(r)|&\le k|x_m-r|\\&\le k^m(b-a).\end{aligned}$$

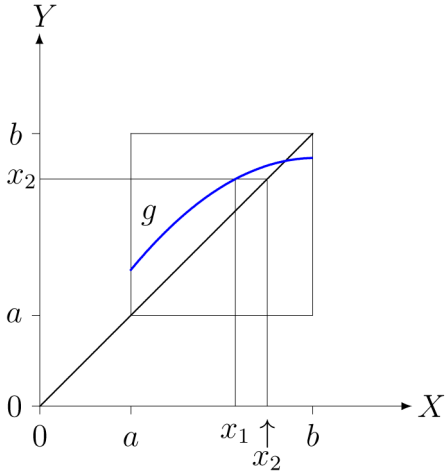


圖 B

定理二

設

(i) r 爲方程式 $g(x)=x$ 之一解 ;

(ii) 存在 $\delta>0$ 及 $k\in[0,1)$ 使得 $\forall\, x\in(r-\delta,r+\delta),\ |g'(x)|\le k$;

(iii) 令 $x_1\in(r-\delta,r+\delta)$, 且 $x_{n+1}=g(x_n),\ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

則 $|x_n-r|\le 2k^{n-1}\delta$.

【證】令 $I=[r-\delta,r+\delta]$, 利用定理一, 只需證明 : $g(I)\subset I$.

$$x\in I\setminus\{r\}\ \Rightarrow\ \exists\, c\in(x,\,r)\ (\text{或 }(r,\,x)),\ \text{使得 } g(x)-g(r)=(x-r)g'(c),$$

(微分均值定理)

$$\Rightarrow\ |g(x)-r|=|g(x)-g(r)|\le k|x-r|<|x-r|\le\delta.$$

$$\Rightarrow\ g(x)\in[r-\delta,r+\delta].$$

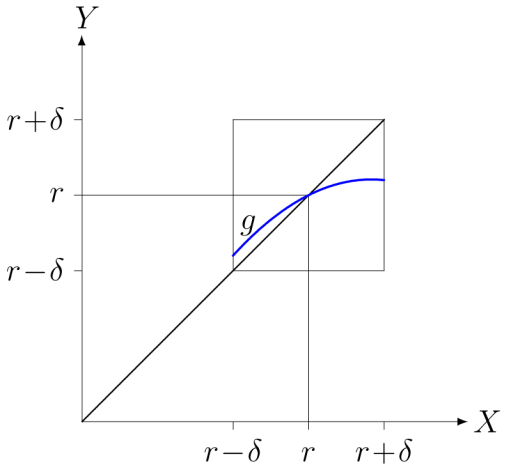


圖 C

定理三 (牛頓迭代法)

設

(i) r 爲方程式 $f(x)=0$ 之一解,

(ii) $f'(r)\neq 0$,

(iii) f'' 於點 r 爲連續,

則 $\forall\epsilon\in(0,1),\ \exists\,\delta>0,$ 使得 $\forall\, n\in\mathbb{N},\ |x_n-r|\le 2\epsilon^{n-1}\delta$. 其中

$$x_1\in(r-\delta,r+\delta),\ x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

【證】令 $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, 則

(i) r 爲方程式 $g(x) = x$ 之一解, 因爲 $g(r) = r - \dfrac{f(r)}{f'(r)} = r$.

(ii) 由於 $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$, 是以

f'' 於點 r 爲連續且 $f'(r) \neq 0$

$\Rightarrow$ g' 於點 r 爲連續

$\Rightarrow$ $\forall \epsilon$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\big(|x - r| < \delta \ \Rightarrow \ |g'(x) - g'(r)| < \epsilon\big)$

$\Rightarrow$ $\forall \epsilon$, $\exists \delta > 0$, 使得 $\big(x \in (r - \delta, r + \delta) \ \Rightarrow \ |g'(x)| \leq \epsilon\big)$, $(\because g'(r) = 0)$

(iii) $x_1 \in (r - \delta, r + \delta)$, 且 $x_{n+1} = g(x_n)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

利用定理二知, $|x_n - r| \leq 2\epsilon^{n-1}\delta$.

附錄七　l'Hospital 規則 II

定理

若

(i)　$\exists \delta > 0$, 使得 f, g 在 $(p,\, p+\delta)$ 爲 可微;

(ii)　$\lim\limits_{x\to p^+} |f(x)| = \lim\limits_{x\to p^+} |g(x)| = +\infty$;

(iii)　$\lim\limits_{x\to p^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$,　$(\, l \in \overline{\mathbb{R}}\,)$.

則 $\lim\limits_{x\to p^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

【證】爲方便計, 只討論 (ii) $\lim\limits_{x\to p^+} f(x) = \lim\limits_{x\to p^+} g(x) = +\infty$ 之情形, 且 (iii) $l \in \mathbb{R}$, 但 (i) 不變, 其餘情形讀者可自行推廣之.

1°　由 (iii) 知,

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ (\forall\, x)\Big(p < x < p+\delta \ \Rightarrow\ l - \epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \epsilon\Big). \qquad ①$$

2°　令 $x_0 = p + \delta/2$, $p < x < x_0$, 則由 Cauchy 均值定理知存在 $c \in (x, x_0)$ 使得

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

次令

$$F(x) = \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}.$$

顯然當 x_0 不動, 由於 $\lim\limits_{x\to p^+} F(x) = 1$, 存在 η, $0 < \eta < \delta/2$ 使得

$$\forall\, x \in (p,\, p+\eta)\ \Rightarrow\ F(x) > 0. \qquad ②$$

是以

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdot F(x). \qquad ③$$

3° 故

$$\begin{aligned}\forall\, x \in (p, p+\eta) \;&\Rightarrow\; \left[l-\epsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l+\epsilon \;\wedge\; F(x) > 0\right], (\because ①,\ ②) \\ &\Rightarrow\; \left[l-\epsilon < \frac{f'(c)}{g'(c)} < l+\epsilon \;\wedge\; F(x) > 0\right] \\ &\qquad\qquad (\because p < x < c < x_0 < p+\delta) \\ &\Rightarrow\; l-\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{F(x)} < l+\epsilon, \quad (\because ③)\end{aligned}$$

應有 $\lim\limits_{x\to p^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \dfrac{1}{F(x)} = l$, 故

$$\lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p^+} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{F(x)} \cdot F(x) = l.$$

附錄八 Riemann 上下積分之存在性

定理一

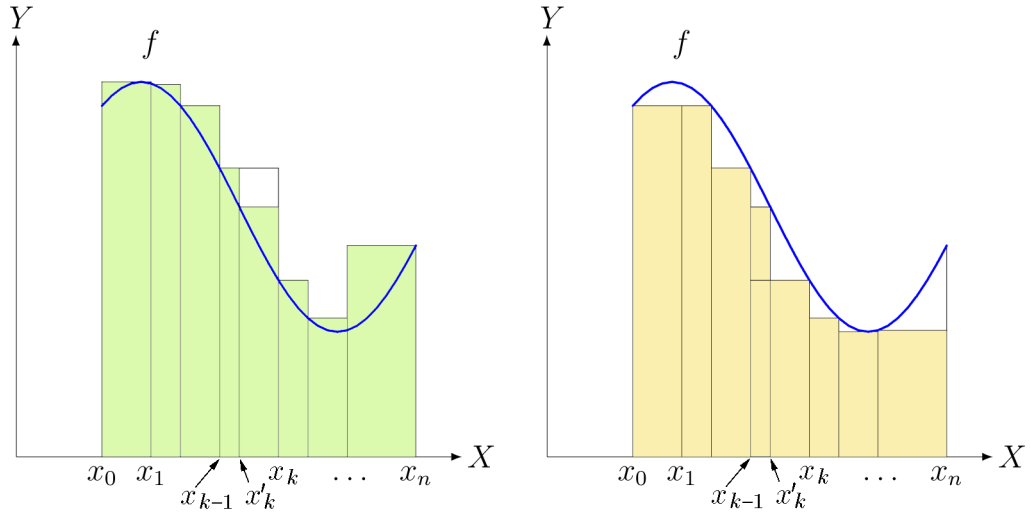
設 $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ 爲有界, P' 與 P'' 均爲 $[a,b]$ 之分割, 且 $P''\subset P'$ (我們稱 P' 較 P'' 爲細), 則

$$L(f,P'')\le L(f,P')\le U(f,P')\le U(f,P'').$$

(意即分割越細, 則下和數越大, 但上和數卻越小.)

【證】今僅就 P' 比 P'' 多出一點之情形證之, 其他情形可依歸納法證得. 設

$$P''=\{x_0,\cdots,x_{k-1},x_k,\cdots,x_n\},\quad P'=\{x_0,\cdots,x_{k-1},x'_k,x_k,\cdots,x_n\},$$



其中 $I_k=[x_{k-1},x_k]$ 被 x'_k 分成 $I'_k=[x_{k-1},x'_k]$ 及 $I''_k=[x'_k,x_k]$ 兩子區間. 當然

$$M(I'_k)\le M(I_k);\quad m(I'_k)\ge m(I_k);$$
$$M(I''_k)\le M(I_k);\quad m(I''_k)\ge m(I_k).$$

故

$$M(I'_k)(x'_k-x_{k-1})+M(I''_k)(x_k-x'_k)\le M(I_k)\Delta x_k;$$
$$m(I'_k)(x'_k-x_{k-1})+m(I''_k)(x_k-x'_k)\ge m(I_k)\Delta x_k.$$

然而在 $U(f,P')$ 及 $U(f,P'')$ 中之其他各項均相同, 在 $L(f,P')$ 及 $L(f,P'')$ 中之其他項亦相同, 故得

$$L(f,P'')\le L(f,P')\le U(f,P')\le U(f,P'').$$

定理二

設 $f\colon I=[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲有界, 則 f 在 I 上之上、下積分必存在.

【證】1° 先證：若 P' 與 P'' 爲 I 上二任意分割, 則 $L(f,P')\le U(f,P'')$. 爲此只需令 $P=P'\cup P''$, 則 P 較 P' 與 P'' 均爲細, 由定理一得知,

$$L(f,P')\le L(f,P)\le U(f,P)\le U(f,P'').$$

2° 其次考慮集合 $\{U(f,P)\mid P \text{ 爲 } I \text{ 之分割}\}$, 則由 1° 知任一下和數 $L(f,P)$ 均爲上述集合之一下界, 由實數系之完全性知此集合必有最大下界, 是以 f 在區間 I 之上積分 $\overline{\int_I} f$ 必存在. 下積分之存在性同理可證.

附錄九 Darboux 與 Riemann 講法之一致性

定理一

函數 f 在區間 $I=[a,b]$ 上爲 Rieamnn 可積之充要條件爲

$$\text{存在 } l\in\mathbb{R} \text{ 使得 } \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,T)=l.$$

此時, $\displaystyle\int_I f = l.$

【證】($\Rightarrow$) 假設 f 在 I 上爲可積. 對於任一 $\epsilon>0$, 應存在分割 $P_1,\ P_2$ 使得

$$\int_I f - L(f,P_1)<\epsilon \text{ 且 } U(f,P_2)-\int_I f<\epsilon.$$

若令 $P_\epsilon = P_1\cup P_2$. 則由附錄八定理二得

$$\int_I f - L(f,P_\epsilon)<\epsilon,\quad U(f,P_\epsilon)-\int_I f<\epsilon.$$

是以對於任意較 P_ϵ 爲細之分割 P, 則應有

$$\begin{aligned}-\epsilon < L(f,P_\epsilon)-\int_I f \le L(f,P)-\int_I f \le S(f,P,T)-\int_I f\\ \le U(f,P)-\int_I f \le U(f,P_\epsilon)-\int_I f<\epsilon.\end{aligned}$$

故證得 $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,T)=\int_I f.$

($\Leftarrow$) 設 $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P,T)=l$, 則 $\forall\epsilon>0$, 存在分割 P_ϵ 使得當

$$P_\epsilon\subset P,\ \forall T=\{t_1,\cdots,t_n\}, t_k\in I_k \Rightarrow |S(f,P,T)-l|<\frac{\epsilon}{2}.$$

今若取 $T'=\{t_1',\cdots,t_n'\}$ 及 $T''=\{t_1'',\cdots,t_n''\}$, 以使

$$M(I_k)-f(t_k')<\frac{\epsilon}{2(b-a)},$$

且

$$f(t_k'')-m(I_k)<\frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

則

$$U(f,P)-S(f,P,T')=\sum_{k=1}^{n}(M(I_k)-f(t_k'))\Delta x_k<\frac{\epsilon}{2},$$

且

$$S(f,P,T'')-L(f,P)=\sum_{k=1}^{n}(f(t_k'')-m(I_k))\Delta x_k<\frac{\epsilon}{2},$$

於是可得

$$\bar{\int_I} f-l\le U(f,P)-l=U(f,P)-S(f,P,T')+S(f,P,T')-l<\epsilon,$$

且

$$l-\underline{\int_I} f\le l-L(f,P)=l-S(f,P,T'')+S(f,P,T'')-L(f,P)<\epsilon.$$

故 $\bar{\int_I} f=\underline{\int_I} f$, 亦即

$$\lim_{\|P\|\to 0}S(f,P,T)=l=\int_I f.$$

定理二

(1) 設 $f\colon I=[a,b]\to\mathbb{R}$ 爲有界, 則

$$\bar{\int_a^b} f=\lim_{n\to+\infty}U(f,P_n),\quad \underline{\int_a^b} f=\lim_{n\to+\infty}L(f,P_n).$$

(2) 若 f 在 $I=[a,b]$ 上爲 Riemann 可積, 則 $\int_a^b f=\lim_{n\to+\infty}S(f,P_n,T_n)$. 其中 P_n 爲 $[a,b]$ 上一正則分割, T_n 爲一固定取法.

【證】(1) 只證 $\bar{\int_a^b} f=\lim_{n\to+\infty}U(f,P_n)$. 下積分之部分同理.

由上積分之定義知, $\forall\epsilon>0$, 存在分割 $P^*=\{y_0,y_1,\cdots,y_r\}$, 使得

$$0\le U(f,P^*)-\bar{\int_a^b} f<\frac{\epsilon}{2}. \qquad ①$$

令 $M=\sup\{|f(x)|\mid x\in[a,b]\}$ 及自然數 $n_0>\dfrac{4Mr(b-a)}{\epsilon}$, 則當 $n>n_0$ 時, 吾人只需證明 $0\le U(f,P_n)-\bar{\int_a^b} f<\epsilon$ 即可. 設

$$A=\{k\mid 1\le k\le n \text{ 且開區間 } (x_{k-1},x_k) \text{ 內含有某 } y_j\},$$
$$B=\{k\mid 1\le k\le n \text{ 且開區間 } (x_{k-1},x_k) \text{ 內不含任何 } y_j\}.$$

(i) 若 $k\in A$, 則 $U(f,P_n)-U(f,P^*)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上之部分應小於或等於 $2M\Delta x_k$;

(ii) 若 $k \in B$, 則 $U(f,P_n) - U(f,P^*)$ 在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上之部分應不大於 0. 是以

$$\begin{aligned} U(f,P_n) - U(f,P^*) &\le \sum_{k\in A} 2M\Delta x_k \\ &< 2rM\Delta x_k, \quad (\text{因 } A \text{ 中至多有 } r-1 \text{ 個元素}) \\ &= \frac{2rM(b-a)}{n} < \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned} \tag{②}$$

① 及 ② 兩式相加得

$$0 \le U(f,P_n) - \bar{\int_a^b} f < \epsilon.$$

(2) 由原設知, f 在 $[a,b]$ 上爲可積, 故 $\bar{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$, 即

$$\lim_{n\to+\infty} U(f,P_n) = \lim_{n\to+\infty} L(f,P_n) = \int_a^b f.$$

此外, 我們已知, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$L(f,P_n) \le S(f,P_n,T_n) \le U(f,P_n),$$

利用三明治原理可得,

$$\lim_{n\to+\infty} S(f,P_n,T_n) = \int_a^b f.$$

定理三

若 f 在區間 $I=[a,b]$ 上爲可積, 若函數 ϕ 在包含 R_f 之區間 $[m,M]$ 上爲連續, 則 $h = \phi \circ f$ 爲可積.

【證】因 ϕ 在 $[m,M]$ 爲連續, 故亦必爲均勻連續. 於是

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta \in (0,\epsilon) \text{ 使得 } (\forall x,\ y \in [m,M])\Big(|x-y| < \delta \ \Rightarrow\ |\phi(x) - \phi(y)| < \epsilon\Big).$$

因 f 在 I 上爲可積, 故存在一分割 P 使得 $U(f,P) - L(f,P) < \delta^2$, 令

$$\begin{aligned} M(I_k) &= \sup\{f(x) \mid x \in I_k\}, \\ m(I_k) &= \inf\{f(x) \mid x \in I_k\}, \\ M^*(I_k) &= \sup\{h(x) \mid x \in I_k\}, \\ m^*(I_k) &= \inf\{h(x) \mid x \in I_k\}; \end{aligned}$$

又

$$K = \sup\big\{|\phi(t)|\,\big|\,m \le t \le M\big\},$$
$$A = \{k \mid 1 \le k \le n,\ M(I_k) - m(I_k) < \delta\},$$
$$B = \{k \mid 1 \le k \le n,\ M(I_k) - m(I_k) \ge \delta\}.$$

因此,

$$\begin{aligned}
&U(f,P) - L(f,P) < \delta^2 \\
&\quad\Rightarrow\ \delta \sum_{k\in B} \Delta x_k \le \sum_{k\in B} [M(I_k) - m(I_k)]\Delta x_k \le U(f,P) - L(f,P) < \delta^2 \\
&\quad\Rightarrow\ \sum_{k\in B} \Delta x_k < \delta \\
&\quad\Rightarrow\ U(h,P) - L(h,P) \\
&\qquad\qquad < \sum_{k\in A} [M^*(I_k) - m^*(I_k)]\Delta x_k + \sum_{k\in B} [M^*(I_k) - m^*(I_k)]\Delta x_k \\
&\qquad\qquad \le \epsilon(b-a) + 2K\delta < \epsilon[(b-a) + 2K]. \\
&\quad\Rightarrow\ h \text{ 在 } [a,b] \text{ 上爲可積.}
\end{aligned}$$

定理四 （**Bliss 定理**）

若函數 f 在區間 $I = [a,b]$ 爲連續, g 在 I 上爲可積, 且 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 爲 I 之一正則分割,

$$T = \{t_1, \cdots, t_n\},\quad T' = \{t'_1, \cdots, t'_n\}$$

爲二取點集合, 即 $t_k,\ t'_k \in [x_{k-1}, x_k],\ \forall k = 1, \ldots, n$, 則

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t'_k) g(t_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

【證】1° 令

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t'_k) g(t_k) \Delta x_k,\quad S_n^* = S(fg, P_n, T_n) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) g(t_k) \Delta x_k.$$

先證 : $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n^* - S_n) = 0$. 首先, 因 g 在 $[a,b]$ 上爲可積, 因此爲有界, 故存在 $M > 0$ 使得 $\forall x \in [a,b],\ |g(x)| < M$. 其次, 因 f 在緊緻區間 $[a,b]$ 上爲連續, 故爲均勻連續性, 是以

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ 使得 } (\forall x,\ y \in [a,b])\Big(|x-y| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{M(b-a)}\Big),$$

若取自然數 $n_0 > \dfrac{b-a}{\delta}$, 則當 $n \geq n_0$ 時, $|t'_k - t_k| \leq \Delta x_k = \dfrac{b-a}{n} < \delta$, 是以

$$\begin{aligned} |S_n - S_n^*| &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(t'_k) - f(t_k)| \cdot |g(t_k)| \, \Delta x_k \\ &< \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{M(b-a)} \cdot M \, \Delta x_k = \epsilon. \end{aligned}$$

2° 其次,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t'_k) g(t_k) \Delta x_k &= \lim_{n\to+\infty} S_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} (S_n - S_n^* + S_n^*) \\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n^* = \lim_{n\to+\infty} S(fg, P_n, T_n) \\ &= \int_a^b f(x) g(x) \, dx, \quad (\text{因 } f, g \text{ 皆爲可積}). \end{aligned}$$

附錄十　絕對收斂與重排

定理

設級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 爲絕對收斂並設其和爲 s, 則級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 之任一重排亦爲絕對收斂, 且其和爲 s.

【證】設級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 爲級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 之一重排.

1° 當級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 的各項均爲非負實數, 則級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 的各項亦當爲非負實數.

(1) 令 $\{t_k\}_k$ 表級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 的部分和序列, 則由 $b_n \geq 0$ 知 $\{t_k\}_k$ 爲一單調不減序列.

(2) 對某一自然數 k, 我們恆可選取足夠大的另一自然數 h_k, 使得每一 b_i $(i \leq k)$ 即爲某一 a_j $(j \leq h_k)$. 亦即當 $k \in \mathbb{N}$ 時,

$$t_k \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_{h_k} \leq s.$$

此說明 $\{t_k\}_k$ 爲有界.

(3) 故知 $\{t_k\}_k$ 爲收斂, 且 $m = \lim_{n\to+\infty} t_k \leq s$.

(4) 但因級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 亦可視爲級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 之一重排, 故當有 $s \leq m$. 因而證得當 $a_n \geq 0$ 時, 級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 爲絕對收斂, 且其和等於 s.

2° 當級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 中含有負項.

(1) 由於 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 爲收斂, 而級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ 爲 $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ 的一重排, 則由 1° 知級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ 爲收斂. 此即證得級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 爲絕對收斂.

(2) 令 $u_n = \dfrac{|a_n| + a_n}{2}$, $v_n = \dfrac{|a_n| - a_n}{2}$, 則由 $0 < u_n \leq |a_n|$, $0 < v_n \leq |a_n|$ 知, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ 與 $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ 均爲收斂級數.

設級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 的和分別爲 u 與 v, 則由

$$a_n = \frac{|a_n| + a_n}{2} - \frac{|a_n| - a_n}{2},$$

知, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = u - v$, 即得 $u - v = s$.

(3) 由於級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n| + b_n}{2}$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n| - b_n}{2}$ 分別爲級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ 與 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n$ 的重排, 且 $u_n \geq 0,\ v_n \geq 0$, 故由 1° 知

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n| + b_n}{2} = u \text{ 且 } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n| - b_n}{2} = v.$$

但

$$b_n = \frac{|b_n| + b_n}{2} - \frac{|b_n| - b_n}{2},$$

故知

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n| + b_n}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|b_n| - b_n}{2} = u - v = s.$$

則證得級數 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收斂 s.

附錄十一 冪級數與收斂範圍

定理

設 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 爲一冪級數, 則以下三情形恰有其一成立 :

(1) 此冪級數僅於 $x=p$ 一點爲收斂;

(2) 此冪級數於 $\mathbb{R}$ 上每一點均爲收斂;

(3) 存在一正數 r, 使得此冪級數於區間 $(p-r, p+r)$ 爲絕對收斂, 而於集合 $(-\infty, p-r)\cup(p+r, +\infty)$ 則爲發散.

【證】

I. 先證 : 若此冪級數於點 $x_1 \neq p$ 爲收斂, 則此冪級數於區間

$$I_c = (p-|x_1-p|, p+|x_1-p|)$$

上每點均爲絕對收斂.

因 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x_1-p)^n$ 爲收斂, 故應存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得當 $n > n_0$ 時, $|c_n(x_1-p)^n| < 1$. 由是當 $n > n_0$ 時, 我們有

$$\begin{aligned} |c_n(x-p)^n| &= |c_n(x_1-p)^n|\Big|\frac{(x-p)^n}{(x_1-p)^n}\Big|, \quad (\because x_1 \neq p) \\ &\leq \Big|\frac{(x-p)^n}{(x_1-p)^n}\Big| = \Big(\frac{|x-p|}{|x_1-p|}\Big)^n. \end{aligned}$$

若 $x \in I_c$, 則 $\dfrac{|x-p|}{|x_1-p|} < 1$, 即得知 $\sum_{n=0}^{+\infty}\Big|\dfrac{x-p}{x_1-p}\Big|^n$ 爲收斂的幾何級數, 故由比較審斂法知 $\sum_{n=0}^{+\infty}|c_n(x-p)^n|$ 爲收斂, 亦即冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 爲絕對收斂.

II. 其次,

(甲) 先證定理中之 (1), (2), (3) 三者之中至少有一成立.

假設 (1) 與 (2) 之情況不成立, 今證 (3) 必成立, 設有 $x_1 \neq p$ 使級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x_1-p)^n$ 爲收斂, 而 $x_2 \in \mathbb{R}$ 使級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x_2-p)^n$ 爲發散. 令

$$A = \Big\{|x-p| \;\Big|\; \text{級數} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n \text{ 爲收斂}\Big\}.$$

則 $|x_1-p| \in A$, 因 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x_1-p)^n$ 爲收斂, 但 $|x_2-p| \notin A$, 因級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x_2-p)^n$ 爲發散. 又 $|x_2-p|$ 爲 A 之一上界, 因若有 $|x_0-p| \in A$ 且 $|x_2-p| < |x_0-p|$, 則由 1° 知級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x_2-p)^n$ 爲收斂, 乃與假設相矛盾. A 既有上界, 由實數系之完全性知 A 必有最小上界, 設 $r = \sup A$, 今證 r 即爲 (3) 中所述之 r.

1° A 中至少有一正數 $|x_1-p|$, 故 $r = \sup A$ 必爲正數.

2° 若 $x \in (p-r, p+r)$, 則 $|x-p| < r = \sup A$. 故應有 $|y-p| \in A$ 使 $|x-p| < |y-p|$. 因 $|y-p| \in A$, 故級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(y-p)^n$ 爲收斂. 但由 1° 知, 冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 亦應爲絕對收斂.

3° 若 $x \in (-\infty, p-r) \cup (p+r, +\infty)$, 則 $|x-p| > r$. 若 $|x-p| \in A$, 則 r 不復爲 A 之上界, 此乃違反 r 之定義, 是爲不可能. 故 $|x-p| \notin A$, 即冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 爲發散.

(乙) 三者之中至多有一成立之事實甚爲顯然. [即 (1) 與 (2) 同時成立; (2) 與 (3) 同時成立; 及 (3) 與 (1) 同時成立均爲不可能].

附錄十二　冪級數之微分與積分

定理一

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 之收斂半徑爲 r, 則冪級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(x-p)^{n-1}$ 之收斂半徑亦爲 r.

【證】我們只證當 $r\in(0,+\infty)$ 之情形, 至於 $r=0$ 及 $r=+\infty$ 之情形, 讀者自證之. 設 r' 爲冪級數 $\sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(x-p)^{n-1}$ 的收斂半徑.

1° 先證 $r\le r'$.

設 x 爲開區間 $(p-r,p+r)$ 上的任一點, 則有 $0\le|x-p|<r$, 是以可取一點 x_1 使得

$$|x-p|<|x_1-p|<r,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x_1-p)^n \text{ 爲收斂} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} c_n(x_1-p)^n=0$$

$$\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ 使得 } \forall n>n_0 \Rightarrow |c_n(x_1-p)^n|<1$$

$$\Rightarrow |nc_n(x-p)^{n-1}|=\left|nc_n\frac{(x-p)^{n-1}}{(x_1-p)^n}\cdot(x_1-p)^n\right|, \quad (\text{因 } |x_1-p|>0)$$

$$=n\frac{|c_n(x_1-p)^n|}{|x_1-p|}\left|\frac{x-p}{x_1-p}\right|^{n-1}$$

$$\le\frac{1}{|x_1-p|}\left(n\left|\frac{x-p}{x_1-p}\right|^{n-1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n(x-p)^{n-1} \text{ 爲絕對收斂, (理由見 †)}$$

$$\Rightarrow r'\le r, \quad [\because x\in(p-r,p+r)]$$

---

† 只需證 $\sum_{n=1}^{+\infty} n\left|\frac{x-p}{x_1-p}\right|^{n-1}$ 爲收斂, 爲此利用比值審斂法, 令此級數之第 n 項爲 a_n, 則

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)|x-p|^n}{|x_1-p|^n}\cdot\frac{|x_1-p|^{n-1}}{n|x-p|^{n-1}}$$

$$=\left|\frac{x-p}{x_1-p}\right|\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{|x-p|}{|x_1-p|}<1.$$

2° 次證 $r \geq r'$, 我們將利用矛盾證法 :

$$\begin{aligned} r < r' \ &\Rightarrow\ \exists t \ \text{使得} \ \ r < |t-p| < r' \\ &\Rightarrow\ \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (t-p)^n \ \text{爲發散} \end{aligned} \tag{1}$$

又, 當 $n > |t-p|$ 時,

$$|c_n(t-p)^n| = |nc_n(t-p)^{n-1}| \cdot \left|\frac{t-p}{n}\right| \leq |nc_n(t-p)^{n-1}|,$$

此乃說明級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(t-p)^n$ 爲收斂, 故與 (1) 相矛盾.

定理二

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 之收斂半徑 r 爲正或 $+\infty$, 若函數

$$f : (p-r, p+r) \to \mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-p)^n \ .$$

則 f 爲可微分, 且

$$\forall x \in (p-r, p+r), \ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nc_n (x-p)^{n-1} \ .$$

【證】設 x 與 b 爲 $(p-r, p+r)$ 中二任意相異數, 利用 Taylor 公式可得

$$(x-p)^n = (b-p)^n + n(b-p)^{n-1}(x-b) + \frac{n(n-1)}{2!}(\xi_n - p)^{n-2}(x-b)^2,$$

內 ξ_n 介於 b 與 x 之間, 而 n 爲一正整數, 由 f 之定義可知,

$$\begin{aligned} f(x) - f(b) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (x-p)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (b-p)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (x-p)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (b-p)^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n [(x-p)^n - (b-p)^n], \quad (\text{線性性質}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \left[n(b-p)^{n-1}(x-b) + \frac{n(n-1)}{2!}(\xi_n - p)^{n-2}(x-b)^2 \right] \end{aligned}$$

因假設 $x \neq b$,

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\frac{1}{x-b}\sum_{n=1}^{+\infty}c_n\Big[n(b-p)^{n-1}(x-b)+\frac{n(n-1)}{2!}(\xi_n-p)^{n-2}(x-b)^2\Big]$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}nc_n(b-p)^{n-1}+\frac{x-b}{2!}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_n(\xi_n-p)^{n-2},\qquad(*)$$

因 b 在 $(p-r,p+r)$ 中, 故由定理一知, 級數 $\sum_{n=1}^{+\infty}nc_n(b-p)^{n-1}$ 爲絕對收斂. 又因 b 與 x 均在開區間 $(p-r,p+r)$ 中, 故必存在某正數 k 使得 $|b-p|<k<r$ 且 $|x-p|<k<r$. 由定理一知級數 $\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_nk^{n-2}$ 爲絕對收斂.

由於 $|n(n-1)c_n(\xi_n-p)^{n-2}|<|n(n-1)c_nk^{n-2}|$, (因 ξ_n 介於 b 與 x 間), 故知級數 $\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_n(\xi_n-p)^{n-2}$ 爲絕對收斂, 而

$$\Big|\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_n(\xi_n-p)^{n-2}\Big|\le\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)|c_n||\xi_n-p|^{n-2}.$$

由 $(*)$ 得

$$\Big|\frac{f(x)-f(b)}{x-b}-\sum_{n=1}^{+\infty}nc_n(b-p)^{n-1}\Big|$$
$$=\Big|\frac{x-b}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_n(\xi_n-p)^{n-2}\Big|$$
$$\le\frac{|x-b|}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)|c_n||\xi_n-p|^{n-2}$$
$$\le\frac{|x-b|}{2}\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)|c_n|k^{n-2},\quad(\text{其中 }0<k<r)$$

由於級數 $\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)c_nk^{n-2}$ 爲絕對收斂, 且 $\lim_{x\to b}\frac{|x-b|}{2}=0$. 故

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\sum_{n=1}^{+\infty}nc_n(b-p)^{n-1},$$

亦即 $f'(b)=\sum_{n=1}^{+\infty}nc_n(b-p)^{n-1}$. 而 b 爲 $(p-r,\,p+r)$ 中任意一點, 故證得 f 於 $(p-r,\,p+r)$ 上爲可微分, 且

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}nc_n(x-p)^{n-1}.$$

定理三

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 之收斂半徑 r 爲正或 $+\infty$, 若函數

$$f\colon (p-r,p+r)\to\mathbb{R}\colon f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n\ .$$

則冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 恰爲 f 在點 p 之 Taylor 級數. (即 f 在點 p 爲解析).

【證】由定理二知, $\forall x\in(p-r,p+r)$,

$$f'(x)=c_1+2c_2(x-p)+3c_3(x-p)^2+4c_4(x-p)^3+\cdots+nc_n(x-p)^{n-1}+\cdots\ ,$$

由定理一知上式右邊冪級數的收斂半徑仍爲 r. 再微分一次則得,

$$f''(x)=2c_2+2\cdot 3c_3(x-p)+3\cdot 4c_4(x-p)^2+\cdots+(n-1)nc_n(x-p)^{n-2}+\cdots\ ,$$

同理可得,

$$f'''(x)=2\cdot 3\cdot c_3+2\cdot 3\cdot 4\cdot c_4(x-p)+\cdots+(n-2)(n-1)nc_n(x-p)^{n-3}+\cdots\ ,$$
$$f^{(4)}(x)=2\cdot 3\cdot 4\cdot c_4+\cdots+(n-3)(n-2)(n-1)nc_n(x-p)^{n-4}+\cdots\ ,$$
$$\vdots$$

令 $x=p$, 得

$$f(p)=c_0,\ f'(p)=c_1,\ f''(p)=2!c_2,\ f'''(p)=3!c_3,\cdots,\ f^{(n)}(p)=n!c_n,\ \cdots\ ,$$

亦即, $c_n=\dfrac{f^{(n)}(p)}{n!}$, 故 $\forall x\in(p-r,p+r)$,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(p)}{n!}(x-p)^n\ .$$

即 f 在點 p 爲解析.

定理四

設冪級數 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n$ 之收斂半徑 r 爲正或 $+\infty$, 若函數

$$f\colon (p-r,\,p+r)\to\mathbb{R}\colon f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(x-p)^n\ .$$

則 $\forall x\in(p-r,\,p+r)$, f 在區間 $[p,\,x]$ 爲可積, 且

$$\int_p^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-p)^{n+1}\ .$$

【證】設函數

$$g\colon (p-r',p+r')\to\mathbb{R}:g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-p)^{n+1},$$

由於 r' 爲冪級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}c_n(x-p)^{n+1}$ 之收斂半徑, 按定理一知, 其各項之導函數所組成之冪級數 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x-p)^n$ 之收斂半徑 r 應等於 r'. 故函數 g 實爲

$$g\colon (p-r,p+r)\to\mathbb{R}:g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_n}{n+1}(x-p)^{n+1},$$

再由定理二知, $\forall x\in(p-r,p+r)$,

$$g'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(x-p)^n=f(x).$$

又 g' 爲可微分, 故 g' 爲連續. 是以由微積分基本定理可得

$$\int_p^x f(t)\,dt=\int_p^x g'(t)\,dt=g(t)\Big|_p^x=g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}c_n(x-p)^{n+1}.$$

附錄十三　多變數連鎖律之一

定理

設 $A,\ B\subset\mathbb{R}^2$, 且滿足

(i)　$\mathbf{f}\colon A\to B$ 之二分量函數 f_1 及 f_2 在 $N_\delta(\mathbf{p})$ 上爲可偏微分 ;

(ii)　$g\colon B\to\mathbb{R}$ 在 $N_\epsilon(\mathbf{q})$, (內 $\mathbf{q}=\mathbf{f}(\mathbf{p})$), 上爲連續可偏微分.

則合成函數

$$F=g\circ\mathbf{f}\colon A\to\mathbb{R}:F(u,v)=g(f_1(u,v),f_2(u,v))$$

於點 $\mathbf{p}$ 爲可偏微分, 且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{p})=\dfrac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{q})\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial u}(\mathbf{p})+\dfrac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{q})\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial u}(\mathbf{p}),\\ \dfrac{\partial F}{\partial v}(\mathbf{p})=\dfrac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{q})\cdot\dfrac{\partial f_1}{\partial v}(\mathbf{p})+\dfrac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{q})\cdot\dfrac{\partial f_2}{\partial v}(\mathbf{p}).\end{cases}$$

【證】只證 $\dfrac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{p})$ 部分, 第二公式同理.

設 $\mathbf{p}=(p_1,p_2),\ \mathbf{q}=(q_1,q_2)$, 其中 $q_1=f_1(p_1,p_2),\ q_2=f_2(p_1,p_2)$, 並設

$$\Delta x=f_1(p_1+h,p_2)-f_1(p_1,p_2),\quad \Delta y=f_2(p_1+h,p_2)-f_2(p_1,p_2),$$

則

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u}(\mathbf{p})&=\lim_{h\to0}\frac{F(p_1+h,p_2)-F(p_1,p_2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{g(f_1(p_1+h,p_2),f_2(p_1+h,p_2))-g(f_1(p_1,p_2),f_2(p_1,p_2))}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{g(q_1+\Delta x,q_2+\Delta y)-g(q_1,q_2)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{g(q_1+\Delta x,q_2+\Delta y)-g(q_1,q_2+\Delta y)}{h}\\&\qquad+\lim_{h\to0}\frac{g(q_1,q_2+\Delta y)-g(q_1,q_2)}{h}=(*)\end{aligned}\tag{1}$$

今令

$$\phi(h)=\begin{cases}\dfrac{g(q_1+\Delta x,q_2+\Delta y)-g(q_1,q_2+\Delta y)}{\Delta x}-\dfrac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{q}), & \text{若 }\Delta x\neq0,\\ 0, & \text{若 }\Delta x=0,\end{cases}$$

$$\psi(h)=\begin{cases}\dfrac{g(q_1,q_2+\Delta y)-g(q_1,q_2)}{\Delta y}-\dfrac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{q}), & \text{若}\Delta y\neq0,\\ 0, & \text{若}\Delta y=0,\end{cases}$$

則不論 Δx 與 Δy 是否爲 0, 皆可得

$$g(q_1+\Delta x, q_2+\Delta y) - g(q_1, q_2+\Delta y) = \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{q})\Delta x + \phi(h)\Delta x;$$
$$g(q_1, q_2+\Delta y) - g(q_1, q_2) = \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{q})\Delta y + \psi(h)\Delta y;$$

故 (1) 式之右端變爲

$$\begin{aligned}(*) &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{q})\cdot\frac{\Delta x}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{q})\cdot\frac{\Delta y}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\phi(h)\cdot\frac{\Delta x}{h}\right] + \lim_{h\to 0}\left[\psi(h)\cdot\frac{\Delta y}{h}\right] \\ &= \frac{\partial g}{\partial x}(\mathbf{q})\cdot\frac{\partial f_1}{\partial u}(\mathbf{p}) + \frac{\partial g}{\partial y}(\mathbf{q})\cdot\frac{\partial f_2}{\partial u}(\mathbf{p}), \quad [\text{理由見 } (\dagger)]\end{aligned}$$

(†) 由於 $D_1 g$ 在 $N_\epsilon(\mathbf{q})$ 爲連續, 是以 $\lim_{h\to 0}\phi(h) = 0$, $\lim_{h\to 0}\psi(h) = 0$, 其次,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_1(p_1+h, p_2) - f_1(p_1, p_2)}{h} = \frac{\partial f_1}{\partial u}(\mathbf{p}),$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_2(p_1+h, p_2) - f_2(p_1, p_2)}{h} = \frac{\partial f_2}{\partial u}(\mathbf{p}).$$

附錄十四　多變數函數之可微性與方向導數

定理

設 f 爲一 n 變數函數, $\mathbf{p}\in \overset{\circ}{D}_f$, 則 I $\Rightarrow$ II $\Rightarrow$ III, 其中

I. $\forall j=1,\cdots,n,\ D_jf$ 在點 $\mathbf{p}$ 之一鄰近 $N(\mathbf{p})$ 爲連續 ;

II. f 在點 $\mathbf{p}$ 爲可微 ;

III. f 在點 $\mathbf{p}$ 沿向量 $\mathbf{v}$ 之方向導數爲

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})=v_1D_1f(\mathbf{p})+\cdots+v_nD_nf(\mathbf{p})=\mathbf{v}\cdot\nabla f(\mathbf{p}).$$

【證】只證 $n=2$ 之情形.

I $\Rightarrow$ II　設 $h_1,\ h_2$ 均爲非零實數並使 $\mathbf{p}+\mathbf{h}=(p_1+h_1,\,p_2+h_2)\in N(\mathbf{p})$, 則

$$\begin{aligned}f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-f(\mathbf{p})&=f(p_1+h_1,p_2+h_2)-f(p_1,p_2)\\&=[f(p_1+h_1,p_2+h_2)-f(p_1+h_1,p_2)]+[f(p_1+h_1,p_2)-f(p_1,p_2)]\\&=h_2D_2f(p_1+h_1,y)+h_1D_1f(x,p_2)\,,\quad[\text{理由見 (‡)}]\\&=h_2[D_2f(p_1,p_2)+o(1)]+h_1[D_1f(p_1,p_2)+o(1)],\\&\qquad(\because\ D_jf\text{ 在點 }\mathbf{p}\text{ 之一鄰近 }N(\mathbf{p})\text{ 爲連續})\end{aligned}$$

其中 $o(1)$ 表極限爲 0 之一項, (參閱第四章之始), 是以

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{f(\mathbf{p}+\mathbf{h})-\big[f(\mathbf{p})+h_1D_1f(\mathbf{p})+h_2D_2f(\mathbf{p})\big]}{|\mathbf{h}|}=\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{h_1\cdot o(1)+h_2\cdot o(1)}{|\mathbf{h}|}=0.$$

是以知 f 在點 $\mathbf{p}$ 爲可微.

(‡)　前後二項分別利用微分均值定理, 其中 x 介於 p_1 與 p_1+h_1 之間, y 介於 p_2 與 p_2+h_2 之間.

II $\Rightarrow$ III　f 在點 $\mathbf{p}$ 沿方向 $\mathbf{v}$ 方向導數爲

$$\begin{aligned}D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{p})&=\lim_{h\to0}\frac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{v})-f(\mathbf{p})}{h}\\&=\lim_{h\to0}\Big(\frac{f(\mathbf{p}+h\mathbf{v})-[f(\mathbf{p})+hv_1D_1f(\mathbf{p})+hv_2D_2f(\mathbf{p})]}{h}\\&\qquad+\frac{hv_1D_1f(\mathbf{p})+hv_2D_2f(\mathbf{p})}{h}\Big)\\&=0+\lim_{h\to0}(v_1D_1f(\mathbf{p})+v_2D_2f(\mathbf{p}))\\&=v_1D_1f(\mathbf{p})+v_2D_2f(\mathbf{p}).\end{aligned}$$

附錄十五　推廣之 Taylor 定理及判別極值之定理

定理一　(推廣之 Taylor 定理)

設 f 在 $N_\epsilon(\mathbf{p})$ 上爲 n 階連續可偏微, 對於 $\mathbf{x}\in N_\epsilon(\mathbf{p})$, $\exists\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{p})+\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(\mathbf{p})}{1!}+\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(\mathbf{p})}{2!}+\cdots+\frac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1}f(\mathbf{p})}{(n-1)!}+R_n(\mathbf{x}),$$

其中 $R_n(\mathbf{x})=\dfrac{\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(\mathbf{p}+\theta\mathbf{h})}{n!}$, $\mathbf{h}=\mathbf{x}-\mathbf{p}=(h,k)$,

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^mf(\mathbf{p})=\sum_{j=0}^m\binom{m}{j}h^jk^{m-j}\frac{\partial^mf(\mathbf{p})}{\partial x^j\partial y^{m-j}}.$$

【證】設函數 $F\colon[0,1]\to\mathbb{R}:F(t)=f(\mathbf{p}+t\mathbf{h})=f(p_1+th,\,p_2+tk)$, 由第十章連鎖律之二知 F 在 [0,1] 爲 n 階可微分. 由第四章之 Taylor 定理知, 存在 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$F(1)=F(0)+F'(0)+\cdots+\frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{F^{(n)}(\theta)}{n!},$$

今所須證明者只有

$$F^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^mf(\mathbf{p}),\ \forall\,m\in\{0,1,\cdots,n-1\},$$

及

$$F^{(n)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(\mathbf{p}+\theta\mathbf{h}).$$

由第十章連鎖律之二得

$$F'(t)=h\frac{\partial f(\mathbf{p}+t\mathbf{h})}{\partial x}+k\frac{\partial f(\mathbf{p}+t\mathbf{h})}{\partial y},$$

故

$$F'(0)=h\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial x}+k\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial y}=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(\mathbf{p}).$$

又

$$\begin{aligned}F''(t) &= h\Big(h\frac{\partial^2 f(\mathbf{p}+t\mathbf{h})}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 f(\mathbf{p}+t\mathbf{h})}{\partial x\partial y}\Big) \\ &\qquad + k\Big(h\frac{\partial^2 f(\mathbf{p}+t\mathbf{h})}{\partial x\partial y} + k\frac{\partial^2 f(\mathbf{p}+t\mathbf{h})}{\partial y^2}\Big) \\ &= h^2\frac{\partial^2 f(\mathbf{p}+t\mathbf{h})}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2 f(\mathbf{p}+t\mathbf{h})}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2 f(\mathbf{p}+t\mathbf{h})}{\partial y^2} \\ &= \Big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f(\mathbf{p}+t\mathbf{h}).\end{aligned}$$

故

$$F''(0) = \Big(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\Big)^2 f(\mathbf{p}).$$

其餘部分之證明, 只須使用歸納法即可得證.

定理二 (判斷極值之定理)

設

(i) f 在 $N_\delta(\mathbf{p})$ 上爲二階連續可偏微 ;

(ii) $D_1 f(\mathbf{p}) = D_2 f(\mathbf{p}) = 0$;

(iii) $\Delta(\mathbf{p}) = \begin{vmatrix} D_{11}f(\mathbf{p}) & D_{12}f(\mathbf{p}) \\ D_{21}f(\mathbf{p}) & D_{22}f(\mathbf{p}) \end{vmatrix} \neq 0$; (稱爲 Hessian.)

(1) 若 $\Delta(\mathbf{p}) > 0$ 且 $D_{11}f(\mathbf{p}) > 0$, 則 f 在點 $\mathbf{p}$ 有相對極小;

(2) 若 $\Delta(\mathbf{p}) > 0$ 且 $D_{11}f(\mathbf{p}) < 0$, 則 f 在點 $\mathbf{p}$ 有相對極大;

(3) 若 $\Delta(\mathbf{p}) < 0$, 則 f 在點 $\mathbf{p}$ 無極值 .

【證】對於 $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in N_\delta^*(\mathbf{p})$, 由推廣的 Taylor 定理知, 存在 $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ 介於 $\mathbf{p}$ 與 $\mathbf{x}$ 之間, 使得

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2) - f(p_1,p_2) = \frac{1}{2}\Big[&(x_1-p_1)^2 D_{11}f(c_1,c_2) \\ &+ 2(x_1-p_1)(x_2-p_2)D_{12}f(c_1,c_2) + (x_2-p_2)^2 D_{22}f(c_1,c_2)\Big].\end{aligned}$$

今設 $a = D_{11}f(c_1,c_2)$, $b = D_{12}f(c_1,c_2)$, $c = D_{22}f(c_1,c_2)$ 及 $h = x_1 - p_1$, $k = x_2 - p_2$. 故若 $a \neq 0$, 則

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2) - f(p_1,p_2) &= \frac{1}{2}\big[ah^2 + 2bhk + ck^2\big] \\ &= \frac{1}{2a}\big[(ah+bk)^2 + (ac-b^2)k^2\big] \qquad (*)\end{aligned}$$

次設 $A = D_{11}f(\mathbf{p}),\ B = D_{12}f(\mathbf{p}),\ C = D_{22}f(\mathbf{p})$, 則 $\Delta(\mathbf{p}) = AC - B^2$. 由於 f 爲二階連續可偏微分, 故 $D_{11}f,\ D_{12}f,\ D_{22}f$ 等均爲連續, 是以

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}}(ac - b^2) = AC - B^2,$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} a = A,$$

亦即存在點 $\mathbf{p}$ 之一鄰近 $N_\lambda(\mathbf{p})$ 使得 $ac - b^2$ 與 $AC - B^2$ 同號, a 與 A 同號.

(1) 若 $\Delta(\mathbf{p}) > 0$ 且 $A > 0$, 則當 $\mathbf{x} \in N_\delta(\mathbf{p}) \cap N_\lambda(\mathbf{p})$ 時, 由 $(*)$ 式知

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{p}) = \frac{1}{2a}\big[(ah + bk)^2 + (ac - b^2)k^2\big] \geq 0.$$

故知 f 在點 $\mathbf{p}$ 有相對極小;

(2) 若 $\Delta(\mathbf{p}) > 0$ 且 $A < 0$, 仿 (1) 知 f 在點 $\mathbf{p}$ 有相對極大;

(3) 若 $\Delta(\mathbf{p}) < 0$. 我們將分以下二步驟說明 f 於點 $\mathbf{p}$ 無極值.

1° 設 $q(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, 其中 $A,\ B,\ C$ 皆爲常數且

$$\Delta = AC - B^2 < 0, \quad (\text{注意：勿與 } \Delta(\mathbf{p}) \text{ 相混})$$

① 若 $A \neq 0$, 則因

$$q(x, y) = \frac{1}{2A}\big[(Ax + By)^2 + (AC - B^2)y^2\big] = \frac{1}{2A}\big[(Ax + By)^2 - |\Delta|y^2\big]$$
$$= \frac{1}{2A}\Big((Ax + By) - \sqrt{|\Delta|}\,y\Big)\Big((Ax + By) + \sqrt{|\Delta|}\,y\Big),$$

$\mathbb{R}^2$ 被 $q(x, y) = 0$ 之二條過原點的直線分割爲四區域, 其中二區域 $q(x, y) > 0$, 另二區域爲負, 是以 q 在點 (0,0) 無極值.

② 若 $A = 0,\ C \neq 0$, 則調換 $A,\ C$ 之角色, 同法可證 q 在點 (0,0) 無極值.

③ 若 $A = C = 0$, 則 $q(x, y) = 2Bxy$ 在 I、III 象限之符號與在 II、IV 象限之符號相異, 知 q 在點 (0,0) 無極值.

2° 當 $|\mathbf{x} - \mathbf{p}|$ 爲夠小之正數時,

$$f(x_1, x_2) - f(p_1, p_2) = \frac{1}{2}\big[ah^2 + 2bhk + ck^2\big]$$

與 $q(h, k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$ 符號相同, 而由 1° 知, 當 $\Delta(\mathbf{p}) = AC - B^2 < 0$ 時, $q(h, k)$ 時正時負, 是以知 f 於點 $\mathbf{p}$ 無極值.

附錄十六　Lagrange 乘數法

定理

設 f 與 g 皆爲二變數連續可偏微函數, 若 f 在條件 $g(x,y)=0$ 下在點 $\mathbf{p}=(p_1,p_2)$ 有相對極值, 則存在 $\lambda_0\in\mathbb{R}$ 使得函數

$$F(x,y,\lambda)\underset{\text{def}}{=}f(x,y)+\lambda\,g(x,y)$$

對於 x, y, λ 之三變數在點 (p_1,p_2,λ_0) 之偏導數皆爲零, 即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(p_1,p_2,\lambda_0)}{\partial x}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial F(p_1,p_2,\lambda_0)}{\partial y}=0,\\[2ex] \dfrac{\partial F(p_1,p_2,\lambda_0)}{\partial \lambda}=0.\end{cases}$$

【證】設集合 $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid g(x,y)=0\}$, 我們將 S 視爲一向量函數之值域, 即設 I 爲一實數區間, $\mathbf{r}\colon I\to S$ 爲可微分, $0\in\mathring{I}$ 且 $\mathbf{r}(0)=\mathbf{p}$, $\mathbf{r}'(0)\neq\mathbf{0}$, ($\mathbf{r}$ 爲 S 上過點 $\mathbf{p}$ 之一路徑).

1° 由原設

$$\begin{aligned}f|_S\text{ 在點 }\mathbf{p}\text{ 有極值}\ &\Rightarrow\ f\circ\mathbf{r}\colon I\to\mathbb{R}\text{ 在點 }0\text{ 有極值}\\ &\Rightarrow\ \frac{d}{dt}(f\circ\mathbf{r})(0)=0\\ &\Rightarrow\ \nabla f(\mathbf{r}(0))\cdot\mathbf{r}'(0)=0,\quad(\text{連鎖律之二})\\ &\Rightarrow\ \nabla f(\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}'(0)=0\\ &\Rightarrow\ \nabla f(\mathbf{p})\text{ 與 }\mathbf{r}'(0)\text{ 互相垂直.}\end{aligned}$$

2° 其次,

$$\begin{aligned}g(x,y)=0,\ \forall(x,y)\in S\ &\Rightarrow\ g(\mathbf{r}(t))=0,\ \forall t\in I\\ &\Rightarrow\ \frac{d}{dt}(g\circ\mathbf{r})(t)=0,\ \forall t\in I\\ &\Rightarrow\ \nabla g(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)=0,\quad(\text{連鎖律之二})\\ &\Rightarrow\ \nabla g(\mathbf{p})\cdot\mathbf{r}'(0)=0\\ &\Rightarrow\ \nabla g(\mathbf{p})\text{ 與 }\mathbf{r}'(0)\text{ 互相垂直.}\end{aligned}$$

3° 由上述二點知, 向量 $\nabla f(\mathbf{p})$ 必與 $\nabla g(\mathbf{p})$ 平行, 亦即存在 $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ 使得 $\nabla f(\mathbf{p}) + \lambda_0 \nabla g(\mathbf{p}) = 0$, 換言之

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(p_1, p_2, \lambda_0)}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F(p_1, p_2, \lambda_0)}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

而由原設知 $g(\mathbf{p}) = 0$, 亦即

$$\frac{\partial F(p_1, p_2, \lambda_0)}{\partial \lambda} = 0.$$

附錄十七　二重 Riemann 積分之線性性質

定理

若 f, g 在 $A \subset \mathbb{R}^2$ 上爲可積, $\alpha \in \mathbb{R}$, 則

(1) αf 爲可積且 $\int_A \alpha f = \alpha \int_A f$;

(2) $f+g$ 爲可積且 $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$;

(3) 若 $f \le g$, 則 $\int_A f \le \int_A g$.

【證】(1) 留給讀者自證.

(2) 設 $P = \{(x_i, y_j) \mid 0 \le i \le m, 0 \le j \le n\}$ 爲 R 上一分割, 內 R 爲包含 A 之閉矩形, 並令

$$M_{ij} = \sup f_A(S_{ij}); \qquad m_{ij} = \inf f_A(S_{ij});$$

$$M'_{ij} = \sup g_A(S_{ij}); \qquad m'_{ij} = \inf g_A(S_{ij});$$

$$M''_{ij} = \sup(f_A + g_A)(S_{ij}); \quad m''_{ij} = \inf(f_A + g_A)(S_{ij}).$$

其中 f_A, g_A 見定義 11.2. 則 $\forall (x,y) \in S_{ij}$,

$$m_{ij} + m'_{ij} \le f_A(x,y) + g_A(x,y),$$

故

$$m_{ij} + m'_{ij} \le \inf\{f_A(x,y) + g_A(x,y) \mid (x,y) \in S_{ij}\} = m''_{ij}.$$

於是對任一分割 P 均有

$$\begin{aligned} L(f_A, P) + L(g_A, P) &= \sum_i \sum_j m_{ij} \cdot A(S_{ij}) + \sum_i \sum_j m'_{ij} \cdot A(S_{ij}) \\ &\le \sum_i \sum_j m''_{ij} \cdot A(S_{ij}) = L(f_A + g_A, P). \end{aligned}$$

同理, 對於任一分割 P 亦應有

$$U(f_A + g_A, P) \le U(f_A, P) + U(g_A, P).$$

亦即

$$\begin{aligned} L(f_A, P) + L(g_A, P) \le L(f_A + g_A, P) &\le U(f_A + g_A, P) \\ &\le U(f_A, P) + U(g_A, P). \end{aligned}$$

仿第六章單變數的“可積之充要條件定理”立即可得 $f_A + g_A$ 可積於 R 上, 且

$$\int_R (f_A + g_A) = \int_R f_A + \int_R g_A.$$

故 $f + g$ 在 A 上爲可積, 且

$$\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g.$$

(3) 由原設知 $m_{ij} \le m'_{ij}$, 及 $M_{ij} \le M'_{ij}$, 故

$$L(f_A, P) \le L(g_A, P) \text{ 及 } U(f_A, P) \le (g_A, P),$$

是以必有

$$\underline{\int_R} f_A \le \underline{\int_R} g_A \text{ 及 } \overline{\int_R} f_A \le \overline{\int_R} g_A.$$

故 $\int_R f_A \le \int_R g_A$, 即 $\int_A f \le \int_A g$.

附錄十八　二重積分與累次積分

定理

設 $f\colon R=[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ 爲可積, 若 $\forall x\in[a,b],\ g_x\colon[c,d]\to\mathbb{R}:g_x(y)=f(x,y)$ 爲可積, 則函數

$$G\colon[a,b]\to\mathbb{R}:G(x)=\int_c^d g_x(y)\,dy$$

爲可積且

$$\int_R f=\int_a^b G(x)\,dx=\int_a^b\Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx.$$

【證】設 $I=[a,b]$ 而 $P_I=\{x_0,\ x_1,\ \cdots,\ x_m\}$ 爲 I 之一分割, 又設 $J=[c,d]$ 而 $P_J=\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}$ 爲 J 之一分割. 今令 $I_i=[x_{i-1},x_i]$, 又令 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$; 而 $J_j=[y_{j-1},y_j],\ \ \Delta y_j=y_j-y_{j-1}$. 顯然, 可得 $P=P_I\times P_J$ 爲 R 之一分割 , 且 R 對於 P 之第 ij 個子矩形 S_{ij} 則可表爲 $I_i\times J_j$, 又 S_{ij} 之面積爲 $A(S_{ij})=\Delta x_i\times\Delta y_j$. 由

$$L(f,P)=\sum_i\sum_j m_{ij}A(S_{ij})=\sum_i\sum_j m_{ij}\Delta x_i\Delta y_j=\sum_i(\sum_j m_{ij}\Delta y_j)\Delta x_i.$$

及 $\forall x\in I_i$,

$$\begin{aligned}\sum_j m_{ij}\Delta y_j&=\sum_j\inf\{f(x,y)\mid(x,y)\in S_{ij}\}\Delta y_j\\&\le\sum_j\inf\{f(x,y)\mid y\in J_j\}\Delta y_j=L(g_x,P_J)\le G(x).\end{aligned}$$

得知,

$$L(f,P)\le\sum_i\inf\{G(x)\mid x\in I_i\}\Delta x_i=L(G,P_I).\tag{1}$$

同理,

$$U(G,P_I)\le U(f,P).\tag{2}$$

由 (1) 與 (2) 得

$$L(f,P)\le L(G,P_I)\le U(G,P_I)\le U(f,P).\tag{3}$$

由 (3) 知,

$$\underline{\int_R} f\le\underline{\int_I} G\le\bar{\int_I} G\le\bar{\int_R} f.$$

由原設知 f 在 R 上爲可積, 故 G 在 I 上爲可積, 且

$$\int_R f = \underline{\int_R} f = \bar{\int_R} f = \underline{\int_I} G = \bar{\int_I} G = \int_I G.$$

即

$$\int_R f = \int_I G = \int_a^b G(x)dx = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)dy\Big]dx.$$

漢英名詞索引

p 級數(p-series)303

二畫

二重積分(double integral)403
二項級數(binomial series)328

三畫

三角代換(trigonometric substitution)196
三角函數(trigonometric functions)99
三明治原理(sandwich principle)39
三葉玫瑰(three-leaved rose)415
下界(lower bound)15
  最大(greatest)15
上界(upper bound)14
  最小(least)15
叉積(cross product)339
子矩形(sub-rectangle)403
子集(subset)9
  眞(proper)9
小尾性(small-tail property)297

四畫

不定積分(indefinite integral)189
不減少(non-decreasing)18
不等式(inequality)
  柯西(Cauchy)395
  算幾(arithmetic-geometric)145
不增加(non-increasing)18
介值定理(intermediate-value theorem)50
元素(element)9
  最大(maximum)14
  最小(minimum)14
內部(interior)29,336
內積(inner product)339
內積(scalar product)339
內點(interior point)29,336
公式(formula)
  泰勒(Taylor)151
  麥克勞林(Maclaurin)151
分部積分法(integration by parts)200
分割(partition)214,403
  正則(regular)220
切(tangent)
  向量(vector)347
  面(plane)379
  線(line)64
切片法(slicing method)259
反三角函數(inverse trigonometric functions)101
反曲點(point of inflection)163
反函數(inverse function)13,95
反導函數(anti-derivative)187
反雙曲函數(inverse hyperbolic function)127
尤拉數(Euler's number)111
巴布斯定理(Pappus theorem)279
心臟線(cardioid)414
方向(direction)
  角(angles)340
  數(numbers)340
  餘弦(cosine)340
方向導數(directional derivative)367
牛頓迭代法(Newton's iteration)173

五畫

凹向下(concave downward)161
凹向上(concave upward)160
凹函數(concave function)161
凸函數(convex function)160
可逆(invertible)13
可微(differentiable)63,375
  連續(continuously)67
  右(right)63
可積(integrable)215,404
右連續(right-continuous)45
四葉玫瑰(four-leaved rose)415
布立斯定理(Bliss' theorem)226
平均值(mean value)282
平滑曲線(smooth curve)350
平滑鏈(smooth chain)434

六畫

向量(vector)335
  切(tangent)347
  方向(direction)341
  自由(free)337
  坐標(coordinate)337
  函數(function)17,334
  法(normal)341
  梯度(gradient)375
  速度(velocity)347
  單位切(unit tangent)351
  單位主法(principal unit normal)351
  單位副法(unit binormal)351
合成函數(composite function)19
多變數函數(function of several variables)
    17,360
收斂(convergence)239,243,292
  半徑(radius)316
  序列(sequence)292
  條件(conditional)311
  絕對(absolute)311
  瑕積分(improper integral)239,243
曲率(curvature)352
  中心(center)355
  半徑(radius)352
曲線(curve)345
  平滑(smooth)350
  正向(positively oriented)435
  負向(negatively oriented)435
  閉(closed)435
有界(bounded)15
  函數(function)35
有理數系(rational number system)16
自然對數函數(natural logarithmic func-
    tion)118
自然數系(natural number system)15

七畫

利率(interest rate)124
均值定理(mean value theorem)78,377
坐標(coordinates)
  球面(spherical)426
  圓柱(cylindrical)426
  極(polar)413
完全性(completeness)14
局部有界函數(locally bounded function)35
尾數(mantissa)58
序列(sequence)292
  零(null)292
序對(ordered pair)10
形心(centroid)273
投影函數(projection)363
辛普森法(Simpson's rule)285

八畫

亞可比行列式(Jacobian)453

函數(function)11
尾數(mantissa)58
三角(trigonometric)99
不減少(non-decreasing)18
不增加(non-increasing)18
分量(component)345
反(inverse)13,95
反三角(inverse trigonometric)101
反正切(arctangent)104
反正弦(arcsine)101
反餘弦(arccosine)103
反雙曲(inverse hyperbolic)127
天花板(ceiling)17
以 a 爲底指數(exponential with base a)116
凹(concave)161
凸(convex)160
正切(tangent)99
正弦(sine)97
正負號(signum)46
正割(secant)99
向量(vector)17,333
合成(composite)17
地板(floor)17
多項式(polynomial)17
多變數(of several variables)17,333
有界(bounded)35
次序(order)21
自然對數(natural logarithmic)113
伽瑪(gamma)246
局部有界(locally bounded)35
制限(restriction)41
和(sum)19
奇(odd)23
指數(exponential)109
函數(function)
括號(bracket)17
相等(equality)12
差(difference)19
差商(difference quotient)63
根號(square-root)18
偶(even)23
商(quotient)19
常數(constant)17
連續(continuous)45,346,366
最大整數(greatest integer)17
單調(monotonic)18
絕對值(absolute value)17
微分(differential)87
實值(real-valued)17
實變(real variable)17
對數(logarithmic)119
誤差(error)421
餘切(cotangent)99
餘弦(cosine)97
餘割(cosecant)99
積(product)19
優良近似(good approximation)149
隱(implicit)133
雙曲(hyperbolic)127
和(sum)296
部分(partial)296
和數(sum)
下(lower)213,403
上(upper)213,403
黎曼(Riemann)217
孤立點(isolated point)28
巴布斯(Pappus)279
極值(extreme value)52,388
介值(intermediate-value)50

定理(theorem)
布立斯(Bliss')226
均値(mean value)78,377
夾擠(squeezing)39
定點(fixed-point)464
波查諾(Bolzano)49
保序(order-preserving)38
保號(sign-preserving)37
洛耳(Rolle's)78
革忍(Green's)436
泰勒(Taylor's)150
微分均値(mean value)78,377
微積分基本(fundamental)231,233
楊格(Young's)371
零導數(zero derivative)79
導函數介値(intermediate-value)85
積分均値(mean value for integrals)230
趨零(vanishing)35
定義域(domain)11
定點定理(fixed-point theorem)464
弧長(arc length)266,350
拉格郎日乘數法(Lagrange's multiplier)391
波查諾定理(Bolzano theorem)49
法線(normal line)379
空間曲線(space curve)345
近似値(approximate value)89

九畫

指數成長(exponential growth)122
指數律(laws of exponent)118
映像(image)11
柯西不等式(Cauchy inequality)395
柯西微分均値定理(Cauchy's mean value) 85
柯西準則(Cauchy's criterion)299
洛耳定理(Rolle's theorem)78
相等(equal)9
面積(area)253
表(surface)269
革忍定理(Green's theorem)436

十畫

値(value)11
値域(range)11
原函數(primitive)187
展開式(expansion)
泰勒(Taylor's)151
麥克勞林(Maclaurin)151
泰勒(Taylor's)
公式(formula)151
多項式(polynomial)151
定理(theorem)150
展開式(expansion)151
眞値(true value)89
矩(moment)273
級數(series)296
p-(p-)303
二項(binomial)328
正項(positive term)300
交錯(alternating)306
交錯 p(alternating p)311
重排(rearrangement)311
泰勒(Taylor's)319
條件(conditionally convergent)311
麥克勞林(Maclaurin's)319
幾何(geometric)298
絕對收斂(absolutely convergent)311
冪(power)314
高斯符號(Gauss' symbol)17

十一畫

偏序(partial order)14
偏導數(partial derivative)367

區間(interval)50
退化(degenerate)121
收斂(convergence)316
緊緻(compact)51
參數(parameter)136
方程式(equations)136
曲線(curve)136
常態分配(normal distribution)420
常數(constant)17
成長(growth)122
衰變(decay)122
梯形法(trapezoidal rule)284
梯度(gradient)375
笛卡爾葉線(folium of Descartes)416
累次積分(iterated integral)408
被積函數(integrand)189
連續(continuous)44,346,366
連續可微(continuously differentiable)67
速度向量(velocity vector)347
速率(speed)347
部分和(partial sum)296
麥克勞林(Maclaurin's)151
公式(formula)151
展開式(expansion)151

十二畫

最大下界(infimum)15
最大元素(maximum element)14
最大值(absolute maximum)51
最小上界(supremum)15
最小元素(minimum element)14
最小值(absolute minimum)51
嵌射(injective)12
殼法(shell method)262
無限大(infinity)16
正(positive)16
負(negative)16
發散(divergence)239,243,292
序列(sequence)315
瑕積分(improper integral)239,243
賀斯行列式(Hessian)389
距離(distance)335
週期(period)165
集(set)
交集(intersection)10
聯集(union)9
差(difference)10
偏序(partially ordered)14
零(zero)19
冪(power)10
導來(derived)28,335
歸納(inductive)15
集合(set)9
有界(bounded)336
空(empty)9
閉(closed)336
開(open)336
緊緻(compact)336
積(Cartesian product)10

十三畫

微分(differential)87
全(total)383
微分法(differentiation)64
對數(logarithmic)126
微分連鎖律(chain rule)69,373,378
微積分基本定理(fundamental theorem)
231,233
極(pole)413
極大值(maximum)76
局部(local)76,389
相對(relative)76,389

絕對(absolute)51
極小值(minimum)76
局部(local)76,389
相對(relative)76,389
絕對(absolute)51
極坐標(polar coordinates)413
極限(limit)29,346,361
右(right-hand)42
左(left-hand)42
極值(extremum)51
相對(relative)76,389
絕對(absolute)51
極軸(polar axis)413
瑕積分(improper integral)239,243
解析(analytic)319
達保積分(Darboux integral)215

十四畫

像原(inverse image)11
實數系(real number system)13
擴張的(extended)16
對射(bijective)13
對數函數(function)119
對應域(co-domain)11
漸近線(asymptote)165
非垂直(non-vertical)166
垂直(vertical)165
碳十四計年法(carbon dating)123
聚點(accumulation point)28,335
蓋射(surjective)12
誤差(error)89
遞減(decreasing)18
遞增(increasing)18

十五畫

審斂法(test)
比值(ratio)303
比較(comparison)301
根值(root)305
萊普尼茨(Leibniz' rule)306
積分(integral)302
歐氏空間(Euclidean space)335
範數(norm)217
線積分(line integral)433
複利(compound interest)124
鄰近(neighborhood)27,335
去心(deleted)27,335
鞍點(saddle point)386
餘項(remainder)151
黎曼可積(Riemann integrable)215,404
黎曼條件(Riemann condition)218
黎曼積分(Riemann integral)215

十六畫

導來集(derived set)28,335
導函數(derivative)63
反(anti)187
高階(high order)66
介值定理(intermediate-value)85
導數(derivative)63
方向(directional)367
右(right)63
偏(partial)367
整數系(integer system)15
橢圓拋物面(elliptic paraboloid)387
積分(integral)
下(lower)214,404
上(upper)214,404
不定(indefinite)189
加法律(additive law)226
均值定理(mean value theorem)230
累次(iterated)408

積分(integral)
瑕(improper)239,243
線(line)433
黎曼(Riemann)215
積分(integration)
常數(constant)189
積分法(integration)191
三角代換(trigonometric substitution)196
分部(by parts)200
代換(substitution)193
半角代換(by half-angle substitution)205
列表分部(tablular by parts)201
部分分式(by partial fractions)204
雙曲代換(hyperbolic substitution)198

十七畫以上

優良近似函數(good approximation function) 149
瞬時速度(instantaneous velocity)76
臨界點(critical points)77,386
螺旋線(helix)349
隱函數(implicit function)133
擺線(cycloid)141
內(hypo-)142
斷點(discontinuous point)45
雙曲函數(hyperbolic function)127
雙曲拋物面(hyperbolic paraboloid)376
雙葉玫瑰(lemniscate)415
羅畢達規則(l'Hospital's rule)176
關聯比率(related rate)73
變率(rate of change)73
平均(average)73
瞬間(instantaneous)73
變數(variable)11
代換(change of)235
變數代換(change of variable)235
體(field)13
序體(ordered)14
體積(volume)259

英漢名詞索引

A

absolute maximum(最大値)51
absolute minimum(最小値)51
accumulation point(聚點)28,335
analytic(解析)319
anti-derivative(反導函數)187
approximate value(近似値)89
arc length(弧長)266,350
area(面積)253
  surface(表)269
asymptote(漸近線)165
  non-vertical(非垂直)166
  vertical(垂直)165

B

bijective(對射)13
binomial series(二項級數)328
Bliss' theorem(布立斯定理)226
Bolzano theorem(波查諾定理)49
bounded(有界)15
  function(函數)35

C

carbon dating(碳十四計年法)123
cardioid(心臟線)414
Cauchy inequality(柯西不等式)395
Cauchy's criterion(柯西準則)299
Cauchy's mean value throrem(柯西微分均値定理)85
centroid(形心)273
chain rule(微分連鎖律)69,373,378
change of variable(變數代換)235
co-domain(對應域)11
completeness(完全性)14
composite function(合成函數)19
compound interest(複利)124
concave downward(凹向下)161
concave function(凹函數)161
concave upward(凹向上)160
constant(常數)17
  decay(衰變)122
  growth(成長)122
continuous(連續)44,346,366
continuously differentiable(連續可微)67
convergence(收斂)239,243,292
  absolute(絕對)311
  conditional(條件)311
  improper integral(瑕積分)239,243
  radius(半徑)316
  sequence(序列)292
convex function(凸函數)160
coordinates(坐標)
  cylindrical(圓柱)426
  polar(極坐標)413
  spherical(球面)426
critical points(臨界點)77,386
cross product(叉積)339
curvature(曲率)352
  center(中心)355
  radius(半徑)352
curve(曲線)345
  closed(閉)435
  negatively oriented(負向)435

curve(曲線)345
positively oriented(正向)435
smooth(平滑)350
cycloid(擺線)141
hypo-(內)142

D

Darboux integral(達保積分)215
decreasing(遞減)18
derivative(導數)63
derivative(導函數)63
anti(反)187
directional(方向)367
high order(高階)66
partial(偏)367
right(右)63
derived set(導來集)28,335
differentiable(可微)63,375
continuously(連續)67
right(右)63
differential(微分)87
total(全)383
differentiation(微分法)64
logarithmic(對數)126
direction(方向)
angles(角)340
cosines(餘弦)340
numbers(數)333
directional derivative(方向導數)367
discontinuous point(斷點)45
distance(距離)335
divergence(發散)239,243,292
improper integral(瑕積分)239,243
sequence(序列)292
domain(定義域)11
double integral(二重積分)403

E

element(元素)9
maximum(最大)14
minimum(最小)14
elliptic paraboloid(橢圓拋物面)387
equal(相等)9
error(誤差)89
Euclidean space(歐氏空間)335
Euler's number(尤拉數)111
expansion(展開式)
Maclaurin(麥克勞林)151
Taylor's(泰勒)151
exponential growth(指數成長)122
extremum(極值)51
absolute(絕對)51
relative(相對)76,389

F

field(體)13
ordered(序體)14
fixed-point theorem(定點定理)464
folium of Descartes(笛卡爾葉線)416
formula(公式)
Maclaurin(麥克勞林)151
Taylor's(泰勒)151
four-leaved rose(四葉玫瑰)415
function(函數)11
absolute value(絕對值)17
arccosine(反餘弦)103
arcsine(反正弦)101
arctangent(反正切)104
bounded(有界)35
bracket(括號)17
ceiling(天花板)17
component(分量)345

function(函數)
composite(合成)19
concave(凹)161
constant(常數)17
continuous(連續)45,346,366
convex(凸)160
cosecant(餘割)99
cosine(餘弦)97
cotangent(餘切)99
difference(差)19
difference quotient(差商)63
differential(微分)87
equality(相等)12
error(誤差)421
even(偶)23
exponential(指數)109
exponential with base a(以 a 爲底指數)116
floor(地板)17
gamma(伽瑪)246
Gauss' symbol(高斯符號)17
good approximation(優良近似)149
greatest integer(最大整數)17
hyperbolic(雙曲)127
implicit(隱)133
inverse(反)13,95
inverse hyperbolic(反雙曲)127
inverse trigonometric(反三角)101
locally bounded(局部有界)35
logarithmic(對數)119
mantissa(尾數)58
monotonic(單調)18
natural logarithmic(自然對數)113
non-decreasing(不減少)18
non-increasing(不增加)18
function(函數)
odd(奇)23
order(次序)21
polynomial(多項式)17
product(積)19
quotient(商)19
real variable(實變)17
real-valued(實值)17
restriction(制限)41
secant(正割)99
signum(正負號)46
sine(正弦)97
square-root(根號)18
sum(和)19
tangent(正切)99
trigonometric(三角)99
vector(向量)17,334
several variables(多變數函數)17,334
fundamental theorem(微積分基本定理)248,250

G

good approximation function(優良近似函數)149
gradient(梯度)375
Green's theorem(革忍定理)436

H

helix(螺旋線)349
Hessian(賀斯行列式)389
hyperbolic function(雙曲函數)127
hyperbolic paraboloid(雙曲拋物面)376
hyperboloid(雙曲面)380

I

image(映像)11

implicit function(隱函數)133
improper integral(瑕積分)239,243
increasing(遞增)18
indefinite integral(不定積分)189
inequality(不等式)
  arithmetic-geometric(算幾)145
  Cauchy(柯西)395 infimum(最大下界)15
infinity(無限大)16
  negative(負)16
  positive(正)16
injective(嵌射)12
inner product(內積)339
instantaneous velocity(瞬時速度)73
integer system(整數系)15
integrable(可積)215,404
integral(積分)
  additive law(加法律)226
  improper(瑕)239,243
  indefinite(不定)189
  iterated(累次)408
  line(線)433
  lower(下)214,404
  Riemann(黎曼)215
  upper(上)214,404
integrand(被積函數)189
integration(積分(法))189
  by half-angle substitution(半角代換)205
  by partial fractions(部分分式)204
  by parts(分部)200
  constant(常數)189
  hyperbolic substitution(雙曲代換)198
  mean value theorem(均值定理)230
  substitution(代換)193
  tablular by parts(列表分部)201
  trigonometric substitution(三角代換)196
integration by parts(分部積分法)200
interest rate(利率)124
interior(內部)29,336
interior point(內點)29,336
intermediate-value theorem(介值定理)50
interval(區間)50
  compact(緊緻)51
  convergence(收斂)316
  degenerate(退化)121
inverse function(反函數)13,95
inverse hyperbolic function(反雙曲函數)127
inverse image(像原)11
inverse trigonometric functions(反三角函數)101
invertible(可逆)13
isolated point(孤立點)28
iterated integral(累次積分)408

J

Jacobian(亞可比行列式)422

L

Lagrange's multiplier(拉格郎日乘數法)391
laws of exponent(指數律)118
lemniscate(雙葉玫瑰)415
l'Hospital's rule(羅畢達規則)176
limit(極限)29,346,361
  left-hand(左)42
  right-hand(右)42
line integral(線積分)433
locally bounded function(局部有界函數)36
logarithmic function(對數函數)119
lower bound(下界)15
  greatest(最大)15

M

Maclaurin's(麥克勞林)151
  expansion(展開式)151
  formula(公式)151
mantissa(尾數)58
maximum(極大值)76
  absolute(絕對)51
  local(局部)76,389
  relative(相對)76,389
maximum element(最大元素)14
mean value(平均值)282
mean value theorem(均值定理)78,377
minimum(極小值)76
  absolute(絕對)51
  local(局部)76,389
  relative(相對)76,389
minimum element(最小元素)14
moment(矩)273

N

natural logarithmic function(自然對數函數)113
natural number system(自然數系)15
neighborhood(鄰近)27,335
  deleted(去心)27,335
Newton's iteration(牛頓迭代法)173
non-decreasing(不減少)18
non-increasing(不增加)18
norm(範數)217
normal distribution(常態分配)420
normal line(法線)379

O

ordered pair(序對)10

P

p-series(p 級數)303
Pappus theorem(巴布斯定理)279
parameter(參數)136
  curve(曲線)136
  equations(方程式)136
partial derivative(偏導數)367
partial order(偏序)14
partial sum(部分和)296
partition(分割)214,403
  regular(正則)220
period(週期)165
point of inflection(反曲點)163
polar axis(極軸)413
polar coordinates(極坐標)413
pole(極)413
primitive(原函數)187
projection(投影函數)363

R

range(值域)11
rate of change(變率)73
  average(平均)73
  instantaneous(瞬間)73
rational number system(有理數系)16
real number system(實數系)13
  extended(擴張的)16
related rate(關聯比率)73
remainder(餘項)151
Riemann condition(黎曼條件)218
Riemann integrable(黎曼可積)215,404
Riemann integral(黎曼積分)215
right-continuous(右連續)45
Rolle's theorem(洛耳定理)78

S

saddle point(鞍點)386
sandwich principle(三明治原理)39

scalar product(內積)339
sequence(序列)292
  null(零)296
series(級數)303
  p-(p-)303
  absolutely convergent(絕對收斂)311
  alternating(交錯)306
  alternating p(交錯 p)311
  binomial(二項)328
  conditionally convergent(條件)311
  geometric(幾何)298
  Maclaurin's(麥克勞林)319
  positive term(正項)300
  power(冪)314
  rearrangement(重排)311
  Taylor's(泰勒)319
set(集合)9
set(集)
  bounded(有界)336
  Cartesian product(積)10
  closed(閉)336
  compact(緊緻)336
  derived(導來)28,335
  difference(差)10
  empty(空)9
  inductive(歸納)15
  intersection(交集)10
  open(開)336
  partially ordered(偏序)14
  power(冪)10
  union(聯集)9
  zero(零)19
shell method(殼法)262
Simpson's rule(辛普森法)285
slicing method(切片法)259
small-tail property(小尾性)297
smooth chain(平滑鏈)434
smooth curve(平滑曲線)350
space curve(空間曲線)345
speed(速率)347
sub-rectangle(子矩形)403
subset(子集)9
  proper(眞)9
sum(和)306
sum(和數)
  lower(下)214,403
  partial(部分)296
  Riemann(黎曼)217
  upper(上)214,403
supremum(最小上界)15
surjective(蓋射)12

T

tangent(切)
  line(線)64
  plane(面)379
  vector(向量)347
Taylor's(泰勒)
  expansion(展開式)151
  formula(公式)151
  polynomial(多項式)151
  theorem(定理)150
test(審斂法)
  comparison(比較)301
  integral(積分)302
  Leibniz' rule(萊普尼茨)306
  ratio(比值)303
  root(根值)305
theorem(定理)
  Bliss'(布立斯)226

theorem(定理)
Bolzano(波查諾)49
extreme value(極值)52,389
fixed-point(定點)464
fundamental(微積分基本)231,233
Green's(革忍)436
intermediate-value(介值)50
intermediate-value
for derivtive(導函數介值)85
mean value(均值)78,377
mean value for integrals(積分均值)230
order-preserving(保序)38
Pappus(巴布斯)279
Rolle's(洛耳)78
sign-preserving(保號)37
squeezing(夾擠)41
Taylor's(泰勒)150
vanishing(趨零)35
Young's(楊格)371
zero derivative(零導數)79
three-leaved rose(三葉玫瑰)415
trapezoidal rule(梯形法)284
trigonometric functions(三角函數)99
trigonometric substitution(三角代換)196
true value(眞值)89

U

upper bound(上界)14
least(最小)15

V

value(值)11
variable(變數)11
change of(代換)235
vector(向量)335
coordinate(坐標)337
direction(方向)341
free(自由)337
function(函數)17,334
gradient(梯度)375
normal(法)341
principal unit normal(單位主法)351
tangent(切)347
unit binormal(單位副法)351
unit tangent(單位切)351
velocity(速度)347
velocity vector(速度向量)347
volume(體積)259